Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME0305 - Métodos Numéricos e Computacionais I
Prof. Murilo Tomé **1º sem/2012**

1ª Lista de Exercícios - MÉTODOS DIRETOS P/ SISTEMAS LINEARES

1. Considere os seguintes números decimais: $x = 7.125$ e $y = 35.27$. Escreva-os na base 2.

2. Considere os seguintes números binários: $x = 11.0111$ e $y = 111.001$. Escreva-os na base 10.

3. Dada a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $\|\mathbf{A}\|_1$;

   (b) Calcule $\|\mathbf{A}\|_\infty$;

   (c) Calcule $\|\mathbf{A}\|_F$.

4. Considere o sistema $Ax = b$; onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Resolva esse sistema pelo método de Eliminação de Gauss.

5. Usando o método de Eliminação de Gauss, verificar que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

   a) possui uma única solução quando $\alpha = 0$;

   b) infinitas soluções quando $\alpha = 1$ e

   c) não tem solução quando $\alpha = -1$.

6. Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que A^{-1} tem a forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & c_{12} & 1/2 \\ 1/12 & c_{22} & 1/4 \\ 1/2 & c_{32} & -1/2 \end{bmatrix},$$

calcule a 2ª coluna de A^{-1} pelo método de eliminação de Gauss.

7. Calcular u_2, u_3, u_4, u_5 resolvendo a equação de diferenças:

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + u_n = n \;, n = 1, 2, 3, 4 \;,$$

com as condições de contorno $u_1 = 0$ e $u_6 = 1$, usando o método de eliminação de Gauss.

8. Considere o seguinte conjunto "esparso"de equações:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mostre que usando o método de Eliminação de Gauss o sistema triangular resultante permanece esparso. Um sistema como este é chamado TRIDIAGONAL. Tais sistemas aparecem frequentemente na solução de equações diferenciais.

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

   (a) Obtenha a factorização desta matriz pelo método de Doolittle;
   (b) Com base no resultado da alínea anterior, calcule $DetA$;
   (c) Calcule A^{-1}.

10. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que a matriz B pode ser factorizada pelo método de Cholesky e efectue a factorização.

(b) Com o mínimo de cálculos obtenha a factorização de Doolittle da mesma matriz.

11. Determine a inversa da matriz abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial.

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.2 & -1.2 & 0.0 \\ -1.2 & 3.5 & -1.0 & 0.0 \\ -4.0 & -1.2 & 4.4 & -1.2 \\ 0.0 & 0.0 & -1.2 & 4.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.6 \\ 1.1 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

2. Consideremos o sistema linear $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss

(a) sem pesquisa de pivot;

(b) com pesquisa parcial de pivot.

Compare os resultados e comente.