Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME300 - Cálculo Numéricos
Prof. Murilo Tomé **2º sem/2012**

4ª **Lista de Exercícios:**

1. A raiz de uma função pode ser aproximada pela raiz do seu polinômio de interpolação. Use uma parábola para determinar a raiz da função tabelada a seguir,

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.841	0.909	0.141	-0.757	-959	-0.279

2. Use uma parábola para determinar uma aproximação para a única raiz positiva da equação $4\cos(x) - e^x = 0$.

3. Uma maneira de se calcular o valor da derivada de uma função em um ponto x_0, quando não se conhece a expressão analítica da mesma, é usar uma tabela para formar um polinômio que aproxime a função, derivar então esse polinômio e avaliar sua derivada em $x = x_0$. Dada a tabela:

x	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65
$f(x)$	-1.52	1.51	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39

calcule um valor aproximado para $f'(0.50)$ usando polinômio de interpolação de grau 2.

4. Dada a tabela

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\ln(x)$	-2.303	-1.609	-1.204	-0.916	-0.693

a) Estimar $\ln(0.32)$ através de interpolação linear e quadrática.

b) Qual deve ser o valor de h, se queremos obter $\ln(x)$, com 3 casas decimais corretas, para $x \geq 1$, através de interpolação linear usando uma tabela para argumentos x_i igualmente espaçados de h ?

5. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$–pontos distintos e seja $l_k(x)$ o k-ésimo polinómio de Lagrange definido por: $l_k(x) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$. Mostre que para $n \geq 1$ tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k l_k(x) = x, \ \forall x \ \in \ \mathbf{R}$$

6. Sabendo que $f(-1) = -1, f(1) = 1$ e $f(2) = 17$, obtenha o valor aproximado de $f(0)$ utilizando o polinômio interpolador nos pontos dados.

   Sabe-se que $|f^j(x)| < (\frac{1}{3})^j, \; \forall\, x \in [-1, 2]$. Determine um majorante para o erro cometido quando aproximamos $f(0)$ por $P_2(0)$.

7. De uma tabela são extraídos os valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	-1	2	4

   Usando o **MMQ** ajuste os dados acima por polinômio de grau adequado. Sugestão: faça um gráfico.

8. Considere a tabela:

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

   - Pelo **MMQ**, ajuste à tabela as funções:

   $$g_1(x) = ax^2 + bx; \qquad g_2(x) = cx^2 + d$$

   - Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.

9. Achar aproximação dos mínimos quadrados da forma:

   $$g(x) = ae^x + be^{-x}$$

   correspondente aos dados:

x_i	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
y_i	5.02	5.21	6.49	9.54	16.02	24.53

10. Usando **MMQ** aproxime a função $f(x) = x^5 - x^4$ no intervalo [-1,1], por uma parábola, usando os polinômios de Legendre (considerar $g(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$ onde $L_1(x), L_2(x)$ são os polinômios de Legendre de graus 1 e 2, respectivamente).

    Obs: Os polinômios de Legendre

    $$L_n(x) = \frac{1}{2^n.n!} \quad \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n; \quad L_0(x) = 1$$

    são ortogonais segundo o produto escalar:

    $$(L_i(x), L_j(x)) = \int_{-1}^{1} L_i(x) L_j(x) dx$$

    Além disso satisfazem:

    $$\int_{-1}^{1} {L_n}^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

11. Físicos querem aproximar os seguintes dados:

x	0.1	0.5	1.0	2.0
$f(x)$	0.13	0.57	1.46	5.05

usando a função $ae^{bx} + c$. Eles acreditam que $b \simeq 1$.

- Calcule os valores de a e c pelo **MMQ**, assumindo que b = 1.
- Use os valores de a e c obtidos em 10.1) para estimar o valor de b.

12. Considere a tabela:

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	1.1	2.1	3.2	4.4	5.8

Ajuste os pontos acima por uma função do tipo $x \ln(ax + b)$, usando o **MMQ** .

13. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$f(x_i)$	2.10	2.40	2.1	0.9	0.1

(a) Obtenha a função g da forma $g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x)$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine para essa função

$$Q = \sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - g(x_i)]^2$$

(b) Seja $Q_1 = \sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - a\cos(x_i)]^2$. Com base no ítem anterior, justifique que $Q_1 > Q, \forall\ a\ \in\ \mathbf{R}$.