SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 24

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

25 de maio de 2018

Integrais Impróprias

Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq a$ tal que exista a integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

qualquer que seja $b > a$.

Definição: A **integral imprópria** de f é definida por

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt;$$

caso o limite exista e seja finito, f é **integrável no sentido impróprio** em $[a, +\infty)$ ou a integral imprópria é **convergente**. Caso contrário, a integral imprópria é **divergente**.

Aula Passada

Sistemas de EDs

- Sistemas Lineares Não Homogêneos:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

- Método dos Coeficientes a Determinar (MCD);
- Método de Variação dos Parâmetros (MVP):

$$\vec{x}_P(t) = X(t)\vec{u}(t), \qquad X(t)\dot{\vec{u}}(t) = \vec{g}(t)$$

- Exemplos.

Integrais Impróprias (cont.)

Exemplo: Determine se as seguintes integrais impróprias são convergentes ou divergentes:

(a) $\int_0^\infty e^{-2t}\,dt \quad \Rightarrow$ *CONVERGENTE*

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-2t}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-2b}}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}.$$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t} \quad \Rightarrow$ *DIVERGENTE*

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dt}{t} = \lim_{b\to\infty} [\ln|t|]|_1^b = \lim_{b\to\infty} [\ln(b) - 0] = \infty.$$

Integrais Impróprias (cont.)

Exemplo: Mostre que a integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Solução: Podemos escrever

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]\Big|_1^b, & \text{se } p \neq 1; \\ \lim_{b\to\infty} \left[\ln|x|\right]\Big|_1^b, & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Então, se $p = 1$, a integral é *divergente* (ver exemplo anterior); se $p \neq 1$, temos dois casos:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{1-b^{-(p-1)}}{p-1}\right] = \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1 \ \Rightarrow \ \textit{convergente}; \\ \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{b^{1-p}-1}{1-p}\right] = \infty, & \text{se } p < 1 \ \Rightarrow \ \textit{divergente}. \end{cases}$$

Então mostramos *convergência* para $p > 1$ e *divergência* para $p \leq 1$.

Transformada de Laplace

Vamos trabalhar com integrais impróprias da forma

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

com o domínio de $F(s)$ sendo valores de s onde a integral é *convergente*.

Vejamos alguns exemplos/casos para valores de $f(t)$ e $F(s)$ correspondentes.

(1) $f(t) = 1, \ t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} 1\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1-e^{-sb}}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

para $s > 0$. A integral é divergente para $s \leq 0$.

Transformada de Laplace (cont.)

(2) $f(t) = t, \ t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2}\right]\Bigg|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1 - e^{-sb}(sb+1)}{s^2}\right] = \frac{1}{s^2}$$

para $s > 0$.

(3) $f(t) = \text{sen}(wt), \ t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \text{sen}(wt)\, dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-st}(w\cos(wt) + s\,\text{sen}(wt))}{s^2 + w^2}\right]\Bigg|_0^b = \frac{w}{s^2+w^2}, \ s > 0.$$

Transformada de Laplace (cont.)

(4) $f(t) = \cos(wt), \ t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos(wt)\, dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}(w\,\text{sen}(wt) - s\cos(wt))}{s^2+w^2}\right]\Bigg|_0^b = \frac{s}{s^2+w^2}, \ s > 0.$$

(5) $f(t) = e^{ct}, \ t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct}\, dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-(s-c)t}}{s-c}\right]\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1-e^{-(s-c)b}}{s-c}\right] = \frac{1}{s-c}, \ s > c.$$

Transformada de Laplace (cont.)

Definição: a função $F(s)$, definida por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt,$$

com $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$, é chamada de **Transformada de Laplace** de $f(t)$, e é denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$.

Então, de acordo com os exemplos anteriores, temos

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}\left[e^{ct}\right] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2+w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2+w^2}, s > 0.$$

Transformada de Laplace (cont.)

Propriedades:

1. **(Linearidade)** Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ e a, b são constantes, então
$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,F(s) + b\,G(s) = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)].$$
2. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ para $s > s_0$, então
$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a), \text{ para } s > s_0 + a.$$
3. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então
$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Note:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(e^{-st}\right) f(t)\,dt.$$

Transformada de Laplace (cont.)

Se n é inteiro positivo, então, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[t^n] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^n\,dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-st} t^n}{s}\Bigg|_0^b + \frac{n}{s}\int_0^b e^{-st} t^{n-1}\,dt \right] =$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1}\,dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right] = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\left[t^{n-2}\right] = \ldots =$$

$$= \frac{(n)(n-1)\ldots(2)}{s^{n-1}}\mathcal{L}[t] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Transformada de Laplace (cont.)

Exemplos:

(1) $\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos(3t)\right]$

$f(t) = \cos(3t) \;\Rightarrow\; F(s) = \mathcal{L}[\cos(3t)] = s/\left(s^2+3^2\right), \; s > 0.$

$\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos(3t)\right] \overset{P2}{=} F(s+1) = (s+1)/\left[(s+1)^2+9\right], \; s > -1.$

(2) $\mathcal{L}\left[e^{2t}t^2\right]$

$\mathcal{L}\left[e^{2t}t^2\right]$: $\quad \mathcal{L}\left[t^2\right] = F(s) = 2/s^3, s > 0.$

$\mathcal{L}\left[e^{2t}t^2\right] \overset{P2}{=} F(s-2) = 2/(s-2)^3, s > 2.$

$\mathcal{L}\left[t^2 e^{2t}\right]$: $\quad \mathcal{L}\left[e^{2t}\right] = F(s) = 1/(s-2), s > 2.$

$\mathcal{L}\left[t^2 e^{2t}\right] \overset{P3}{=} F''(s) = 2/(s-2)^3, s > 2.$