SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 6

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

16 de março de 2018

Aula Passada

EDs Não Lineares

$$M(t,y)+N(t,y)\,y'=0 \quad \text{ou} \quad M(t,y)\,\mathrm{d}t+N(t,y)\,\mathrm{d}y=0$$

- introdução;
- EDs com *variáveis separáveis*;
- EDs *exatas*: se $M_y(t,y)=N_t(t,y)$ (Teorema), encontrar $V(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}=M(t,y), \qquad \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}=N(t,y).$$

EDs Não Exatas

E se a ED

$$M(t,y)+N(t,y)\,y'=0$$

não é exata? Será que conseguimos *transformá-la* em uma ED exata para podermos resolver?

A ED pode ser transformada em uma ED exata se conseguimos encontrar uma função conveniente $u(t,y)$ (**fator integrante**) tal que

$$u(t,y)\,M(t,y)+u(t,y)\,N(t,y)\,y'=0\,u(t,y)=0$$

é exata, ou seja (por Teorema),

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u(t,y)\,M(t,y)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[u(t,y)\,N(t,y)\right].$$

Como calcular $u(t,y)$?

EDs Não Exatas (cont.)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u(t,y)\,M(t,y)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[u(t,y)\,N(t,y)\right]$$

$$\Rightarrow \quad u_y\,M+u\,M_y=u_t\,N+u\,N_t$$

Como resolver para $u(t,y)$? Equação é complicada de resolver...

Consideramos classe de EDs

$$M(t,y)+N(t,y)\,y'=0$$

cujo fator integrante $u(t,y)$ *pode* ser encontrado.

Vamos assumir que $u(t,y)$ é função *apenas* de t **ou** *apenas* de y.

EDs Não Exatas (cont.)

- Se $u(t,y) = u(t)$:
$$\frac{\partial}{\partial y}[u(t)\,M(t,y)] = \frac{\partial}{\partial t}[u(t)\,N(t,y)]$$
$$\Rightarrow \quad u(t)\,M_y(t,y) = u'(t)\,N(t,y) + u(t)\,N_t(t,y)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{u'(t) = \frac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)}\,u(t)}$$
- Se $u(t,y) = u(y)$:
$$\frac{\partial}{\partial y}[u(y)\,M(t,y)] = \frac{\partial}{\partial t}[u(y)\,N(t,y)]$$
$$\Rightarrow \quad u'(y)\,M(t,y) + u(y)\,M_y(t,y) = u(y)\,N_t(t,y)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{u'(y) = \frac{N_t(t,y) - M_y(t,y)}{M(t,y)}\,u(y)}$$

EDs Não Exatas (cont.)

Exemplo: Determine a solução da ED
$$2\,e^t\,y - y^2 + \left(e^t - 2\,y\right)y' = 0.$$

Solução: Vamos primeiro verificar se ela é exata.
Sendo $M(t,y) = 2\,e^t\,y - y^2$ e $N(t,y) = e^t - 2\,y$, então
$M_y(t,y) = 2\,e^t - 2\,y; \quad N_t(t,y) = e^t \quad (M_y \neq N_t \Rightarrow$ *Não exata*$)$
Como $M_y(t,y) - N_t(t,y) = e^t - 2\,y$, assumimos que o fator integrante é função só de t: $u(t)$. (Por quê?)
Obtemos então
$$u'(t) = \frac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)}u(t) \;\Rightarrow\; u'(t) = \frac{e^t - 2\,y}{e^t - 2\,y}u(t) = u(t)$$
$$\cdots \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^t.$$
Assim, vamos trabalhar com a *nova* ED equivalente
$$2\,e^{2t}\,y - e^t\,y^2 + \left(e^{2t} - 2\,e^t\,y\right)y' = 0.$$

EDs Não Exatas (cont.)

Para
$$\boxed{u'(t) = \frac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)}u(t)}$$
ter solução, $\dfrac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)}$ deve ser função *apenas* de t.

Analogamente, para que
$$\boxed{u'(y) = \frac{N_t(t,y) - M_y(t,y)}{M(t,y)}u(y)}$$
tenha solução, $\dfrac{N_t(t,y) - M_y(t,y)}{M(t,y)}$ deve ser função *apenas* de y.

EDs Não Exatas (cont.)

Exemplo (cont.):
$$2\,e^{2t}\,y - e^t\,y^2 + \left(e^{2t} - 2\,e^t\,y\right)y' = 0.$$
Verificando se ela é exata:
$$M^*(t,y) = 2\,e^{2t}\,y - e^t\,y^2; \quad N^*(t,y) = e^{2t} - 2\,e^t\,y$$
$$\Rightarrow \quad M^*_y(t,y) = 2\,e^{2t} - 2\,e^t\,y; \quad N^*_t(t,y) = 2\,e^{2t} - 2\,e^t\,y.$$
Como $M^*_y(t,y) = N^*_t(t,y)$, então a ED é exata. Vamos encontrar $V(t,y)$.
$$V(t,y) = \int M^*(t,y)\,dt = \int \left(2\,e^{2t}\,y - e^t\,y^2\right)\,dt =$$
$$= e^{2t}\,y - e^t\,y^2 + h(y)$$
$$\Rightarrow \quad V_y(t,y) = e^{2t} - 2\,e^t\,y + h'(y) = N^*(t,y) = e^{2t} - 2\,e^t\,y$$
$$\Rightarrow \quad h'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) = K$$
$$\Rightarrow V(t,y) = e^{2t}\,y - e^t\,y^2 + K = C_1 \;\therefore\; \boxed{e^{2t}\,y - e^t\,y^2 = C, \;\; C \in \mathbb{R}}$$