

2ª Lista de Exercícios:

1. De uma tabela são extraídos os valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	-1	2	4

Usando o **MMQ** ajuste os dados acima por polinômio de grau adequado. Sugestão: faça um gráfico.

2. Considere a tabela:

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

- Pelo **MMQ**, ajuste à tabela as funções:

$$g_1(x) = ax^2 + bx; \quad g_2(x) = cx^2 + d$$

- Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.

3. Achar aproximação dos mínimos quadrados da forma:

$$g(x) = ae^x + be^{-x}$$

correspondente aos dados:

x_i	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
y_i	5.02	5.21	6.49	9.54	16.02	24.53

4. Usando **MMQ** aproxime a função $f(x) = x^5 - x^4$ no intervalo $[-1,1]$, por uma parábola, usando os polinômios de Legendre.

Obs: Os polinômios de Legendre

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; \quad L_0(x) = 1$$

são ortogonais segundo o produto escalar:

$$(L_i(x), L_j(x)) = \int_{-1}^1 L_i(x)L_j(x)dx$$

Além disso satisfazem:

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

5. Usando o **MMQ** encontre a e b tais que $y = ax^b$ ajusta os dados:

x	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0
y	0.005	0.5	4	30	110

6. Considere a tabela:

t	3.8	7.0	9.5	11.3	17.5	31.5	45.5	64.0	95.0
y	10.0	12.5	13.5	14.0	15.0	16.0	16.5	17.0	17.5

Por qual das funções abaixo:

$$a) \quad y(t) = \frac{t}{a + bt}; \quad b) \quad y = ab^t$$

voce ajustaria esta tabela?

Sugestão: Faça os gráficos:

$$A) \quad \frac{t}{y} \text{ contra } t; \quad B) \quad \ln(y) \text{ contra } t$$

Então você deve escolher a) se o gráfico A) lhe parece mais linear que o gráfico B), e b) se o gráfico B) lhe parece mais linear que A).

7. Qual das funções:

$$I) \quad y = ax^2 + b; \quad II) \quad y = \frac{1}{a + bx}$$

ajusta melhor os valores da tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	-2	-1.5	-0.5	1.5	4.5	9.0	17.0

Usando o **MMQ** ajuste os valores da tabela pela função escolhida.

8. Físicos querem aproximar os seguintes dados:

x	0.1	0.5	1.0	2.0
$f(x)$	0.13	0.57	1.46	5.05

usando a função $ae^{bx} + c$. Eles acreditam que $b \simeq 1$.

- Calcule os valores de a e c pelo **MMQ**, assumindo que $b = 1$.
- Use os valores de a e c obtidos em 10.1) para estimar o valor de b.

9. Mostre que o conjunto das funções:

$$\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \sin(nt), \cos(nt)\}$$

é um sistema ortogonal em $[-\pi, \pi]$.

10. Usando o **MMQ** achar a solução aproximada do sistema incompatível:

$$\begin{cases} a - 3b = 0.9 \\ 2a - 5b = 1.9 \\ -a + 2b = -0.9 \\ 3a - b = 3.0 \\ a + 2b = 1.1 \end{cases}$$

11. A tabela abaixo foi obtida da observação de determinado fenômeno que sabe - se é regido pela equação:

$$E = ax + by$$

Sabe - se que:

x	2	1	1	-1	2
y	3	-1	1	2	-1
E	1	2	-1	1	3

- Determine pelo **MMQ** a e b.
- Qual o erro cometido?

12. Considere a tabela:

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	1.1	2.1	3.2	4.4	5.8

Ajuste os pontos acima por uma função do tipo $x \ln(ax + b)$, usando o **MMQ**.

EXERCÍCIOS DA ÚLTIMA PROVA - 2008

1a) Sabendo que $f(-1) = -1, f(1) = 1$ e $f(2) = 17$, obtenha o valor aproximado de $f(0)$ utilizando o polinômio interpolador nos pontos dados.

1b) Sabe-se que $|f^j(x)| < (\frac{1}{3})^j, \forall x \in [-1, 2]$. Determine um majorante para o erro cometido quando aproximamos $f(0)$ por $P_2(0)$.

1c) Sabendo que $f[-2, -1, 1] = -13/3$, obtenha o polinômio $P_3(x)$ que interpola f nos pontos da questão **1a)** e no ponto $x_3 = -2$.

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$f(x_i)$	2.10	2.40	2.1	0.9	0.1

(a) Obtenha a função g da forma $g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x)$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine para essa função

$$Q = \sum_{i=0}^3 [f(x_i) - g(x_i)]^2$$

(b) Seja $Q_1 = \sum_{i=0}^4 [f(x_i) - a \cos(x_i)]^2$. Com base no ítem anterior, justifique que $Q_1 > Q, \forall a \in \mathbf{R}$.

3. Determine pelo MMQ, o polinômio $p(x) = ax^2 + bx$ que melhor aproxima a função $f(x) = \sin(2x)$ no intervalo $[0, \pi/2]$.

4. Sabe-se que a função dada na tabela abaixo é do tipo $f(x) = \frac{x^2+1}{ax^2+b}$. Determine os valores de a e b pelo método dos mínimos quadrados.

x_i	1.000	1.500	2.000	2.500
$f(x_i)$	0.700	0.460	0.350	0.270

5. Sejam $x_0, x_1, \dots, x_n, (n+1)$ -pontos distintos e seja $l_k(x)$ o polinômio de Lagrange definido por: $l_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$. Mostre que para $n \geq 0$, tem-se:

$$\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$$