# SME0340
# Equações Diferenciais Ordinárias
# Aula 25

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

6 de junho de 2018

## Aula Passada

**Transformada de Laplace**

- Integrais impróprias $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- Transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$



## Aula Passada (cont.)

**Definição:** a função $F(s)$, definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

com $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$, é chamada de **Transformada de Laplace** de $f(t)$, e é denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$.

Então, pelos exemplos da aula passada:

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0; \quad \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{ct}\right] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2+w^2}, s > 0.$$



## Aula Passada (cont.)

**Propriedades:**

1. **(Linearidade)** Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ e $a, b$ são constantes, então
$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,F(s) + b\,G(s) = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)].$$
2. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > s_0$, então
$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at} f(t)\right] = F(s-a), \text{ para } s > s_0 + a.$$
3. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então
$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s).$$

## Transformada de Laplace (cont.)

**Definição:** Uma função $f(t)$ é de **ordem exponencial** se existirem constantes $M > 0, \alpha \geq 0$ tais que, para todo $t$ suficientemente grande,

$$|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

$\operatorname{sen}(\beta t)$, $\cos(\beta t)$, $\mathrm{e}^{kt}$, e $t^n$ ($n \geq 0$) são de ordem exponencial pois $\left|\operatorname{sen}(\beta t)\right| \leq 1$, $\left|\cos(\beta t)\right| \leq 1$, $\left|\mathrm{e}^{kt}\right| = \mathrm{e}^{kt}$.

Com $t^n$, para $t$ suficientemente grande, $|t^n| \leq \mathrm{e}^t$, pois

$$\mathrm{e}^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots.$$

**Propriedade 4:** Suponha que $g$ e $g'$ sejam integráveis em $[0, b]$, para todo $b > 0$. Se $g$ for de ordem exponencial, então existe $\mathcal{L}[g'(t)]$ e

$$\mathcal{L}\left[g'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[g(t)] - g(0).$$



## Transformada de Laplace (cont.)

**Observação:** A Propriedade 4 também pode ser aplicada em derivadas de ordem superior:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f''(t)\right] &= s\,\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) = \\ &= s\left\{s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0) = \\ &= s^2\mathcal{L}[f(t)] - s\,f(0) - f'(0).\end{aligned}$$

**Exemplo:** Calcule $\mathcal{L}[\cos(wt)]$ e $\mathcal{L}[\operatorname{sen}(wt)]$ para $t \geq 0$ aplicando a Propriedade 4 (e, *se necessário*, as Propriedades 1, 2 e 3). Indique as propriedades usadas.

Lembre-se que, se $f(t) = \cos(wt)$, então $f'(t) = -w\operatorname{sen}(wt)$ e $f''(t) = -w^2\cos(wt)$.

Também, se $f(t) = \operatorname{sen}(wt)$, então $f'(t) = w\cos(wt)$ e $f''(t) = -w^2\operatorname{sen}(wt)$.