SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 3

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

7 de março de 2018

EDs de Ordem 1

Uma ED de primeira ordem pode ser escrita na **forma geral**

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

com f sendo uma função real definida em $A \subset \mathbb{R}^2$.

Se f depende apenas de t e é integrável,

$$y' = f(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int f(t)\,dt = F(t) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = f(t).$$

A forma mais simples de ED com f dependendo de t e y é a **ED linear**.

Aula Passada

Introdução:
Existência e Unicidade Local de Soluções de

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- $f(t, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ contínuas em retângulo $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \left\{(t, y)\ :\ t_0 \le t \le t_0 + a;\ |y - y_0| \le b\right\}$$

- $M = \max_{(t,y)\in\mathcal{R}} |f(t, y)|$.
- Então existe solução única para PVI em $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$, $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

ED Linear

Definição: Uma **ED linear de primeira ordem** é uma equação da forma

$$y' + a(t)\,y = b(t),$$

com $a(t)$, $b(t)$ sendo funções contínuas em um intervalo J de t.

O PVI

$$\begin{cases} y' + a(t)\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui solução única, definida no intervalo J que contém t_0 (por Teorema).

Exemplos: Quais são EDs lineares de ordem 1?

(a) $y' - 2\,t\,y^2 = 0$ **(c)** $y'' + t\,y' = 3\,t^3$
(b) $y' + 3\,t^2\,y = t^3$ **(d)** $y' = 2\,t\,e^y - t^2$

ED Linear (cont.)

$$y' + a(t)\,y = b(t)$$

Definição: Se $b(t) \equiv 0$, temos uma **ED linear homogênea** associada,

$$y' + a(t)\,y = 0.$$

Senão, temos uma **ED linear não homogênea**.

Como determinar *todas* as soluções $y(t)$ de

$$y' + a(t)\,y = 0,$$

com $a(t)$ contínua em um intervalo J?

ED Linear Homogênea

Para resolver

$$y' + a(t)\,y = 0,$$

sendo $y' = \dfrac{dy}{dt}$, temos

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)\,y.$$

Então, através da propriedade de diferenciais,

$$\frac{dy}{y} = -a(t)\,dt, \quad y \neq 0.$$

Integrando dos dois lados, e sabendo que

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1, \quad \ln|a| = b \iff |a| = e^b,$$

determinamos $y(t)$, a **solução geral**, válida em um intervalo J.

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo 1: Determine a solução geral $y(x)$ de

$$y' - 3\,y = 0.$$

Solução: Como $y' = \frac{dy}{dx}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = 3\,y \quad \Rightarrow \quad dy = 3\,y\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 3\,dx, \quad y \neq 0$$

($y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, também é solução da ED)

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + C_1 = 3\,x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = 3\,x + K, \quad K = C_2 - C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{3x+K} = e^K\,e^{3x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \pm e^K\,e^{3x}$$

$$\text{p/ todo } K \in \mathbb{R}: \quad \{+e^K, \ -e^K, \ 0\} \quad = \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad y(x) = C\,e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo 2: Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{t}y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}.$$

Solução: (na lousa)

$$y(t) = 2\,t^2, \quad t > 0.$$

Obs. 1: O intervalo $t > 0$ foi determinado sabendo-se que a solução de um PVI deve ser definida em um intervalo J *contínuo* de t (sem “buracos”) que contém o valor inicial $t_0 = 1$.

Obs. 2: O conjunto das soluções de $y' + a(t)\,y = 0$ é um *espaço vetorial* com dimensão 1.

ED Linear Homogênea (cont.)

Outro modo de resolver

$$y' + a(t)\,y = 0:$$

reescrever equação tal que temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g(t,y)\right) = 0.$$

Se multiplicarmos toda a ED por uma função $u(t) \not\equiv 0$, com $u(t)$ diferenciável em J, a solução não muda. Então "escolhemos" um $u(t)$ *conveniente* para multiplicar.

No caso de EDs *lineares na forma acima*, notamos que há dois termos no lado esquerdo, um com y' e outro com y.

Procuramos um $u(t)$ tal que, multiplicando toda a equação por $u(t)$, o lado esquerdo se torna uma *regra do produto*.

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo: Resolver

$$t^3\,y' + 3\,t^2\,y = 0$$

Solução: (na lousa)

$$y(t) = \frac{C}{t^3}, \quad C \in \mathbb{R},\ t \neq 0.$$

Obs.: Note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^3\right) = 3\,t^2$$

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo:

$$y' + 3\,y = 0$$

Qual é a função $u(t)$ que multiplicamos por toda a ED tal que o lado esquerdo possa ser escrito como a *derivada em t* de função de t e y? $[u(t)\,y' + 3\,u(t)\,y = 0\,u(t) = 0]$.

Como

$$u'(t) = 3\,u(t) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3t}\right) = 3\left(\mathrm{e}^{3t}\right),$$

então $u(t) = \mathrm{e}^{3t}$ e

$$\mathrm{e}^{3t}\,y' + 3\,\mathrm{e}^{3t}\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3t}\,y\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{3t}\,y\right) = \int 0\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{3t}\,y = C$$

$$\therefore \quad y(t) = C\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$