SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 19

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

9 de maio de 2018

Aula Passada

Sistemas de EDs

- Introdução;
- Definições, Teoremas;
- Transformação de EDs homogêneas de ordem m para sistemas de EDs;
- Sistemas Lineares:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

- Sistemas Lineares Homogêneos.

Sistemas Homogêneos (cont.)

Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes
Vamos determinar a solução geral do sistema

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

onde A é uma matriz constante.

Se A é uma matriz diagonal, isto é, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mm} \end{bmatrix}$$

com a_{ij} constantes reais, qual a solução geral $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_m(t) \end{bmatrix}^T$?

Sistemas Homogêneos (cont.)

O sistema *diagonal*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

possui solução geral

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{a_{11} t} \\ \vdots \\ c_m e^{a_{mm} t} \end{bmatrix}, \; c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Então, para um sistema linear homogêneo com A sendo uma matriz constante qualquer, se conseguirmos transformar o sistema para um sistema *equivalente diagonal*, saberemos resolvê-lo. **Como?**

Sistemas Homogêneos (cont.)

Como encontrar um *sistema equivalente diagonal* de

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x},$$

com A sendo uma matriz constante qualquer?

Usaremos **diagonalização de matrizes**.

Toda matriz A *diagonalizável* possui uma matriz diagonal B *similar* que pode ser escrita na forma

$$B = P^{-1} A\,P.$$

Os elementos da diagonal de B são os *autovalores* de A e as colunas de P são *autovetores correspondentes* de A, tais que $A\,\vec{p}_j = b_{jj}\,\vec{p}_j$, com $\vec{p}_j$ sendo a j-ésima coluna de P.

Como calcular os autovalores e autovetores correspondentes de A?

Autovalores e Autovetores

Para uma matriz A, os valores de λ que satisfazem a relação

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$$

são chamados de *autovalores* de A, e os vetores $\vec{v}$, com pelo menos um $\vec{v} \neq \vec{0}$, são os *autovetores correspondentes*.
Assim,

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\,\vec{v} = \lambda\,I\,\vec{v}, \quad I: \text{ matriz identidade}$$

$$\Leftrightarrow \quad A\,\vec{v} - \lambda\,I\,\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\,I)\,\vec{v} = \vec{0}$$

$(A - \lambda\,I)\,\vec{v} = \vec{0}$ só possui solução *não nula* quando $\det(A - \lambda\,I) = 0$. (**Por quê?**) Dessa equação tiramos os valores de λ possíveis. Então, para cada valor de λ, determinamos os valores de $\vec{v}$ correspondentes.

Autovalores e Autovetores (cont.)

Exemplo: Determine os autovalores e autovetores correspondentes de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: (na lousa)

$$\lambda_1 = 4, \quad \vec{v}_{\lambda_1} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_{\lambda_2} = b\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Como usar autovalores e autovetores correspondentes para resolver sistemas homogêneos

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$$

com matriz A constante?
Depende de três casos, para os autovalores:

- reais;
- complexos;
- com multiplicidade k.

O conjunto de m soluções $\vec{x}^{\,j}(t)$, $j = 1, \ldots, m$ deve ser LI, e a solução geral (real) será

$$\vec{x}(t) = c_1\,\vec{x}^{\,1}(t) + \cdots + c_m\,\vec{x}^{\,m}(t), \quad t, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Para autovalores **reais**, vamos supor, inicialmente, que todos os autovalores são *diferentes*, isto é, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_m$ e possuem autovetores correspondentes (LI) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$.

Então cada solução para o sistema é da forma

$$\vec{x}^j(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Determine a solução geral $\vec{x}(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Solução: Usando o exemplo anterior, com $a, c \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = 4,\ \vec{v}_1 = a\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T,\ \lambda_2 = 1,\ \vec{v}_2 = c\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}^T$, temos

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{4t} + c_2 e^{t} \\ c_1 e^{4t} - 2c_2 e^{t}\end{bmatrix},$$

$$t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}(t).$$

Solução: Determinemos, primeiro, os autovalores λ e autovetores correspondentes $\vec{v}$ da matriz A, com $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda\end{bmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$$

Para $\lambda_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix}^T,\ a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \vec{v}_1 = a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}(t).$$

Solução (cont.): $\lambda_1 = 1,\ \vec{v}_1 = a\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T,\ a \in \mathbb{R}.$

Para $\lambda_2 = -2$: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix}^T,\ c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \vec{v}_2 = c\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^1(t) = e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \vec{x}^2(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \quad \textbf{(LI?)}$$

$$\therefore \quad \vec{x}(t) = c_1 e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$