SOLUCAO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS

Muitos problemas encontrados em engenharia, matemática, física, quimica, ... , etc, envolvem equações diferenciais. Por exemplo, cálculo da estabilidade de aviões, escoamentos de fluidos Newtonianos, cálculo de trajetoria de misseis, etc. Porém, a grande maioria das equações encontradas na prática não podem ser resolvidas analiticamente: o único recurso na grande maioria dos casos é a aplicação de um método numérico para obter uma solução aproximada.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL:

Seja $f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais x e y, definida em

$$R = \Big\{(x,y) \text{ tal que } |x-x_0| \leq a \ , \ |y-y_0| \leq b \ , a, b > 0\Big\}$$

A equação

$$y' = f(x,y)$$

é chamada "Equação diferencial ordinária de 1a. ordem"(EDO). Como exemplos de EDOs de 1a. ordem, temos:

$$\begin{aligned} y' &= y \text{ que tem como solução } y(x) = Ce^x \ , && (1) \\ y' &= -y \quad \text{ que tem como solução } y(x) = Ce^{-x} && (2) \end{aligned}$$

Se conhecermos o valor de $y(x)$ em um ponto, digamos, $y(x_0) = y_0$ (chamada "condição inicial") então temos uma única condição. Para o exemplo (1) acima, se $y(0) = 1$ então temos:

$$1 = y(0) = Ce^0 \longrightarrow C = 1.\text{Portanto, } y(x) = e^x$$

Portanto, $y(x) = e^x$ é a única solução do PVI: $\begin{cases} y' &= f(x,y) \ , \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$ Dizemos que a EDO, juntamente com a condição inicial constituem um "Problema de Valor Inicial"(PVI), isto é,

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \ , \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

constitue um PVI.

1. Solução Numérica pela Série de Taylor

Considere o PVI

$$(I)\begin{cases} y' &= f(x,y) \ , \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

onde $f(x,y)$ é uma função linear ou não-linear, e suponhamos que f seja continua e suficientemente diferenciável em relação a x e y. Se $y(x)$ é a solução exata de (I) então podemos expandi-la em série de Taylor em torno do ponto $x = x_0$. Logo,

$$y(x) = y_0 + (x-x_0)y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}y''(x_0) + \cdots + \tag{3}$$

As derivadas nessa expansão não são conhecidas explicitamente uma vez que a solução não é conhecida. No entanto, se f for suficientemente derivável então podemos obter

$y'(x_0), y''(x_0), \cdots$, considerando a derivada total de de $y' = f(x,y)$ com relação a x, tendo em mente que f é uma funça implicita de y. Desta maneira, obtemos para as primeiras derivadas:

$$\begin{aligned}
y' &= f(x,y) \\
y'' &= f' = \frac{\partial f_x}{\partial y} = f_x + f_y \cdot f \\
y''' &= f'' = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \Big[\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big] \cdot f + f_y \Big[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Big] \\
&= f_{xx} + f_{xy} + f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + f_y^2 \cdot f \\
&= f_{xx} + 2\, f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_x \cdot f_y + {f_y}^2 \cdot f
\end{aligned}$$

Continuando dessa maneira, podemos expressar qualquer derivada de y em termos de $f(x,y)$ e suas derivadas parciais.

Se admitirmos que a série truncada (3) fornece uma boa aproximação para y em $x = x_0 + h$ então podemos calcular y em $x_0 + h$, recalcular as derivadas $y', y'', y'' \cdots$ em $x_0 + h$ e novamente usar (3) para obter o valor de y em $x = x_0 + 2h$. Continuando dessa maneira, teremos um conjuntos de valores $y_1, y_2, \cdots, y_n$ que serão aproximações para a solução do PVI nos pontos $x_i = x_0 + i\,h,\ i = 1, 2, cdots$.

Representando a solução exata no ponto x_i por $y(x_i)$ e a solução aproximada por y_i, temos o algoritmo de Taylor:

ALGORITMO DE TAYLOR DE ORDEM k:

- Calcula uma aproximação para a solução do PVI:

$$\begin{cases} y' &= f(x,y)\ , x\ \in\ [a,\ b] \\ y(a) &= y_a \end{cases}$$

1. Calcule $h = (b-a)/N,\ x_0 = a, x_j = x_0 + j \cdot h, x_N = b, N =$ No. de passos, $y(x_j) = y(x_0 + j\,h)$
2. Calcule aproximações y_j para $y(x_j)$ pela série de Taylor:

$$\begin{aligned}
y_{j+1} &= y_j + hy'_j + \frac{h^2}{2}y''_j + \cdots + \frac{h^k}{k!}y_j^{(k)} \\
y_{j+1} &= y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2}f'(x_j, y_j) + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_j, y_j)
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que o erro de truncamento do Algoritmo de Taylor de ordem k é dado por:

$$R_{k+1}(x_j) = \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(\epsilon, y(\epsilon))\ ,\ \text{onde } x_0 \le \epsilon\ \le\ x_j$$

MÉTODO DE EULER

Fazendo $k = 1$ no algoritmo de Taylor de ordem k, obtemos o método de Euler:

$$\begin{aligned}
y_{j+1} &= y_j + hf(x_j, y_j) \\
&= y_j + hy'_j
\end{aligned}$$

e $R_j = \frac{h^2}{2} y''(\epsilon)$

Exemplo: Seja o PVI:

$$\begin{cases} y' & = \frac{x-y}{x} \ , x \ \in \ [2, \ 2.3] \\ y(2) & = 2 \end{cases}$$

Pelo método de Euler, temos:

Seja $h = 0.1, \ x_0 = 2.0, \ N = 3.$

$y_0 = y(x_0) = 2$

$$\begin{aligned} y_1 = y(x_0 + h) + y(2.1) &= y(x_0) + hf(x_0, y_0) \\ &= 2.0 + 0.1 \frac{2.0 - 2.0}{2.0} = 2.0 \\ y_2 = y(x_0 + 2h) = y_1 + hf(x_1, y_1) &= y_1 + hf(2.1, 2.0) \\ &= 2.0 + 0.1 \frac{2.1 - 2.0}{2.1} = 2.00476 \\ y_3 = y(x_0 + 3h) = y_2 + hf(x_2, y_2) &= y_2 + hf(2.2, 2.00476) \\ &= 2.00476 + 0.1 \frac{2.2 - 2.00476}{2.2} = 2.01363 \end{aligned}$$

2. Métodos de Runge-Kutta

São métodos que tem erro de truncamento de ordem p sem a necessidade de calcular as derivadas parciais de $f(x, y)$. Basicamente, esses métodos se caracterizam por 3 propriedades:

1. São de passo 1
2. Coincindem com a série de Taylor de ordem p
3. Não exigem o cálculo das derivadas de $f(x, y)$. Ao invés disso, $f(x, y)$ é avaliada em vários pontos intermediários.

Método R-K 1a. ordem

Como vimos, o método de Euler foi obtido pela série de Taylor de ordem 1

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Pode-se ver fácilmente aque esse método satisfaz as 3 propriedades acima. Esse é um método de R-K de ordem 1

Método R-K de 2a. ordem

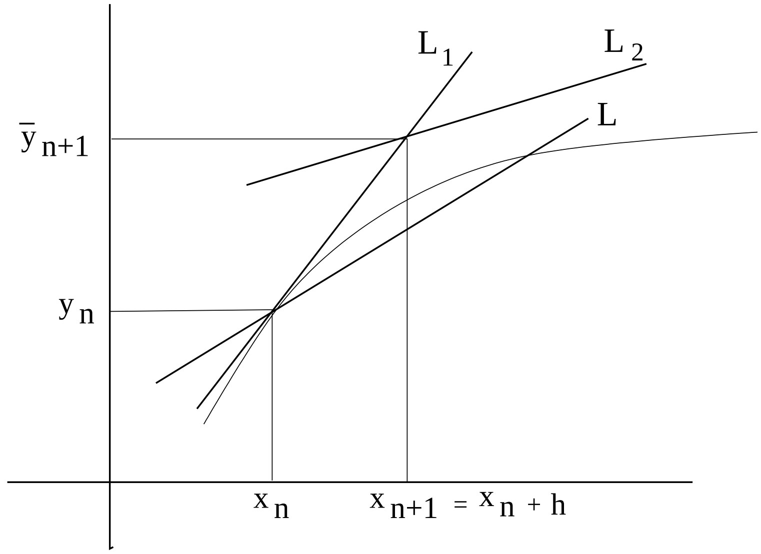

Fig. 1. Médodo Euler Modificado.

$$L_1 : z_1(x) = y_n + (x - x_n)y'_n = y_n + (x - x_n)f(x_n, y_n)$$

Assim, dado h, $z_1(x_{n+1}) = \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ (Mét. Euler).

$$\begin{aligned} P = (x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) &= (x_n + h, y_n + hy'_n) \\ L_2 : z_2(x) &= \bar{y}_{n+1} + (x - x_{n+1})y'_{n+1} \\ &= y_n + hy'_n + (x - (x_n + h))f(x_n + h, y_n + hy'_n) \end{aligned}$$

Se traçarmos uma reta pelo ponto x_n, que tem como inclinação a média aritmética das inclinações das retas L_1 e L_2 e computarmos o valor de y_{n+1} como sendo o valor de y em x_{n+1} dado por essa reta, teremos:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (x_{n+1} - x_n)\left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy'_n)}{2}\right] \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy'_n)\right], \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (4) \end{aligned}$$

O valor dado por (4) é conhecido como 'Método de Euler Modificado'.

Observamos que:

1. Esse método é de passo 1

2. Utiliza sómente $f(x, y)$

3. Para verificarmos que este é um método de R-K de 2a. ordem, precisamos mostrar que ele concorda com o método de Taylor até termos de ordem 2 em h, ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_x(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \tag{5}$$

com $e_{loc}(x_n = \frac{h^3}{3!} y'''(\epsilon(x_n))$

Logo, precisamos mostrar que (4) tem um erro de truncamento de ordem h^3.
Desenvolvendo $f(x, y)$ por Taylor em torno de x_n, y_n, temos:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_n, y_n) \quad + \quad & (x - x_n) f_x(x_n, y_n) + (y - y_n) f_y(x_n, y_n) + \frac{1}{2}\big[(x - x_n)^2 f_{xx}(\alpha, \beta) \\ & + 2(x - x_n)(y - y_n) f_{xy}(\alpha, \beta) + (y - y_n)^2 f_{yy}(\alpha, \beta)\big] \end{aligned}$$

onde $x \leq \alpha \leq x_n$ e $y \leq \beta \leq y_n$. Logo,

$$\begin{aligned} f(x_n + h, y_n + hy'_n) \quad &= \quad f(x_n, y_n) + hf_x(x_n, y_n) + hy'_n f_y(x_n, y_n) \\ & \quad + \frac{h^2}{2}\left[f_{xx}(\alpha, \beta) + 2y'_n f_{xy}(\alpha, \beta) + f_{yy}(\alpha, \beta) {y'}^2_n\right] \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo (6) em (4) vem:

$$\begin{aligned} y_{n+1} \quad = \quad & y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) + hf_x(x_n, y_n) \\ & + f_y(x_n, y_n) hy'_n + \frac{h^2}{2}\left[f_{xx}(\alpha, \beta) + 2f(x_n, y_n) f_{xy}(\alpha, \beta) + f_{yy}(\alpha, \beta) f^2(x_n, y_n)\right]\Big] \end{aligned}$$

que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} y_{n+1} \quad = \quad & \overbrace{y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right]} \\ & + \frac{h^3}{4}\left[f_{xx}(\alpha, \beta) + 2f(x_n, y_n) f_{xy}(\alpha, \beta) + f_{yy}(\alpha, \beta) f^2(x_n, y_n)\right] \end{aligned}$$

Logo, o método de Euler modificado concorda com o mét. da série de Taylor de ordem 2, mostrando assim ser um método de ordem 2.

Forma Geral dos Métodos R-K

Os métodos de R-K (explicitos) para a solução de eq. dif. ordinarias consiste em calcular valores aproximados $y_1, y_2, \cdots$, numa malha $x_j = x_0 + jh$, a partir da condição inicial $y_0 = y(x_0)$. Os valores de y_{j+1} são calculados recursivamente pela fórmula

$$y_{j+1} = y_j + h\left(\sum_{i=1}^{T} \alpha_i K_i\right), \quad j = 0, 1, \cdots \tag{7}$$

onde os coeficientes K_i são calculados por:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_j, y_j) \\ K_i &= f(x_j + h\mu_i, y_j + h\left(\textstyle\sum_{m=1}^{i-1} \lambda_{im} k_m\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Em (7) e (8) acima, os valores de α_i, μ_i e $\lambda_{im}, 1 \le m \le i-1, \quad 1 \le i \le T$, são parâmetros a serem escolhidos de maneira a fazer o método mais preciso possivel. O no. T determina o no. de estágios do método.

ALGUNS MÉTODOS RUNGE-KUTTA

1. Método de Euler (R-K 1a. ordem)

$$y_{j+1} = y_j + h\, f(x_j, y_j)$$

2. Método Euler modificado (R-K 2a. ordem)

$$\begin{aligned} &K_1 = f(x_j, y_j), \qquad K_2 = f(x_j + h, y_j + h\, K_1), \\ &y_{j+1} = y_j + \tfrac{h}{2}\big[K_1 + K_2\big] \end{aligned}$$

3. Método de Heun (R-K 2a. ordem)

$$\begin{aligned} &K_1 = f(x_j, y_j), \qquad K_2 = f(x_j + \tfrac{2}{3}h, y_j + \tfrac{2}{3}h\, K_1), \\ &y_{j+1} = y_j + \tfrac{h}{2}\big[K_1 + 3K_2\big] \end{aligned}$$

4. Método R-K 4a. ordem

$$\begin{aligned} &K_1 = f(x_j, y_j), \qquad K_2 = f(x_j + \tfrac{1}{2}h, y_j + \tfrac{1}{2}h\, K_1), \\ &K_3 = f(x_j + \tfrac{1}{2}h, y_j + \tfrac{1}{2}h\, K_2), \qquad K_4 = f(x_j + h, y_j + h\, K_3), \\ &y_{j+1} = y_j + \tfrac{h}{6}\big[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\big] \end{aligned}$$

EX: Considere o PVI abaixo:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{1+x^2} - 2\,y^2, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{sol. exata: } y(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Calcule $y(1)$ pelos seguintes métodos:
i) Mét. Euler
ii) Mét. de Euler Modificado
iii) Mét. de R-K 4a. ordem
SOLUÇÃO: Seja $h = 0.2$. Pelo Mét. de Euler temos:

$$y_{j+1} = j_j + h\,f(x_j, y_j), \qquad y_0 = 0.0$$
$$j = 0 : x_0 = 0.0, y_0 = 0.0$$
$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0) = 0.0 + 0.2\left[\tfrac{1.0}{1.0+0.2^2} - 2.0 * (0.0)\right] = 0.2000$$

$$j = 1 : x_1 = 0.2, y_1 = 0.2000$$
$$y_2 = y_1 + h\,f(x_1, y_1) = 0.2000 + 0.2\left[\tfrac{1.0}{1.0+0.0^2} - 2.0 * (0.2000)\right] = 0.3763$$

$$j = 2 : x_2 = 0.4, y_2 = 0.3763$$
$$y_3 = y_2 + h\,f(x_2, y_2) = 0.3763 + 0.2\left[\tfrac{1.0}{1.0+0.0^2} - 2.0 * (0.3763)\right] = 0.4921$$

$$j = 3 : x_3 = 0.6, y_3 = 0.4921$$
$$y_4 = y_3 + h\,f(x_3, y_3) = 0.4921 + 0.2\left[\tfrac{1.0}{1.0+0.0^2} - 2.0 * (0.4921)\right] = 0.5423$$

$$j = 4 : x_4 = 0.8, y_4 = 0.5423$$
$$y_5 = y_4 + h\,f(x_4, y_4) = 0.5423 + 0.2\left[\tfrac{1.0}{1.0+0.0^2} - 2.0 * (0.5423)\right] = 0.5466$$

Usando mét. Euler modificado obtemos:

$$y_{j+1} = j_j + \tfrac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \overline{y}_{j+1})\right], \overline{y}_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \qquad y_0 = 0.0$$
$$j = 0 : x_0 = 0.0, y_0 = 0.0$$
$$\overline{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.0 + 0.2\left[\tfrac{1.0}{1.0+0.2^2} - 2.0 * (0.2)\right] = 0.2000$$
$$f(x_0, y_0) = \left[\tfrac{1.0}{1.0+0.2^2} - 2.0 * (0.0)\right] = 1.0, \qquad f(x_1, \overline{y}_1) = \left[\tfrac{1.0}{1.0+0.2^2} - 2.0 * (0.20)\right] = 0.8815,$$
$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, \overline{y}_1)\right] = 0.0 + \tfrac{0.2}{2}\left[1.0 + 0.8815\right] = 0.18815$$

$$j = 1 : x_1 = 0.2, y_1 = 0.18815$$
$$\overline{y}_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.18815 + 0.2\left[\tfrac{1.0}{1.0+0.2^2} - 2.0 * (0.18815)\right] = 0.3663$$
$$f(x_1, y_1) = \left[\tfrac{1.0}{1.0+0.2^2} - 2.0 * (0.18815)\right] = 0.8907, \qquad f(x_2, \overline{y}_2) = \left[\tfrac{1.0}{1.0+0.4^2} - 2.0 * (0.0)\right] = 0.5937,$$
$$y_2 = y_1 + \tfrac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, \overline{y}_1)\right] = 0.18815 + \tfrac{0.2}{2}\left[0.8907 + 0.5937\right] = 0.3366$$

$$y_3 = 0.4308$$

$$y_4 = 0.4774$$

$$y_5 = 0.4911$$

3. Métodos de Passo Multiplo

Os métodos de passo simples requerem informação sobre a solução apenas em $x = x_n$ para achar a solução em $x = x_{n+1}$. Para isso, são necessários cálculos das derivadas de $f(x, y)$ em pontos intermediários. Por outro lado, os métodos de passo multiplo requerem informações sobre a solução em vários pontos.

Suponhamos que conhecemos a solução para $y(x)$ em $x_0, x_1, \cdots, x_n$, onde $x_{i+1} = x_i + h$. A idéia básica dos métodos de passo multiplo é baseada na integração da eqluação diferencial $y'(x) = f(x, y)$ de x_n até x_{n+1}, isto é,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \Longrightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx. \tag{9}$$

A integral em (9) pode ser calculada de várias maneiras como segue:

3.1 Métodos Explicitos

Estes métodos são derivados quando usamos as soluções em $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-m}$ para aproximarmos a integral acima. Aproximamos $f(x, y(x))$ por um polinomio de grau m, $p_m(x)$, que interpola $f(x, y(x))$ em $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-m}$. Logo,

$$y_{n+1} \approx y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_m(x)dx \tag{10}$$

Por exemplo, fazendo $m = 3$ na integral acima, aproximamos $f(x, y(x))$ por seu polinomio interpolador nos pontos $(x_n, f(x_n, y_n)), (x_{n-1}, f(x_{n-1}, y_{n-1})), (x_{n-2}, f(x_{n-2}, y_{n-2}))$ e $(x_{n-3}, f(x_{n-3}, y_{n-3}))$ e integramos $p_3(x)$ em $[x_n,\ x_{n+1}]$.

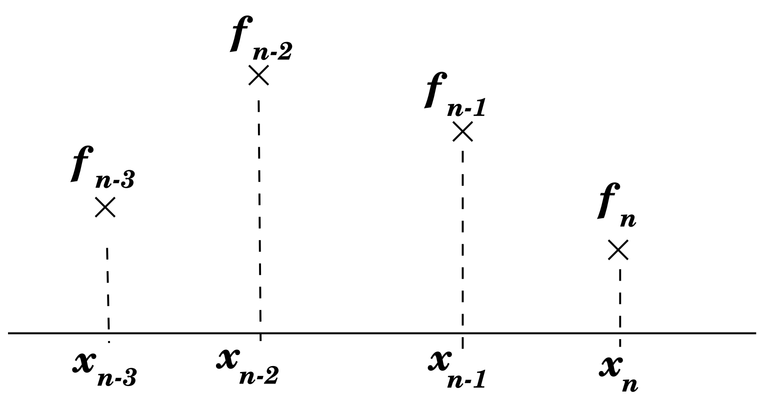

Fig. 1. Pontos usados no cálculo de $p_3(x)$.

Chamando $f_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j})$, teremos:

$$f(x, y(x)) = y'(x) \approx p_3(x) = L_{-3}(x)f_{n-3} + L_{-2}(x)f_{n-2} + L_{-1}(x)f_{n-1} + L_0(x)f_n$$

onde

$$L_{-3}(x) = \frac{(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)}{\underbrace{(x_{n-3}-x_{n-2})}_{-h}\underbrace{(x_{n-3}-x_{n-1})}_{-2h}\underbrace{(x_{n-3}-x_n)}_{-3h}} = \frac{-1}{6h^3}\left[(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)\right]$$

$$L_{-2}(x) = \frac{(x-x_{n-3})(x-x_{n-1})(x-x_n)}{\underbrace{(x_{n-2}-x_{n-3})}_{h}\underbrace{(x_{n-2}-x_{n-1})}_{-h}\underbrace{(x_{n-2}-x_n)}_{-2h}} = \frac{1}{2h^3}\left[(x-x_{n-3})(x-x_{n-1})(x-x_n)\right]$$

$$L_{-1}(x) = \frac{(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_n)}{\underbrace{(x_{n-1}-x_{n-3})}_{2h}\underbrace{(x_{n-1}-x_{n-2})}_{h}\underbrace{(x_{n-1}-x_n)}_{-h}} = \frac{-1}{2h^3}\left[(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_n)\right]$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{\underbrace{(x_n-x_{n-3})}_{3h}\underbrace{(x_n-x_{n-2})}_{2h}\underbrace{(x_n-x_{n-1})}_{h}} = \frac{1}{6h^3}\left[(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})\right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_{n+1} \approx & \int_{x_n}^{x_{n+1}} (L_{-3}(x)f_{n-3} + L_{-2}(x)f_{n-2} + L_{-1}(x)f_{n-1} + L_0(x)f_n)dx = y_n + \\ & f_{n-3}\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{-3}(x)dx + f_{n-2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{-2}(x)dx f_{n-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{-1}(x)dx + f_n\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_0(x)dx \end{aligned} \quad (11)$$

Calculando essas integrais vem:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{-3}(x)dx = \frac{-1}{6h^3}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)dx$$

Introduzindo a mudança de variáveis: $\frac{x-x_n}{h} = u \quad \Longrightarrow \quad x = uh + x_n, dx = hdu$ temos:

$$\begin{cases} x - x_{n-3} = uh + x_n - x_{n-3} = uh + 3h = (u+3)h \\ x - x_{n-2} = uh + x_n - x_{n-2} = uh + 2h = (u+2)h \\ x - x_{n-1} = uh + x_n - x_{n-1} = uh + h = (u+1)h \end{cases}.$$

Logo, a integral acima se reduz a:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{-3}(x)dx &= \frac{-1}{6h^3}\int_0^1 (u+2)h(u+1)huhdu \\ &= \frac{-1}{6h^3}\int_0^1 (u^3+3u^2+2u)du = \frac{-h}{6}\left[\frac{u^4}{4} + \frac{3u^3}{3} + \frac{3u^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{-h}{6}(1/4+1+1) = \frac{-h}{6}(1/4+2) = \frac{-h}{6}(9/4) = \frac{-9h}{24} \end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{-2}(x)dx &= \tfrac{1}{2h^3}\textstyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_{n-3})(x-x_{n-1})(x-x_n)dx = \tfrac{1}{2h^3}\textstyle\int_0^1 (u+3)(u+1)udu \\ &= \tfrac{h}{2}\textstyle\int_0^1 (u^3+4u^2+3u)du = \tfrac{h}{2}\left[\tfrac{u^4}{4} + \tfrac{4u^3}{3} + \tfrac{3u^2}{2}\right]_0^1 = \tfrac{h}{2}\left[1/4+4/3+2/3\right] = \tfrac{37}{24}h \end{aligned}$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{-1}(x)dx = \frac{-1}{2h^3}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_n)dx = \frac{59}{24}h$$

e

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_0(x)dx = \frac{1}{6h^3}\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})dx = \frac{55}{24}h$$

Substituindo o valor dessas integrais em (11) obtemos:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{9h}{24}f_{n-3} + \frac{37h}{24}f_{n-2} - \frac{59h}{24}f_{n-1} + \frac{55h}{24}f_n$$

ou seja

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right]$$

4. Sistema de equações e equações de ordem superior

Em muitas aplicações práticas, é necessário obter a solução de um sistema de equações diferencias de 1a. ordem em várias variáveis. Os problemas de valor inicial para esses sistemas de equações podem ser expressos na forma:

$$(I)\quad \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)), & y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)), & y_2(x_0) = y_{20}, \\ y_3'(x) = f_3(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)), & y_3(x_0) = y_{30}, \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)), & y_n(x_0) = y_{n0}, \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma vetorial, definindo:

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) = \begin{bmatrix} f_1(x, \mathbf{Y}(x)) \\ f_2(x, \mathbf{Y}(x)) \\ f_3(x, \mathbf{Y}(x)) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{Y}(x)) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}_0(x) = \begin{bmatrix} y_{10}(x) \\ y_{20}(x) \\ y_{30}(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n0}(x) \end{bmatrix}.$$

Com essa notação, o sistema (I) pode ser escrito na forma:

$$(II)\quad \begin{cases} \mathbf{Y}_0'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)), \\ \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases}.$$

Observamos que os métodos vistos até agora para resolver problemas de valor inicial (métodos da série de Taylor, Runge-Kutta, multi-passo) podem ser facilmente aplicados para resolver um sitema de equações diferenciais de 1a. ordem dado por (II).

4.1 Transformação de um sistema PVI de ordem K em um sistema de EDO's

Um problema de valor inicial de ordem K tem a seguinte forma:

$$(III)\quad \begin{cases} y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{k-1}(x)),\ a \le x \le b \\ y^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)}\ , \quad 0 \le j \le k-1 \end{cases}$$

Por exemplo, um PVI de ordem 2 tem a forma:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)),\ a \le x \le b \\ y(x_0) = y_0\ , \qquad y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

ex:

$$\begin{cases} y''(x) = y\, y' + (y')^2 + x \sin(x),\ 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0\ , \qquad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Equação (III) pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais 1a. ordem fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad y_3(x) = y''(x), \quad y_k(x) = y^{(k-1)}(x).$$

Com essas definições, montamos o seguinte sistema de EDO's 1a. ordem:

$$(IV) \begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & y_1(x_0) = y_0, \\ y_2'(x) = y_3(x), & y_2(x_0) = y_0', \\ \vdots & \\ \vdots & \\ y_k'(x) = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_k), & y_k(x_0) = y_0^{(k-1)}. \end{cases}$$

Podemos escrever o sistema acima (Eq. (IV)) na forma vetorial dada pela Eq. (II), definindo:

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_k(x) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} y_0(x_0) \\ y_0'(x_0) \\ y_0''(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_k(k-1)(x_0) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x, y_1, y_2, \cdots, y_k) \end{bmatrix}.$$

Com essa notação, o sistema (IV) toma a forma da Eq. (II), ou seja:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_0'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)), \\ \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases}.$$

4.2 Solução de um PVI de 2a. ordem pelo método de Euler

Considere o PVI de 2a. ordem:

$$(A) \begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = y_a, \\ y'(a) = y_a' \end{cases}$$

Transformando esse PVI em um sistema de duas eqs. de 1a. ordem, vem:

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) & \Longrightarrow \; y_1'(x) = y_2, & y_1(a) = y_a \\ y_2(x) = y'(x) & \Longrightarrow \; y_2'(x) = f(x, y_1, y_2), & y_2(a) = y_a' \end{cases}$$

Fazendo

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} y_a \\ y_a' \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ f(x, y_1, y_2) \end{bmatrix},$$

o PVI dado pela Eq. (A) se transforma em:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)), \quad a \le x \le b \\ \mathbf{Y}(a) = \mathbf{Y}_0 \end{cases}.$$

Dado $h = (b-a)/N$, $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \cdots, N$, a solução desse PVI pelo método de Euler fornece:

$$\mathbf{Y}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + h\,\mathbf{F}(x_j, \mathbf{Y}_j), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

onde $\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} (y_1)_j \\ (y_2)_j \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(x_j, \mathbf{Y}_j) = \begin{bmatrix} (y_2)_j \\ f(x_j, (y_1)_j, (y_2)_j) \end{bmatrix}$