

2ª Lista de Exercícios: Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

1. Supomos que o sistema

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 & = c_1 \\ -\alpha x_1 + x_2 - \alpha x_3 & = c_2 \\ -\alpha x_2 + x_3 & = c_3 \end{cases}$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = \alpha(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_3 \end{cases}$$

Para que valores de α a convergência do método definido acima é garantida? Justifique.

2. Um processo iterativo para resolver sistemas de equações do tipo $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ é assim definido:

- somar $I\mathbf{x}$ a ambos os membros, obtendo $(I + A)\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{x}$
- realizar iterações a partir de $x^{(0)}$ fazendo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I + A)\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \quad (1)$$

- Dê uma condição suficiente que assegure a convergência deste processo iterativo.
- Mostre que o método iterativo definido por (1) aplicado ao sistema abaixo converge. Tome $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ e calcule iterações até que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k+1}\|_\infty < 10^{-4}$.

$$\begin{cases} -1.1x_1 + 0.1x_2 = 1 \\ 0.3x_1 - 0.3x_2 = 0 \end{cases}$$

3. Considere cada um dos seguintes sistemas de 3 equações:

$$(I) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 18 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 10 \\ 10x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 27 \end{cases} \quad ; \quad (II) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

- Sem rearranjar as equações, tente achar as soluções iterativamente, usando os métodos de Jacobi, começando com $x^{(0)} = (1.01, 2.01, 3.01)^t$.
- Rearranje as equações de tal modo que satisfaçam os critérios de convergência e repita o que foi feito em 21.1).
- Verifique suas soluções nas equações originais.

4. Uma maneira de se obter a solução da equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em uma região retangular consiste em se proceder a uma discretização que transforma a equação em um problema aproximado consistindo em uma equação de diferenças cuja solução, em um caso particular, exige a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O método de Jacobi pode ser aplicado com garantia de convergência? Caso afirmativo, calcule iteradas $\mathbf{x}^{(k+1)}$ até que $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$.

5. Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Prove que está garantida a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução do sistema, independentemente da aproximação inicial escolhida.
- Com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = [1 \ 1 \ 1]^T$, obtenha o vetor $\mathbf{x}^{(1)}$ pelo método de Gauss-Seidel e calcule uma estimativa do erro $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}\|_\infty$.

6. Considere a resolução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$, $c \in R$ e \mathbf{x} e \mathbf{d} vetores de R^3 .

- Mostre que se $|c| < 1/2$ o método de Jacobi é convergente, independentemente da iterada inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, e é válida a seguinte fórmula do erro:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{2|c|}{1 - 2|c|} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty$$

- Faça $c = 1/5$ e $\mathbf{b} = [2 \ 1 \ 2]^T$. Tomando para iterada inicial $[2 \ 0 \ 2]^T$, efetue uma iteração pelo método de Jacobi.

7. Verificar se o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é convergente. Caso afirmativo, obter a solução com precisão $\epsilon = 10^{-2}$.

EXERCICIOS EXTRAS EXTRAIDOS DE PROVAS ANTERIORES

1. [1.0] Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Sabendo-se que } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & c_{12} & 1/2 \\ 1/12 & c_{22} & 1/4 \\ 1/2 & c_{32} & -1/2 \end{bmatrix},$$

calcule a 2ª coluna de A^{-1} pelo método de eliminação de Gauss.

2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y & = -1 \\ x - 3y & = 0 \\ y + 3z & = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

- i) [1.0] Prove que o método de Jacobi aplicado a esse sistema linear converge para a solução do mesmo independente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.
- ii) [1.0] Tome $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ e mostre que as iteradas satisfazem a desigualdade: $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)}$
- iii) [1.5] Mostre que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema acima converge e calcule $\mathbf{x}^{(2)}$. Forneça uma estimativa para erro cometido na iterada $\mathbf{x}^{(2)}$.