SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 18

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

4 de maio de 2018

Sistemas de Equações Diferenciais

Teoria Geral:
Sistemas de EDs de primeira ordem podem geralmente ser escritos como

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{dx_1}{dt}(t) = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{dx_2}{dt}(t) = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) = \frac{dx_m}{dt}(t) = F_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{cases}$$

Solução do sistema num intervalo J: m funções $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ diferenciáveis em J que satisfazem *simultaneamente* o sistema para todo $t \in J$.

Exemplo:
O par $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = \text{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é solução de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}.$$

Aulas Passadas

EDs de Ordem n

- Teorema;
- EDs Lineares Homogêneas/Não Homogêneas:
  $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$
- Generalização do Método Geral para ordem n.
- Generalização de MCD e MVP para ordem n.

Sistemas de EDs (cont.)

PVI:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \dot{x}_2(t) = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) = F_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_m(t_0) = x_m^0 \end{cases}$$

com $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in J$.

Sistemas de EDs (cont.)

Podemos escrever a equação de ordem m

$$y^{(m)} = F\big(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}\big)$$

como um sistema de m equações de ordem 1:
definir

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \dots, \quad x_{m-1} = y^{(m-2)}, \quad x_m = y^{(m-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{m-1} = x_m \\ \dot{x}_m = F(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}$$

Sistemas de EDs (cont.)

Se as funções $F_1, F_2, \dots, F_m$ do sistema são lineares em $x_1, x_2, \dots, x_m$, então o sistema de equações é **linear**.

Sistema mais geral de m equações *lineares* de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1m}(t)x_m + g_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2m}(t)x_m + g_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_m = a_{m1}(t)x_1 + \cdots + a_{mm}(t)x_m + g_m(t) \end{cases}$$

Se $g_j(t) \equiv 0$ para todo $1 \le j \le m$, então o sistema é **homogêneo**; senão, ele é **não homogêneo** (se pelo menos um $g_j(t)$ assume valor não nulo para $t \in J$).

Sistemas de EDs (cont.)

Exemplo: Escreva o PVI

$$\begin{cases} y^{(3)} + y' = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

na forma de um sistema de EDs.

Solução: Sendo

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y'',$$

temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 2,\ x_3(0) = 0 \end{cases}$$

Sistemas de EDs (cont.)

Sistema linear – notação matricial:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t), \tag{1}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix}.$$

Teorema (Existência e Unicidade de Soluções): Suponha que as funções $a_{ij}(t)$ e $g_j(t)$, $1 \le i, j \le m$ sejam contínuas num intervalo J. Então dados $t_0 \in J$ e $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^m$, existe uma única solução $\vec{x}(t)$ de (1), definida em J, tal que $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$.

Sistemas Homogêneos

Teorema: Se

$\overrightarrow{x}^1(t) = \left[x_1^1(t) \quad \cdots \quad x_m^1(t)\right]^T$ e $\overrightarrow{x}^2(t) = \left[x_1^2(t) \quad \cdots \quad x_m^2(t)\right]^T$

são soluções do sistema homogêneo

$$\dot{\overrightarrow{x}} = A(t)\overrightarrow{x},$$

então qualquer combinação linear $c_1\overrightarrow{x}^1(t) + c_2\overrightarrow{x}^2(t)$, em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, também é solução.

Teorema (Teste para Independência Linear): Sejam $\overrightarrow{x}^1(t), \ldots, \overrightarrow{x}^k(t)$ soluções do sistema homogêneo e seja $t_0 \in J$. Então $\overrightarrow{x}^1(t), \ldots, \overrightarrow{x}^k(t)$ são soluções LI em J se e somente se os vetores $\overrightarrow{x}^1(t_0), \ldots, \overrightarrow{x}^k(t_0)$ são LI em $\mathbb{R}^m$.

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -2x_1 + 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\overrightarrow{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\overrightarrow{x}.$$

Solução: Sistema obtido de $y'' - 3y' + 2y = 0$. Como $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, são soluções da ED, então:

$$\overrightarrow{x}^1(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{x}^2(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 2\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R},$$

são soluções do sistema (são LI?) e a solução geral será

$$\overrightarrow{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\overrightarrow{x}^1(t) + c_2\overrightarrow{x}^2(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ c_1\,\mathrm{e}^t + 2\,c_2\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}, \ t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Teorema: A dimensão do espaço S de todas as soluções do sistema homogêneo é m, isto é, se conhecemos m soluções linearmente independentes $\overrightarrow{x}^1(t), \ldots, \overrightarrow{x}^m(t)$ do sistema linear homogêneo, então toda solução será da forma

$$\overrightarrow{x}(t) = c_1\overrightarrow{x}^1(t) + \ldots + c_m\overrightarrow{x}^m(t),$$

a **solução geral** do sistema homogêneo.

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\overrightarrow{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\overrightarrow{x}.$$

Solução: Sistema obtido de

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Definição: Uma matriz $m \times m$ $X(t)$ é **matriz solução** do sistema $\dot{\overrightarrow{x}} = A(t)\overrightarrow{x}$ se cada *coluna* de $X(t)$ é *solução* do sistema.

Definição: Uma matriz $m \times m$ $X(t)$ é **matriz fundamental** (MF) para o sistema $\dot{\overrightarrow{x}} = A(t)\overrightarrow{x}$ se é uma matriz solução e $\det[X(t)] \neq 0$ para todo t no intervalo de existência. Ou seja, suas colunas são soluções LI do sistema no intervalo.

Exemplo: Verifique se $X(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & 2\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$ é MF de

$\dot{\overrightarrow{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\overrightarrow{x}$ para $t \in \mathbb{R}$.

Solução: $X(t)$ é matriz solução (ver exemplo anterior). Para ser MF, verifiquemos se $\det[X(t)] \neq 0$ para $t \in \mathbb{R}$:
$\det[X(t)] = 2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{3t} \neq 0$ para $t \in \mathbb{R}$. *é MF!*

Sistemas Homogêneos (cont.)

Lema: Se $X(t)$ é uma MF do sistema linear homogêneo, então a solução geral do sistema será dada por $X(t)\overrightarrow{c}$, onde $\overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix}^T$.

Teorema (Fórmula de Jacobi-Liouville): Se $X(t)$ é uma matriz solução do sistema homogêneo em algum intervalo J e se $t_0 \in J$, então

$$\det[X(t)] = \det[X(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\, ds\right).$$

Teorema: Seja $X(t)$ uma matriz solução do sistema homogêneo em J. $X(t)$ é MF se e somente se $\det[X(t_0)] \neq 0$ para algum $t_0 \in J$.

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Verifique se

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 5\,e^t & t \\ 0 & e^t & 0 \\ -t & -2\,e^t & 1-t \end{bmatrix}$$

é uma MF para o sistema

$$\dot{\overrightarrow{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overrightarrow{x} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

DICA: Verificar se $X(t)$ é *matriz solução* primeiro, e depois mostrar se $\det[X(t_0)] \neq 0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Solução: na lousa.