SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 16

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

26 de abril de 2018

MCD: Exercício

Exercício: Determine a solução particular $y_P(t)$ de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 2\,t^3 + 3\,t^2 - 30\,t$$

Obs: Não é necessário aplicar o Princípio da Superposição no tipo polinomial.

Solução:

$$y_P(t) = t^3 + 6\,t^2 - 6, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aulas Anteriores

EDs de Segunda Ordem

- EDs Lineares Não Homogêneas:
$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t)$$
- Método dos Coeficientes a Determinar (MCD): *Observar, Deduzir, Calcular*
$$y'' + a\,y' + b\,y = g(t),$$
com $g(t)$ *polinomial*, *exponencial*, *trigonométrico*, *misto* (poli,trig,exp), *combinação linear*
- Método de Variação dos Parâmetros (MVP): dadas soluções LI $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da ED homogênea correspondente,
$$y_P(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t),$$
$$\begin{cases} u_1'(t)\,y_1(t) + u_2'(t)\,y_2(t) = 0 \\ u_1'(t)\,y_1'(t) + u_2'(t)\,y_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

Aula Passada

Exemplo: Determinar a solução particular $y_P(t)$ de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = e^t$$

sabendo que $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{2\,t}$, $t \in \mathbb{R}$, são soluções da ED homogênea correspondente.

Solução: (na lousa)

$$y_P(t) = -(t+1)\,e^t, \; t \in \mathbb{R}.$$

EDs de Ordem Superior

Para determinar a solução geral da equação diferencial linear de ordem n

$$y^{(n)} + b_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + b_2(t)\,y'' + b_1(t)\,y' + b_0(t)\,y = g(t)$$

com funções contínuas $b_j(t), j = 0, \ldots, n-1$, $g(t)$ para $t \in I$, vamos *generalizar* os teoremas, as definições e os métodos de ordem 2 para casos com ordem n.

O teorema a seguir generaliza os teoremas necessários para obter a solução geral da ED.

EDs de Ordem Superior (cont.)

Vamos somente trabalhar com EDs de ordem n, $n \geq 2$, que possuem *coeficientes constantes*.

Para determinar as soluções LI da ED homogênea

$$y^{(n)} + b_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + b_2\,y'' + b_1\,y' + b_0\,y = 0,$$

com $b_0, \ldots, b_{n-1}$ constantes, podemos aplicar o *Método Geral para coeficientes constantes*.

Adaptado para ordens superiores a 2, o método consiste em reescrever a ED de ordem n como um conjunto de n equações diferenciais de ordem um, que podem ser resolvidas em sequência para obter a solução geral $y(t)$ da ED de ordem n.

Exemplo: Como reescrever a ED

$$y''' - 6\,y'' + 11\,y' - 6\,y = 0?$$

EDs de Ordem Superior (cont.)

Teorema: Para a ED

$$y^{(n)} + b_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + b_2(t)\,y'' + b_1(t)\,y' + b_0(t)\,y = g(t)$$

com $b_0(t), \ldots, b_{n-1}(t)$ e $g(t)$ funções contínuas em I:

- O conjunto de todas as soluções da ED homogênea correspondente é um espaço vetorial de dimensão n, isto é, a ED possui n soluções LI.
- Sejam $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ soluções da ED homogênea. Estas funções são LI se e somente se o *Wronskiano* de $y_1, \ldots, y_n$ é não nulo para algum $t_0 \in I$.
- Se $y_P(t)$ é uma solução particular da ED não homogênea e $y_1, \ldots, y_n$ são soluções LI da ED homogênea, então a solução geral $y(t)$ é

$$y(t) = y_P(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j\,y_j(t), \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

EDs de Ordem Superior (cont.)

Para aplicar o Método Geral, precisamos determinar *pelo menos uma* raiz do polinômio

$$r^n + b_{n-1}\,r^{n-1} + \ldots + b_1\,r + b_0 = 0,$$

que possui n raízes r_j (reais ou complexas):

$$(r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_{n-1})(r - r_n) = 0.$$

Métodos para obter raízes de polinômios:

- Se os coeficientes são *inteiros*, suas prováveis raízes são tais que:

$$b_{n-1} = -\sum_{j=1}^{n} r_j; \quad b_0 = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} r_j;$$

- Algoritmo de Briot-Ruffini (com uma raiz r_1);
- Raiz n-ésima de um número complexo $z = \alpha\,e^{i\,\theta}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\alpha}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\right)\right], \; k = 0, \ldots, n-1$$

EDs de Ordem Superior (cont.)

Exemplo: Decompor a ED

$$y''' - 6\,y'' + 11\,y' - 6\,y = 0$$

pelo Método Geral.

Solução: (na lousa)

$$\begin{cases} w' - w = 0 \\ w(t) = z' - 2\,z \\ z(t) = y' - 3\,y \end{cases} ; \begin{cases} w' - 3\,w = 0 \\ w(t) = z' - z \\ z(t) = y' - 2\,y \end{cases} ; \begin{cases} w' - 3\,w = 0 \\ w(t) = z' - 2\,z \\ z(t) = y' - y \end{cases} ; \quad \ldots$$

EDs de Ordem Superior (cont.)

Método dos Coeficientes a Determinar: o método é aplicado similarmente aos casos para EDs de ordem 2. A modificação está no caso *polinomial*.

Com o aumento no número de derivadas de y (até ordem n), se

$$g(t) = t^m,$$

o grau k do polinômio deduzido para $y_P(t)$ pode variar de grau m até grau $m+n$, dependendo da ordem da *menor derivada* presente na ED.

Exemplo: Solução particular $y_P(t)$ de

- $y''' - 6\,y'' + 11\,y' - 6\,y = -36\,t$.
- $y^{(7)} - 2\,y^{(5)} = 2\,t^2$.
- $y^{(4)} + 2\,y'' = 3\,e^t$.

EDs de Ordem Superior (cont.)

Para a ED não homogênea

$$y^{(n)} + b_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + b_2\,y'' + b_1\,y' + b_0\,y = g(t),$$

como a solução geral é dada por

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j\,y_j(t) + y_P(t),$$

precisamos saber encontrar a solução particular $y_P(t)$.

Adaptamos os métodos vistos anteriormente: *Método dos Coeficientes a Determinar* e *Método da Variação dos Parâmetros*.

EDs de Ordem Superior (cont.)

Método da Variação dos Parâmetros: modificamos tanto a definição de $y_P(t)$ quanto o sistema a ser resolvido:

$$y_P(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t) + \ldots + u_n(t)\,y_n(t)$$

$$\begin{cases} u_1'(t)\,y_1(t) + u_2'(t)\,y_2(t) + \ldots + u_n'(t)\,y_n(t) = 0 \\ u_1'(t)\,y_1'(t) + u_2'(t)\,y_2'(t) + \ldots + u_n'(t)\,y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ u_1'(t)\,y_1^{(n-2)}(t) + u_2'(t)\,y_2^{(n-2)}(t) + \ldots + u_n'(t)\,y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ u_1'(t)\,y_1^{(n-1)}(t) + u_2'(t)\,y_2^{(n-1)}(t) + \ldots + u_n'(t)\,y_n^{(n-1)}(t) = g(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{bmatrix}$$

EDs de Ordem Superior (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$y^{(3)} - 7\,y'' + 14\,y' - 8\,y = 9\,\mathrm{e}^{t} + 8\,t + 2.$$

Solução da homogênea correspondente: (na lousa)

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,t} + C_3\,\mathrm{e}^{4\,t},\ C_1, C_2, C_3, t \in \mathbb{R}.$$

LEMBRANDO:

Afirmação A: Considerando a ED $\left[\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + r\,w = g(t)\right]$ com $w = w(t)$, e sendo r uma constante (real ou complexa), podemos reescrever a ED como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[w(t)\,\mathrm{e}^{r\,t}\right] = g(t)\,\mathrm{e}^{r\,t}$$

após multiplicar por $\mathrm{e}^{r\,t}$, pois $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{r\,t}\right) = r\,\mathrm{e}^{r\,t}$.