SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 29

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

28 de junho de 2018

Aula Passada

Transformada de Laplace

$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0$; $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$; $\mathcal{L}\left[e^{ct}\right] = \frac{1}{s-c}, s > c$;

$\mathcal{L}[\text{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2}, s > 0$; $\mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2+w^2}, s > 0$;

Com $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a), s > s_0 + a;$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s); \quad \mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Aplicação em Sistemas de EDs.

Outras Propriedades

Produto de Convolução: Sejam $f(t)$ e $g(t)$ definidas para $t \geq 0$. Então o Produto de Convolução de f por g, indicado por $f * g$, é definido por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Propriedades do Produto de Convolução:

(a) $f * g = g * f$,

(b) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(c) $f * 0 = 0$,

(d) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Propriedade 5: $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\,\mathcal{L}[g(t)]$.

Outras Propriedades (cont.)

Exemplo: Calcule $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, $F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$.

Solução:

$$F_1(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = e^t, \ t \geq 0;$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = 1, \ t \geq 0;$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = (f_1 * f_2)(t) =$$

$$= \int_0^t (e^\tau)\,(1)\, d\tau = e^\tau\Big|_0^t =$$

$$= e^t - 1, \ t \geq 0.$$

Outras Propriedades (cont.)

Seja a função **degrau unitário** ou função de **Heaviside**

$$\mu_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c, \\ 1, & \text{se } t \geq c. \end{cases}$$

Então

$$\mathcal{L}[\mu_c(t)] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \mu_c(t)\, dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_c^b e^{-st}\, dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.$$

Outras Propriedades (cont.)

Função Periódica: a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *periódica* se $f(t+p) = f(t)$, para qualquer t.

Propriedade 7: Se f é função contínua por partes, de ordem exponencial e periódica de período p, então

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$

Nota: Para $A = (k+1)p$:

$$\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{k} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)\, dt = \qquad (t = u + np)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} e^{-snp} \int_0^p e^{-su} f(u)\, du. \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{k} e^{-nsp} = \frac{1-e^{-s(k+1)p}}{1-e^{-sp}}}$$

Outras Propriedades (cont.)

Se temos uma função $f(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, então

$$\mu_c(t)\, f(t-c) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c; \\ f(t-c), & \text{se } t \geq c. \end{cases}$$

Propriedade 6:

$$\mathcal{L}[\mu_c(t) f(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)].$$

Propriedade útil no cálculo de PVIs quando um sinal é *ligado* após um tempo $t = c$.

Função pulso quadrado: $q_a(t) = \mu_a(t) - \mu_{a+c}(t)$.

$$\mathcal{L}[q_a(t)] = \mathcal{L}[\mu_a(t)] - \mathcal{L}[\mu_{a+c}(t)]$$

Exemplo: Resposta a Impulso

Exemplo: Um corpo de massa $m = 2$ kg está preso a uma mola com constante $k = 8\,\text{kg/s}^2$ e em repouso. Determine a resposta do sistema massa-mola a um impulso causado por uma força (praticamente) instantânea de amplitude $F = 2\,\text{N}$ no tempo $t = \pi$.

Este problema pode ser descrito pelo modelo

$$\begin{cases} m\,y'' + k\,y = F\delta(t-\pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases},$$

onde $y(t)$ é a posição do corpo em relação à sua posição em repouso e $\delta(t)$ representa a aplicação “instantânea” da força:

$$\delta(t-c) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{\mu_c(t) - \mu_{c+\varepsilon}(t)}{\varepsilon} \right]$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{\mathcal{L}[\mu_c(t)] - \mathcal{L}[\mu_{c+\varepsilon}(t)]}{\varepsilon} \right]$$

Outras Propriedades (cont.)

Exercício: Solução $y(t)$ do PVI

$$\begin{cases} y'' + 4y = \delta(t-\pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

com $\delta(t-c) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\dfrac{\mu_c(t) - \mu_{c+\varepsilon}(t)}{\varepsilon} \right]$ (Delta de Dirac).

Esboce o gráfico de $y(t)$.

Dica: $\lim_{m \to 0} \left[\dfrac{1 - e^{-ms}}{m} \right] = s.$

Solução:

$$y(t) = \frac{\mu_\pi(t)\,\text{sen}\,(2\,(t-\pi))}{2}, \quad t \geq 0$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ \frac{\text{sen}(2(t-\pi))}{2}, & \text{se } t \geq \pi \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < \pi, \\ \frac{\text{sen}(2t)}{2}, & \text{se } t \geq \pi. \end{cases}$$

AVISOS

- **NÃO** HAVERÁ AULA NO DIA 03/07.
- Lista 7 está no site.
- Provinha 6 no dia 05/07 (quinta-feira), às 16:20.
- Será fornecida tabela com transformadas e propriedades durante a provinha.