

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 24

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa@icmc.usp.br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

12 de junho de 2018



Integrais Impróprias



Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq a$ tal que exista a integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

qualquer que seja $b > a$.

Definição: A **integral imprópria** de f é definida por

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt;$$

caso o limite exista e seja finito, f é integrável no sentido impróprio em $[a, +\infty)$ ou a integral imprópria é **convergente**. Caso contrário, a integral imprópria é **divergente**.

Aula Passada



Sistemas de EDs

- ▶ Sistemas Lineares Não Homogêneos:

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

- ▶ Método dos Coeficientes a Determinar (MCD);
- ▶ Método de Variação dos Parâmetros (MVP):

$$\vec{x}_p(t) = X(t)\vec{u}(t), \quad X(t)\vec{u}'(t) = \vec{g}(t)$$

- ▶ Exemplos.

Integrais Impróprias (cont.)



Exemplo: Determine se as seguintes integrais impróprias são convergentes ou divergentes:

(a) $\int_0^\infty e^{-2t} dt \Rightarrow \text{CONVERGENTE}$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-2b}}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}.$$

(b) $\int_1^\infty \frac{dt}{t} \Rightarrow \text{DIVERGENTE}$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dt}{t} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln|t|]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(b) - 0] = \infty.$$

Integrais Impróprias (cont.)



Exemplo: Mostre que a integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Solução: Podemos escrever

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b, & \text{se } p \neq 1; \\ \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^b, & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Então, se $p = 1$, a integral é *divergente* (ver exemplo anterior); se $p \neq 1$, temos dois casos:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1-b^{-(p-1)}}{p-1} \right] = \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1 \Rightarrow \textit{convergente}; \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{b^{1-p}-1}{1-p} \right] = \infty, & \text{se } p < 1 \Rightarrow \textit{divergente}. \end{cases}$$

Então mostramos *convergência* para $p > 1$ e *divergência* para $p \leq 1$.

Transformada de Laplace (cont.)



(2) $f(t) = t, t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2} \right]_0^b = \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - e^{-sb}(sb+1)}{s^2} \right] = \frac{1}{s^2}$$

para $s > 0$.

(3) $f(t) = \text{sen}(wt), t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen}(wt) dt = \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-st}(w \cos(wt) + s \text{sen}(wt))}{s^2 + w^2} \right]_0^b = \frac{w}{s^2 + w^2}, s > 0.$$

Transformada de Laplace



Vamos trabalhar com integrais impróprias da forma

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

com o domínio de $F(s)$ sendo valores de s onde a integral é *convergente*.

Vejamos alguns exemplos/casos para valores de $f(t)$ e $F(s)$ correspondentes.

(1) $f(t) = 1, t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - e^{-sb}}{s} \right] = \frac{1}{s}$$

para $s > 0$. A integral é divergente para $s \leq 0$.

Transformada de Laplace (cont.)



(4) $f(t) = \cos(wt), t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(wt) dt = \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}(w \text{sen}(wt) - s \cos(wt))}{s^2 + w^2} \right]_0^b = \frac{s}{s^2 + w^2}, s > 0.$$

(5) $f(t) = e^{ct}, t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ct} dt = \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-(s-c)t}}{s-c} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - e^{-(s-c)b}}{s-c} \right] = \frac{1}{s-c}, s > c.$$

Transformada de Laplace (cont.)



Definição: a função $F(s)$, definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

com $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$, é chamada de **Transformada de Laplace** de $f(t)$, e é denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$.

Então, de acordo com os exemplos anteriores, temos

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[e^{ct}] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2 + w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\text{cos}(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2}, s > 0.$$

Transformada de Laplace (cont.)



Propriedades:

1. (Linearidade) Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ e a, b são constantes, então

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s) = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)].$$

2. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > s_0$, então

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \text{ para } s > s_0 + a.$$

3. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Note:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial s^n} (e^{-st}) f(t) dt.$$

Transformada de Laplace (cont.)



Se n é inteiro positivo, então, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[t^n] = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^n dt =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st} t^n}{s} \Big|_0^b + \frac{n}{s} \int_0^b e^{-st} t^{n-1} dt \right] =$$

$$= \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}[t^{n-2}] = \dots = \frac{(n)(n-1)\dots(2)}{s^{n-1}} \mathcal{L}[t] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Transformada de Laplace (cont.)



Exemplos:

(1) $\mathcal{L}[e^{-t} \cos(3t)]$

$$f(t) = \cos(3t) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}[\cos(3t)] = s/(s^2 + 3^2), s > 0.$$

$$\mathcal{L}[e^{-t} \cos(3t)] \stackrel{P2}{=} F(s+1) = (s+1)/[(s+1)^2 + 9], s > -1.$$

(2) $\mathcal{L}[e^{2t} t^2]$

$$\mathcal{L}[e^{2t} t^2]: \mathcal{L}[t^2] = F(s) = 2/s^3, s > 0.$$

$$\mathcal{L}[e^{2t} t^2] \stackrel{P2}{=} F(s-2) = 2/(s-2)^3, s > 2.$$

$$\mathcal{L}[t^2 e^{2t}]: \mathcal{L}[e^{2t}] = F(s) = 1/(s-2), s > 2.$$

$$\mathcal{L}[t^2 e^{2t}] \stackrel{P3}{=} F''(s) = 2/(s-2)^3, s > 2.$$