SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 26

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

19 de junho de 2018

Transformada Inversa

Dada uma função $F(s)$, definida em um intervalo (a, ∞), como encontrar uma função $f(t)$ tal que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$?

Chamamos essa função $f(t)$ de **Transformada Inversa** de $F(s)$ e a indicamos por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Assim temos, para $t \geq 0$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-c}\right] = e^{ct}; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!};$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+w^2}\right] = \cos(wt); \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w}{s^2+w^2}\right] = \operatorname{sen}(wt),$$

e o inverso das Propriedades 1, 2 e 3.

Aula Passada

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0; \quad \mathcal{L}\left[e^{ct}\right] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2+w^2}, s > 0;$$

Com $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a), s > s_0 + a;$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s);$$

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Exemplos.

Transformada Inversa (cont.)

Decomposição em Frações Parciais:

Decompor uma fração $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios em s com grau de P menor que o grau de Q, em soma de frações parciais.

Iniciamos decompondo o polinômio $Q(s)$ em polinômios menores com coeficientes reais e graus sendo os menores possíveis.

Então reescrevemos a fração como uma soma de frações onde os denominadores são os polinômios decompostos.

Por exemplo, $\dfrac{1}{s^2+2s} = \dfrac{1}{s(s+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2}\right).$

Transformada Inversa (cont.)

Como determinar os numeradores? Um exemplo.

Se temos $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{s-c} =$$
$$= \frac{A(s-b)(s-c) + B(s-a)(s-c) + C(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Determinemos A, B, C.
Comparando os numeradores – desprezando os denominadores iguais – obtemos

$$1 = A(s-b)(s-c) + B(s-a)(s-c) + C(s-a)(s-b).$$

Se $s = a$, obtemos $A = 1/[(a-b)(a-c)]$;
se $s = b$, $B = 1/[(b-a)(b-c)]$;
se $s = c$, $C = 1/[(c-a)(c-b)]$.

Transformada Inversa (cont.)

Exemplo: Decomponha a seguinte função em frações parciais: $F(s) = \dfrac{4}{(s-1)\left(s^2+3\right)}$.

Solução: O denominador está decomposto em polinômios irredutíveis; então,

$$F(s) = \frac{4}{(s-1)\left(s^2+3\right)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+3} = \cdots \Rightarrow$$
$$4 = A\left(s^2+3\right) + (Bs+C)(s-1)$$
$$s = 1: \quad 4A = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 1}$$
$$4 = \left(s^2+3\right) + (Bs+C)(s-1) = (1+B)s^2 + (C-B)s + (3-C)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1+B=0 \\ C-B=0 \\ 3-C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B=-1} \\ C=B \\ \mathbf{C=-1} \end{cases} \quad (\mathbf{V}) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+3}.$$

Transformada Inversa (cont.)

Para **fatores repetidos** (exemplo: $(s-a)^3$) ou **polinômios não fatoráveis** (exemplo: $s^2+a^2,\ a \neq 0$), consideramos o grau possível do numerador como *um grau menor* que o denominador.

Se temos $\dfrac{1}{s(s-a)^3}$, então

$$\frac{1}{s(s-a)^3} = \frac{A}{s} + \frac{Bs^2+Cs+D}{(s-a)^3} = \frac{A(s-a)^3 + Bs^3 + Cs^2 + Ds}{s(s-a)^3}$$

e determinamos A, B, C, D.

Também,

$$\frac{1}{s\left(s^2+a^2\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+a^2} = \frac{A\left(s^2+a^2\right) + Bs^2 + Cs}{s\left(s^2+a^2\right)}$$

e determinamos A, B, C.

Transformada Inversa (cont.)

Quando temos denominador na forma s^2+as+b sem raízes reais, podemos *completar o quadrado* e reescrever.

Exemplo: Decomponha $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2+2s+5}$ em frações parciais *convenientes*.

Solução: O denominador s^2+2s+5 pode ser escrito como $s^2+2s+1+4 = (s+1)^2+4 = (s+1)^2+2^2$. Então

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}.$$

Podemos calcular agora $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Transformada Inversa (cont.)

Exercício: Calcule $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$,

$$F(s) = \frac{4\,s^3 - 40\,s^2 + 128\,s - 130}{s^4 - 10\,s^3 + 26\,s^2},$$

indicando as propriedades ($P1$, $P2$, $P3$) utilizadas.
(Não esqueça de apresentar o intervalo de t.)

Solução:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = 3 - 5\,t + \mathrm{e}^{5\,t}\cos(t), \quad t \geq 0.$$