SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 11

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

11 de abril de 2018

Aula Anterior (cont.)

Método da Redução de Ordem (MRO):
Conhecendo uma solução $y_1(t)$ da ED

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0,$$

para determinar uma segunda solução $y_2(t)$, LI de $y_1(t)$,

1. Definir $y_2(t) = v(t)\,y_1(t)$ com $v(t)$ não constante;
2. Substituir $y_2(t)$, $y_2'(t)$ e $y_2''(t)$ na EDO e simplificar;
3. Assumir $z(t) = v'(t)$ e substituir na EDO;
4. Resolver EDO de ordem 1 para $z(t)$;
5. Calcular *um* $v(t) = \int z(t)\,\mathrm{d}t$;
6. Calcular *uma* solução $y_2(t)$.

A *solução geral* da EDO será dada por

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Aula Anterior

EDs de Segunda Ordem

- Introdução;
- Definições;
- Teoremas;
- EDs Lineares Homogêneas:
  Método da Redução de Ordem;

Método Geral

Vimos *Método da Redução de Ordem* para determinar soluções LI y_1, y_2 da ED linear homogênea

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0.$$

Vamos assumir agora que $a(t) = a$ e $b(t) = b$, com a e b sendo constantes, independentes de t:

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0.$$

O **Método Geral** para EDs com Coeficientes Constantes (que *não está* em livros ou apostila) consiste em reescrever a ED de segunda ordem como um *conjunto* de EDs de primeira ordem.

Método Geral (cont.)

A ideia do **Método Geral** é decompor a ED linear de segunda ordem em duas EDs de primeira ordem, tal que, ao resolver o conjunto de equações, obtém-se a solução geral da EDO de segunda ordem.

Como fazer isso?
Se a, b constantes em

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0,$$

será que conseguimos achar constantes r_1, r_2 tal que escrevemos a ED como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - r_1\,y\right) - r_2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - r_1\,y\right) = 0?$$

Se for possível, separamos em duas EDs lineares de ordem 1.

Método Geral (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 0.$$

Solução: Determinemos, primeiro, como decompor a ED em duas EDs de primeira ordem.

Sendo

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = y'' - y' - 2\,y' + (-1)(-2)\,y = 0,$$

então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y' - 2\,y\right) - \left(y' - 2\,y\right) = 0$$

Método Geral (cont.)

Exemplo (cont.):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y' - 2\,y\right) - \left(y' - 2\,y\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(t) = y' - 2\,y & (I) \\ z' - z = 0 & (II) \end{cases}$$

Resolvendo (II):

$$z' - z = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(na lousa)} \quad \Rightarrow \quad z(t) = C\,\mathrm{e}^{t},\ C, t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo em (I):

$$y' - 2\,y = C\,\mathrm{e}^{t} \quad \Rightarrow \quad \text{(na lousa)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,t},\ \ C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 0.$$

Solução: Determinemos, inicialmente, como decompor a ED.

Sendo

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = y'' - 2\,y' - 2\,y' + (-2)(-2)\,y = 0,$$

então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y' - 2\,y\right) - 2\left(y' - 2\,y\right) = 0$$

Método Geral (cont.)

Exemplo (cont.):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y'-2\,y\right)-2\left(y'-2\,y\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} z(t)=y'-2\,y & (I) \\ z'-2\,z=0 & (II) \end{cases}$$

Resolvendo (II):

$z'-2\,z=0 \quad \Rightarrow \quad$ (na lousa) $\quad \Rightarrow \quad z(t)=C\,\mathrm{e}^{2\,t},\ C,t\in\mathbb{R}.$

Substituindo em (I):

$$y'-2\,y=C\,\mathrm{e}^{2\,t} \quad \Rightarrow \quad \text{(na lousa)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=C_1\,t\,\mathrm{e}^{2\,t}+C_2\,\mathrm{e}^{2\,t},\ \ C_1,C_2,t\in\mathbb{R}.$$

Números Complexos

Revisão de Números Complexos: conjunto $\mathbb{C}$

Sendo $i=\sqrt{-1}$, para um número $z\in\mathbb{C}$ temos

$$z=a+i\,b\in\mathbb{C} \quad a=\mathrm{Re}(z), \quad b=\mathrm{Im}(z), \quad a,b\in\mathbb{R}$$

Propriedades: Para $z_1=a+i\,b$ e $z_2=c+i\,d$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$,

- $z_1\pm z_2=(a\pm c)+i\,(b\pm d)$;
- $\overline{z_1}=a-i\,b$;
- $z_1\,z_2=(a\,c-b\,d)+i\,(a\,d+b\,c)$;
- $|z_1|=\sqrt{z_1\,\overline{z_1}}=\sqrt{a^2+b^2}$;
- $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2}=\dfrac{(a\,c+b\,d)+i\,(b\,c-a\,d)}{c^2+d^2}.$

Fórmula de Euler: $\mathrm{e}^{i\,\theta}=\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)$.

$$\mathrm{e}^{a\pm i\,b}=\mathrm{e}^{a}\,\mathrm{e}^{\pm i\,b}=\mathrm{e}^{a}\left[\cos(b)\pm i\,\mathrm{sen}(b)\right].$$

Método Geral (cont.)

Vimos nos dois exemplos anteriores como decompor as EDs de segunda ordem

$$y''+a\,y'+b\,y=0$$

quando os valores de r_1 e r_2 são reais, isto é, quando podemos decompor em duas EDs de primeira ordem com coeficientes constantes *reais*.

E se os valores de r_1 e r_2 são *complexos*?

Se os valores de a e b na ED de segunda ordem são reais, então a solução geral deve ser a combinação linear de soluções *reais* LI. Como obtê-las?

Vamos primeiro fazer uma **revisão de números complexos**, suas propriedades e ver algumas relações que serão úteis.

Método Geral (cont.)

Proposição: Se $z(t)=u(t)+i\,v(t)$ é uma solução a valores complexos da ED linear homogênea

$$y''+a\,y'+b\,y=0,$$

então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais da ED homogênea.

Quando resolvemos uma ED linear homogênea de segunda ordem com r_1,r_2 complexos, encontraremos uma *solução geral complexa* para a ED, mas desejamos uma solução geral *real*.

Para obtê-la, usamos a Proposição: basta *desenvolver* a solução complexa para a forma $u(t)+i\,v(t)$ e tomar $y_1(t)=u(t)$ e $y_2(t)=v(t)$ como as duas soluções reais LI da ED linear homogênea:

$$y(t)=C_1\,y_1(t)+C_2\,y_2(t), \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}, \quad y(t)\in\mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral (real) de

$$y'' - 2\,y' + 5\,y = 0.$$

Solução: (na lousa)

Solução complexa:

$$w(t) = K_1\,\mathrm{e}^{(1+2\,i)t} + K_2\,\mathrm{e}^{(1-2\,i)t}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$