Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME306 - Métodos Numéricos e Computacionais II
Prof. Murilo F. Tomé 1º **sem/2012**

2ª Lista de Exercícios - SISTEMAS NÃO-LINEARES E INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

1. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} xy - z^2/4 = 1 \\ xyz - x^2 + y^2 = 2 \\ e^x - x^2 e^y + z = 3 \end{cases}$$

Aplique o método de Newton a esse sistema não-linear e obtenha a aproximação $\mathbf{x^{(1)}}$. Tome como aproximação inicial $\mathbf{x^{(0)}} = [0\ 1\ 1]^T$. e resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss.

2. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} xy^2 - z^2 = -5 \\ xyz - y^2 + z^2 = 11 \\ \ln(x) - x^2 \ln(y) + 2z = 6.6931 \end{cases}$$

Aplique o método de Newton a esse sistema não-linear e obtenha a aproximação $\mathbf{x^{(1)}}$. Tome como aproximação inicial $\mathbf{x^{(0)}} = [1.1\ 1.9\ 2.05]^T$ e resolva o sistema linear pelo método de Doolittle.

3. A raiz de uma função pode ser aproximada pela raiz do seu polinômio de interpolação. Use uma parábola para determinar a raiz da função tabelada a seguir,

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.841	0.909	0.141	-0.757	-959	-0.279

4. Use uma parábola para determinar uma aproximação para a única raiz positiva da equação $4\cos(x) - e^x = 0$.

3. Frequentemente acontece que valores tabelados de uma variável y dependente de uma variável x são dados, e pretendemos achar o valor de $\bar{x}$ da variável independente correspondente a um dado $\bar{y}$ da variável dependente. Isto é conhecido como **interpolação inversa**.

A partir da tabela:

x	0.5	0.7	1.0	1.2	1.5	1.6
$f(x)$	-2.63	-2.57	-2.00	-1.23	0.63	0.79

determinar a raiz de $f(x)$ usando interpolação inversa sobre 3 pontos.

5. Sabe-se que $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ tem um zero no intervalo [0,1]. Usando interpolação inversa sobre uma tabela de 3 pontos, determinar aproximadamente $\bar{x}$ correspondente a $f(\bar{x}) = 0$.

6. Uma maneira de se calcular o valor da derivada de uma função em um ponto x_0, quando não se conhece a expressão analítica da mesma, é usar uma tabela para formar um polinômio que aproxime a função, derivar então esse polinômio e avaliar sua derivada em $x = x_0$. Dada a tabela:

x	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65
$f(x)$	-1.52	1.51	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39

calcule um valor aproximado para $f'(0.50)$ usando polinômio de interpolação de grau 2.

7. Na tabela a seguir está assinalado o posicionamento de um ônibus, partindo do marco zero de uma rodovia federal

tempo(*min*)	60	80	100	120	140	160	180
posição (Km)	76	95	112	138	151	170	192

Pede-se os possíveis posicionamentos do ônibus para os tempos de 95 min., 130 min. e 170 min. Use reta e parábola.

8. Dada a tabela

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\ln(x)$	-2.303	-1.609	-1.204	-0.916	-0.693

   a) Estimar $\ln(0.32)$ através de interpolação linear e quadrática.

   b) Qual deve ser o valor de h, se queremos obter $\ln(x)$, com 3 casas decimais corretas, para $x \geq 1$, através de interpolação linear usando uma tabela para argumentos x_i igualmente espaçados de h ?

9. Suspeita-se que a tabela

x	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
y	-9.0	0.0	1.0	0.0	3.0	16.0

representa um polinômio cúbico. Como testar esse fato? Explique.

10. Seja $f(x, y)$ uma função definida sobre os pares (x, y), com

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}$$

onde $f_{r,s} = f(x_r, y_s)$.

A função $f(x, y)$ pode ser aproximada usando interpolação bidimensional da seguinte maneira:

"Primeiro faz-se a interpolação linear através de $f_{i,j}$ e $f_{i+1,J}$ obtendo-se a aproximação f_A e em seguida, através de $f_{i,j+1}$ e $f_{i+1,j+1}$, obtendo-se a aproximação f_B. Então interpola-se linearmente através de f_A e f_B para obter a aproximação final $f(x, y)$."

a) Seja

$$\alpha = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad \beta = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}$$

Mostre que a fórmula resultante do processo acima é dada por:

$$f(x, y) = (1 - \alpha)(1 - \beta) f_{i,j} + \alpha(1 - \beta) f_{i+1,j} + (1 - \alpha)\beta f_{i,j+1} + \alpha\beta f_{i+1,j+1}.$$

b) Considere a tabela para $f(x, y)$

x / y	75	100	125	150
42.5	89	90	91	93
65.0	72	78	82	87
81.5	54	68	72	79
100.0	35	55	64	70
120.5	13	45	51	61

Usando interpolação bidimensional, obtenha o valor aproximado de $f(110, 110)$.

11. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n + 1)$–pontos distintos e seja $l_k(x)$ o k-ésimo polinómio de Lagrange definido por: $l_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$. Mostre que para $n \geq 1$ tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k l_k(x) = x, \ \forall x \in I\!R$$

EXERCÍCIOS DE PROVAS ANTERIORES

1a) [1.0] Sabendo que $f(-1) = -1, f(1) = 1$ e $f(2) = 17$, obtenha o valor aproximado de $f(0)$ utilizando o polinômio interpolador nos pontos dados.

1b) [1.0] Sabe-se que $|f^j(x)| < (\frac{1}{3})^j, \ \forall \ x \in [-1, 2]$. Determine um majorante para o erro cometido quando aproximamos $f(0)$ por $P_2(0)$.

1c) [1.0] Sabendo que $f[-2, -1, 1] = -13/3$, obtenha o polinômio $P_3(x)$ que interpola f nos pontos da questão **1a)** e no ponto $x_3 = -2$.