SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 14

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

20 de abril de 2018

Aula Passada

EDs de Segunda Ordem

- EDs Lineares Não Homogêneas:
$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t)$$
- Teorema: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$;
- Método dos Coeficientes a Determinar (MCD): *Observar, Deduzir, Calcular*
$$y'' + a\,y' + b\,y = g(t),$$
com $g(t)$ sendo *polinomial* (t^n), *exponencial* ($e^{\alpha t}$).

MCD (cont.)

Caso Trigonométrico: $y'' + a\,y' + b\,y = \begin{cases} \text{sen}(\beta\,t) \\ \cos(\beta\,t) \end{cases}.$

Observar: $g(t)$ é do tipo *trigonométrico*.

Deduzir: depende se $g(t) = \text{sen}(\beta\,t)$ ou $g(t) = \cos(\beta\,t)$:

- Se $g(t) = \text{sen}(\beta\,t)$, como $g(t) = \text{Im}\left(e^{i\beta t}\right)$, então $y_P(t) = \text{Im}(w_P(t))$ onde $w_P(t)$ é a solução particular de
$$w'' + a\,w' + b\,w = e^{i\beta t};$$
- Se $g(t) = \cos(\beta\,t)$, como $g(t) = \text{Re}\left(e^{i\beta t}\right)$, então $y_P(t) = \text{Re}(w_P(t))$ onde $w_P(t)$ é a solução particular de
$$w'' + a\,w' + b\,w = e^{i\beta t};$$

Calcular: determinar $w_P(t)$ aplicando o *caso exponencial* na nova ED.

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $y_P(t)$ de
$$y'' - 3\,y' + 2\,y = \text{sen}(t).$$

Solução:
Observar: $g(t) = \text{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é do tipo trig.
Deduzir: $\text{sen}(t) = \text{Im}(e^{it})$, então $y_P(t) = \text{Im}(w_P(t))$ com $w_P(t)$ sendo sol. particular de
$$w'' - 3\,w' + 2\,w = e^{it}.$$
Calcular: Determinar $w_P(t)$.
O: Caso exp. **D:** $w_P(t) = v(t)\,e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$
C: P/ $t \in \mathbb{R}$:
$w_P'(t) = (v' + i\,v)\,e^{it}$; $w_P''(t) = (v'' + 2\,i\,v' - v)\,e^{it}$
$$\left(v'' + 2\,i\,v' - v\right)e^{it} - 3\left(v' + i\,v\right)e^{it} + 2\,(v)\,e^{it} = e^{it}$$
$$\Rightarrow \quad \left[v'' + (-3 + 2\,i)\,v' + (1 - 3\,i)\,v\right]e^{it} = e^{it}$$
$$\Rightarrow \quad v'' + (-3 + 2\,i)\,v' + (1 - 3\,i)\,v = 1$$

MCD (cont.)

Exemplo (cont.): $\left[w'' - 3\,w' + 2\,w = \mathrm{e}^{i\,t}; y_P(t) = \mathrm{Im}(w_P(t))\right]$
$v'' + (-3 + 2\,i)\,v' + (1 - 3\,i)\,v = 1$
O: caso poli de grau 0;
D: Menor derivada de ordem 0 $\Rightarrow$ $v(t) = a_0$, $t \in \mathbb{R}$;
C: P/ $t \in \mathbb{R}$: $v'(t) = v''(t) = 0 \Rightarrow (1 - 3\,i)\,a_0 = 1$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{1 - 3\,i} = \frac{1 + 3\,i}{10} = \frac{1}{10} + i\frac{3}{10} = v(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad w_P(t) = \left(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}\right)\mathrm{e}^{i\,t},\ t \in \mathbb{R}$$
$$= \left[\frac{\cos(t)}{10} - \frac{3\,\mathrm{sen}(t)}{10}\right] + i\left[\frac{\mathrm{sen}(t)}{10} + \frac{3\cos(t)}{10}\right]$$

$$\therefore \quad y_P(t) = \frac{\mathrm{sen}(t)}{10} + \frac{3\cos(t)}{10}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular de
$$y'' - 3\,y' + 2\,y = t\,\mathrm{e}^{3\,t}.$$

Solução: (na lousa)
$$y_P(t) = \frac{2\,t - 3}{4}\mathrm{e}^{3\,t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)

Caso misto:
$$y'' + a\,y' + b\,y = t^n\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t) \quad \text{ou} \quad t^n\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\,\mathrm{sen}(\beta\,t)$$
Observar: Caso misto (poli,exp,trig);
Deduzir: Modificar $g(t)$ (e a ED), *se necessário*, para conter apenas caso misto com poli e exp e aplicar dedução com caso exponencial.

Exemplos:

- Se $g(t) = t^n\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\,\mathrm{sen}(\beta\,t)$, modificar a ED para
$$w'' + a\,w' + b\,w = t^n\,\mathrm{e}^{(\alpha + i\,\beta)\,t}$$
e determinar $w_P(t)$ tal que $y_P(t) = \mathrm{Im}(w_P(t))$, aplicando o caso *exponencial* (mesmo com o t^n).
- Se $g(t) = t^n\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t)$, modificar a ED para
$$w'' + a\,w' + b\,w = t^n\,\mathrm{e}^{(\alpha + i\,\beta)\,t}$$
e determinar $w_P(t)$ tal que $y_P(t) = \mathrm{Re}(w_P(t))$, aplicando o caso *exponencial* (mesmo com o t^n).

MCD (cont.)

Combinação Linear:

Aplicação do **Princípio da Superposição de Soluções** sobre a solução particular da ED:

Se $\varphi_1(t)$ é solução da equação
$$y'' + a\,y' + b\,y = g_1(t)$$
e $\varphi_2(t)$ é solução da equação
$$y'' + a\,y' + b\,y = g_2(t),$$
então a função $\varphi(t) = s_1\,\varphi_1(t) + s_2\,\varphi_2(t)$ é solução da equação
$$y'' + a\,y' + b\,y = s_1\,g_1(t) + s_2\,g_2(t),$$
com s_1, s_2 constantes (fixas).

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 4\,t^2 + 12\,\mathrm{e}^{-t} \quad (\ast)$$

Solução: Usando o Princípio da Superposição e sabendo, da aula 13, que a solução particular de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = t^2$$

é $y_{P1}(t) = \big(2\,t^2 + 6\,t + 7\big)/4,\, t \in \mathbb{R}$, e que a solução particular de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = \mathrm{e}^{-t}$$

é $y_{P2}(t) = \mathrm{e}^{-t}/6,\, t \in \mathbb{R}$, então temos que a solução particular $y_P(t)$ de $(\ast)$ é dada por

$$y_P(t) = 4\,y_{P1}(t) + 12\,y_{P2}(t) = 4\,\frac{\big(2\,t^2 + 6\,t + 7\big)}{4} + 12\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{6} =$$
$$= \big(2\,t^2 + 6\,t + 7\big) + 2\,\mathrm{e}^{-t},\ \ t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 10\,\mathrm{sen}(t) - 30\cos(t).$$

Dica: A solução particular da ED $w'' - 3\,w' + 2\,w = \mathrm{e}^{i\,t}$ (calculada hoje) é dada por

$$w_P(t) = \left[\frac{\cos(t)}{10} - \frac{3\,\mathrm{sen}(t)}{10}\right] + i\left[\frac{\mathrm{sen}(t)}{10} + \frac{3\cos(t)}{10}\right],$$
$$t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Usando o Princípio da Superposição,

$$y_P(t) = 10\left[\frac{\mathrm{sen}(t)}{10} + \frac{3\cos(t)}{10}\right] - 30\left[\frac{\cos(t)}{10} - \frac{3\,\mathrm{sen}(t)}{10}\right]$$
$$= \mathrm{sen}(t) + 3\cos(t) - 3\cos(t) + 9\,\mathrm{sen}(t)$$
$$= 10\,\mathrm{sen}(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$