SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 9

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

4 de abril de 2018

EDs de Segunda Ordem

Forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y'' = f(t, y, y')$$

com f sendo uma função definida em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.

EDs de segunda ordem surgem com frequência em:

- problemas de Física (2a. Lei de Newton);
- problemas de Eletricidade (Leis de Kirchhoff).

Focaremos na solução de EDs **lineares de segunda ordem** e depois faremos uma generalização para EDs lineares de ordem n.

Aula Passada

EDs de Primeira Ordem

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

- Aplicações de EDs de ordem 1 a problemas;
- Exemplos.

EDs Lineares de Ordem 2

Forma geral:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t),$$

com $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ funções contínuas em um intervalo I.

Quando $g(t) \equiv 0$, temos uma ED *linear homogênea*; senão, a ED é *não homogênea*.

Teorema (Existência e Unicidade): Se as funções $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ forem contínuas num intervalo I, então dados $t_0 \in I$ e y_0, $z_0 \in \mathbb{R}$, o PVI

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

possui uma única solução $y = y(t)$, a qual está definida para todo $t \in I$.

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)

Vamos começar analisando as EDs lineares **homogêneas**.

Para a ED linear de segunda ordem

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0,$$

se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções da ED *convenientemente escolhidas*, então podemos escrever a **solução geral** da ED linear de segunda ordem homogênea como

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t), \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Princípio da Superposição: Se $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são soluções da ED linear homogênea, e se c_1, c_2 são constantes reais, então a função $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ também é solução.

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)

Teorema: Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções de

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$$

tais que

$$\det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

para todo $t \in I$. Então toda solução da ED é dada por

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t), \quad t \in I.$$

Observe que, se tomarmos um $t_0 \in I$ qualquer, e sendo $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = y'(t_0)$, devemos ter

$$\begin{cases} C_1\,y_1(t_0) + C_2\,y_2(t_0) = y_0 \\ C_1\,y_1'(t_0) + C_2\,y_2'(t_0) = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema ter solução, $\det\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$.

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)

Exemplo: A ED

$$t^2\,y'' - t\,y' + y = 0, \quad t > 0$$

possui $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = t\ln(t)$ como soluções (MOSTRE!)

Então podemos escrever a *solução (geral)* da ED como

$$y(t) = C_1\,t + C_2\,t\ln(t), \quad t > 0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(MOSTRE!)

Como sabemos que essas soluções foram *apropriadamente escolhidas* para escrever a solução geral?

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)

Definimos como o **Wronskiano** de $y_1(t)$ e $y_2(t)$

$$W(t) = W\,[y_1, y_2]\,(t) = \det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Então, a *solução geral* da ED linear homogênea é dada por

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t)$$

quando $W\,[y_1, y_2] \neq 0$. Isto ocorre quando as funções y_1, y_2 são soluções *linearmente independentes* da ED.

Observação 1: Duas funções $f_1(t), f_2(t)$ não necessariamente possuem $W\,[f_1, f_2] \neq 0$ para $t \in I$, *exceto se forem soluções da ED linear homogênea*.

Exemplo: $f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2$ para $t \in \mathbb{R}$.

Observação 2: $W(t) = 0$ *não* implica que as funções são linearmente dependentes.

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)

Teorema: Sejam $y_1(t), y_2(t)$, $t \in I$, soluções da ED linear homogênea e $t_0 \in I$ fixado. Seja $W(t)$ o wronskiano de y_1 e y_2. Então

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}, \quad \forall t \in I.$$

Em particular, como a função exponencial nunca se anula, segue-se que se $W(t_0) \neq 0$, então $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Observação: O intervalo I é o intervalo onde as funções $a(t)$ e $b(t)$ da ED linear homogênea

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$$

são contínuas.

Método da Redução de Ordem

O **Método da Redução de Ordem** supõe que conhecemos uma solução $y_1(t)$ da ED e queremos achar uma outra solução $y_2(t)$ tal que a solução geral da ED é escrita como

$$y(t) = C_1\, y_1(t) + C_2\, y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Se $y_1(t)$ é solução da ED linear

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0,$$

então $C\, y_1(t)$, com C sendo uma constante real, também é, mas não é L.I. de $y_1(t)$.

Assim, para obter uma segunda solução $y_2(t)$ que seja *linearmente independente* da solução $y_1(t)$, deve-se assumir que

$$y_2(t) = v(t)\, y_1(t), \quad \text{com } v(t) \textit{ não constante}.$$

Obs.: $W[y_1, y_2](t) = v'(t)\, y_1^2(t)$.

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)

Teorema: Suponhamos que $a(t)$ e $b(t)$ sejam funções contínuas no intervalo I. Então existem duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$$

tais que $W[y_1, y_2] \neq 0$ para todo $t \in I$. Além disso, a solução geral desta equação é dada por $C_1\, y_1(t) + C_2\, y_2(t)$, em que C_1, C_2 são constantes arbitrárias.

Isso nos garante que o espaço das soluções da ED é um espaço vetorial de dimensão 2.

Veremos em seguida métodos para determinar as soluções LI y_1, y_2 da ED linear homogênea:

- **Método da Redução de Ordem**;
- **Método Geral** para EDs com Coef. Constantes.

Redução de Ordem (cont.)

Sendo $y_2(t) = v(t)\, y_1(t)$, então temos:

$$y_2'(t) = v'(t)\, y_1(t) + v(t)\, y_1'(t);$$
$$y_2''(t) = v''(t)\, y_1(t) + 2\, v'(t)\, y_1'(t) + v(t)\, y_1''(t);$$

e assim, escrevendo $v = v(t)$ e $y_1 = y_1(t)$,

$$\left[v''\, y_1 + 2\, v'\, y_1' + v\, y_1''\right] + \\ + a(t)\left[v'\, y_1 + v\, y_1'\right] + b(t)\left[v\, y_1\right] = 0$$

$$\Rightarrow\ v\left[y_1'' + a(t)\, y_1' + b(t)\, y_1\right] + \\ + v'\left[2\, y_1' + a(t)\, y_1\right] + v''\, y_1 = 0$$

$$\Rightarrow\quad y_1\, v'' + \left[2\, y_1' + a(t)\, y_1\right] v' = 0.$$

Substituindo $z(t) = v'(t)$,

$$y_1(t)\, z' + \left[2\, y_1'(t) + a(t)\, y_1(t)\right] z = 0. \quad \text{(ordem 1)}$$

Redução de Ordem (cont.)

Resumindo:
Conhecendo uma solução $y_1(t)$ da ED

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0,$$

para determinar uma segunda solução $y_2(t)$, LI de $y_1(t)$,

1. Definir $y_2(t) = v(t)\,y_1(t)$ com $v(t)$ não constante;
2. Substituir $y_2(t)$, $y_2'(t)$ e $y_2''(t)$ na EDO e simplificar;
3. Assumir $z(t) = v'(t)$ e substituir na EDO;
4. Resolver EDO de ordem 1 para $z(t)$;
5. Calcular *um* $v(t) = \int z(t)\,dt$;
6. Calcular *uma* solução $y_2(t)$.

A *solução geral* da EDO será dada por

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Redução de Ordem (cont.)

Exercício: Determine a solução geral de

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 0$$

com $y_1(t) = e^{2t},\ t \in \mathbb{R}$.

Solução:

$$y(t) = C_1\,e^{2t} + C_2\,t\,e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Redução de Ordem (cont.)

Exemplo: Determine uma outra solução de

$$t\,y'' - 2\,y' = 0$$

sabendo-se que $y_1(t) = 1$, $t \neq 0$.

Solução: Verificando se $y_1(t) = 1$ é solução:
Para $t \neq 0$,

$$y_1(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1'(t) = y_1''(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t(0) - 2(0) = 0 \quad \therefore \quad y_1 \text{ é solução}$$

$$\text{Então:} \quad y_2(t) = v(t)\,y_1(t) = v(t), \quad v \neq c$$

$$y_2'(t) = v'(t), \quad y_2''(t) = v''(t)$$

$$t\,v'' - 2\,v' = 0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = v'(t)$$

$$t\,z' - 2\,z = 0 \cdots z(t) = K_1\,t^2,\ t \neq 0 \cdots v(t) = K_1\frac{t^3}{3} + K_2,\ t \neq 0$$

$$\text{(basta um } v(t)\text{):} \quad v(t) = t^3 = y_2(t),\ t \neq 0.$$