Métodos de solução aplicados ao problema de produção e distribuição

Henrique Hiroshi Motoyama Watanabe
Maristela Oliveira Santos
Depto. de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP
13566-590, São Carlos, SP
E-mail: hhwatanabe@usp.br, mari@icmc.usp.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o problema integrado de produção e distribuição (PIPD), no qual tenta-se tratar, de maneira integrada, o planejamento de produção, controle de estoque e distribuição. Neste tipo de problema, em cada período, itens são produzidos e distribuídos para os clientes com o objetivo de atender uma determinada demanda a um custo total mínimo, isto é, planejar a produção de cada item e as rotas e distribuições de cada veículo tal que o custo final seja mínimo. Neste trabalho apresentamos uma breve revisão sobre o PIPD, um modelo matemático e alguns resultados computacionais.

Palavras-chave: Otimização, Problema Integrado de Produção e Distribuição, Modelagem Matemática, Heurísticas

Introdução

Os problemas de dimensionamento de lotes e distribuição, presentes em diversas empresas, são clássicos da área de otimização e foram introduzidos há mais de 50 anos, por [13] e [8] respectivamente. Com o aumento da competição entre empresas, a busca por um planejamento mais eficiente chegou, enfim, à integração desses dois problemas, sendo objeto de estudo em [7] e em outros trabalhos da literatura. Existem vários trabalhos na literatura que abordam o problema de dimensionamento de lotes. [10] lista as principais características que definem um problema de dimensionamento de lotes, e neste trabalho estamos interessados no horizonte de planejamento finito, com múltiplos produtos simples, plantas com limites de capacidades, demandas predefinidas, custos de preparação de máquinas simples e sem atrasos (*backlogging*). Revisões sobre problemas de dimensionamento de lotes podem ser encontrados em [10].

Apesar de cada problema geralmente ser considerado separados na literatura, o interesse pelo PIPD está crescendo. A Tabela 1 mostra alguns trabalhos que integram decisões de produção e distribuição.

A principal motivação para a integração desses dois problemas é a diminuição de custos. No PIPD temos uma ou mais plantas produzindo diversos tipos de itens que serão entregues aos clientes de acordo com suas respectivas demandas. O problema de produção e distribuição têm várias variações que dependem do tipo de produto e fábrica, o que pode mudar completamente tanto o objetivo como restrições. Neste trabalho consideramos o problema como apresentado em [3], ou seja, com possibilidade de produção de vários itens em uma única planta com limite na capacidade de produção e frota homogênea.

Nesse problema integrado, deve-se decidir como organizar a produção de vários itens durante um horizonte finito de tempo. Além disso, deve-se planejar as rotas dos veículos disponíveis, de modo que as demandas de todos os clientes sejam satisfeitas sem nenhum atraso. Em cada cliente existe uma capacidade máxima e uma quantidade mínima de estoque de segurança para cada item. Os veículos têm um limite no tamanho da rota percorrida, não podem reabastecer na planta durante um período e dois veículos não podem visitar um mesmo cliente em um mesmo período.

Para tratar o problema em estudo, heurísticas baseadas na formulação do problema foram desenvolvidas. Nos testes computacionais, com dados gerados baseados em trabalhos da literatura, mostra-se que a abordagem desenvolvida obtém soluções de melhor qualidade do que um dos melhores resolvedores comerciais da atualidade.

Tabela 1: Alguns dos trabalhos na literatura sobre o PIPD

Trabalho (Ano)	Planta	Item	Frota	Entrega parcial
[7] (1994)	**única**	**múltiplos**	**homogênea**	sim
[9] (1999)	**única**	**múltiplos**	**homogênea**	sim
[2] (2007)	**única**	único	**homogênea**	sim
[5] (2009)	**única**	único	**homogênea**	**não**
[4] (2009)	**única**	único	**homogênea**	**não**
[3] (2011)	**única**	**múltiplos**	**homogênea**	**não**
[1] (2012)	**única**	único	**homogênea**	sim
[6] (2015)	**única**	**múltiplos**	**homogênea**	**não**
Esse trabalho	**única**	**múltiplos**	**homogênea**	**não**

Modelo matemático

Para modelar define-se a representação, parâmetros e as variáveis. Considere um grafo completo $G = (W, E)$, onde $W = \{0, 1, \dots, N\}$ é o conjunto de nós e $E = \{(k, l) \mid k, l \in W, k \neq l\}$ o conjunto de arestas. A planta, representada pelo nó $k = 0$, produz os itens $j \in \{1, \dots, J\}$ que são levados aos clientes $k \in \{1, \dots, N\}$ pelos veículos $v \in \{1, \dots, V\}$. Denotamos os períodos por $t \in \{1, \dots, T\}$. A capacidade de produção da planta é B unidades de tempo e o tempo de produção do item j é b_j com custo c_j^p. O custo de preparação (*setup*) das máquinas para o item j é f_j^p e o custo de estoque da unidade do item j no nó k é h_{jk}, sendo que os estoques máximo e mínimo são U_{jk} e L_{jk}, respectivamente. Na parte de transporte, os veículos têm capacidade C e o limite da rota que cada um pode percorrer é L, o custo para utilizar cada veículo é composto pela parte fixa f^v e a parte variável c_{kl}^v, se o veículo passar pela aresta (k, l). A demanda do item j no cliente k no período t é d_{jkt}. As variáveis de decisão são as quantidades de itens produzidas, p_{jt} do item j no período t, entregues, q_{jkt}^v do item j pelo veículo v ao cliente k no período t, estoque do item j no cliente (ou planta) k e período t, I_{jkt}, a carga do veículo v no período t de item j na aresta (k, l) é x_{jklt}^v. Além das variáveis binárias y_{jt} que indicam se o item j é produzido no período t, e z_{klt}^v se o veículo v passa por (k, l) no período t.

A primeira parte da função objetivo (1) tem os custos relacionados ao dimensionamento de lotes: estoque, produção e *setup*, a segunda tem a parte de distribuição, com utilização dos veículos e transporte. As restrições (1) representam o balanço entre produção, estoque e quantidade de produtos entregues na planta. As restrições (2) também são de balanço, entre a quantidade de produtos entregues, estoque e demanda no cliente. As restrições (3) limitam a produção de itens e as restrições (4) mostram quando a preparação é necessária. As restrições (5) e (6) representam o fluxo de itens que passa pelos clientes e planta. As restrições (7) e (8) são as capacidades dos veículos, de carga e percurso. As restrições (9) permitem no máximo uma rota para cada veículo por período e as restrições (10) forçam que os veículos terminem os períodos na planta. As restrições (11) dão no máximo um veículo para cada cliente em cada período, proibindo a entrega parcial. As restrições (12) garantem que os limites de estoque serão respeitados. As restrições (13) nos dão os domínios das variáveis do problema. [9] afirmaram que as restrições (5) e (6) eliminam as subrotas, que é quando um veículo passa duas vezes por um mesmo cliente num único período. Da restrição (5) junto com a não negatividade da variável q_{jkt}^v, eliminamos a possibilidade de um veículo transferir itens entre clientes. O modelo a seguir é uma adaptação do proposto por [9] feita por [3].

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T}\{\sum_{j=1}^{J}[\sum_{k=0}^{N} h_{jk}I_{jkt} + c^p_{jt} + f^p_j y_{jt}] + \sum_{v=1}^{V}[\sum_{l=1}^{N} f^v z^v_{0lt} + \sum_{l=0,l\neq k}^{N} c^v_{kl} z^v_{klt}]\}$$

$$\text{sujeito a:} \quad p_{jt} + I_{j0,t-1} - I_{j0t} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{V} q^v_{jkt} \qquad \forall t \in T; \forall j \in J \tag{1}$$

$$\sum_{v=1}^{V} q^v_{jkt} + I_{jk,t-1} - I_{jkt} = d_{jkt} \qquad \forall t \in T; \forall j \in J; \forall k \in N \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{J} b_j p_{jt} \leq B \qquad \forall t \in T \tag{3}$$

$$b_j p_{jt} \leq B y_{jt} \qquad \forall t \in T; \forall j \in J \tag{4}$$

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{N} x^v_{jikt} - \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{N} x^v_{jkmt} = q^v_{jkt} \qquad \forall t \in T; \forall j \in J; \forall v \in V; \forall k \in N \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V} x^v_{ji0t} - \sum_{m=1}^{N}\sum_{v=1}^{V} x^v_{j0mt} = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{V} q^v_{jkt} \qquad \forall t \in T; \forall j \in J \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{J} x^v_{jklt} \leq C z^v_{klt} \qquad \forall t \in T; \forall v \in V; \forall k, l \in N; k \neq l \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} c^v_{kl} z^v_{klt} \leq L \qquad \forall t \in T; \forall v \in V; \forall k \neq l \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{N} z^v_{0kt} \leq 1 \qquad \forall t \in T; \forall v \in V \tag{9}$$

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{N} z^v_{ikt} - \sum_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{N} z^v_{kmt} = 0 \qquad \forall t \in T; \forall v \in V; \forall k \in N \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{v=1}^{V} z^v_{klt} \leq 1 \qquad \forall t \in T; \forall l \in N \tag{11}$$

$$L_{jk} \leq I_{jkt} \leq U_{jk} \qquad \forall t \in T; \forall j \in J; \forall k \in N \tag{12}$$

$$p_{jt}, q^v_{jkt}, x^v_{jklt} \geq 0, y_{jt}, z^v_{klt} \in \{0,1\}, \forall j,k,l,t \tag{13}$$

Abordagens de solução e resultados computacionais

Devido à complexidade do problema, a capacidade de resolução do modelo *Mixed Integer Programming* (MIP) utilizando o *solver* Cplex é limitada. Portanto utilizaremos heurísticas de decomposição *relax-and-fix* e *fix-and-optimize*. Ambas heurísticas são comumente utilizadas na literatura, principalmente para o problema de dimensionsamento de lotes, isso serve como indicativo que são métodos cujos resultados podem ser competitivos no problema integrado. As duas heurísticas são de decomposição e particionam o conjunto das variáveis inteiras e binárias (I) em R subconjuntos distintos $I(r)$, ou seja,

$$I(1) \cup I(2) \cup .. \cup I(R) = I \tag{14}$$

$$I(1) \cap I(2) \cap .. \cap I(R) = \emptyset \tag{15}$$

Na *relax-and-fix* [11], um grupo de variáveis inteiras é relaxado. Em seguida escolhemos um conjunto da decomposição e redefinimos suas variáveis como inteiras, começando pelo conjunto $I(1)$ e terminando no $I(R)$ sem perda de generalidade. Resolvemos o subproblema resultante MIP(r), fixamos as variáveis inteiras pertencentes ao conjunto $I(r)$ e movemos para o próximo subproblema. O método termina quando todas as variáveis inteiras são fixadas, ou é interrompido quando o problema fica infactível devido a fixação de algumas variáveis. Uma melhoria para o método é a inclusão de *overlapping*, que consiste em integralizar variáveis extras, fora do conjunto $I(r)$, porém sem fixá-las após a resolução do subproblema. A *fix-and-optimize* ([11], [12]) começa a partir de uma solução factível e uma decomposição das variáveis inteiras, a heurística percorre os conjuntos um por um, liberando as variáveis do conjunto $I(r)$ e resolvendo o subproblema resultante MIP2(r), sem relaxar nenhuma variável. Quando o subproblema MIP2(r) é resolvido, podem ocorrer dois casos: se a solução encontrada for melhor que a anterior, as variáveis de $I2(r)$ são fixadas e a heurística volta para o primeiro conjunto. Caso contrário, movemos para o próximo conjunto $I2(r+1)$ resolvendo MIP2($r+1$). Os critérios de parada, normalmente, são um limite de tempo ou quando os subproblemas (de todos os conjuntos) não encontrarem soluções melhores.

Testamos várias decomposições considerando as variáveis binárias particionadas por períodos, com α períodos por subconjunto além de β períodos de *overlap*. α variou entre 1 e 4, enquanto β ficou no intervalo de 1 a 3. Neste problema, temos dois grupos de variáveis binárias: y_{jt} e z^v_{klt}. Então cada subconjunto terá todas as variáveis de α períodos, tanto y como z. Após alguns testes preliminares com algumas instâncias geradas, baseadas em [3], escolhemos a combinação RF+FO com $\alpha_{RF} = 4$, $\beta_{RF} = 1$, $\alpha_{FO} = 4$, $\beta_{FO} = 3$.

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos por meio do modelo matemático e pela heurística proposta, sendo que na primeira coluna apresentamos as características das instâncias, na segunda coluna a qualidade da solução obtida pela heurística (*gap* médio), e na última coluna a qualidade das soluções obtidas pelo *solver*. Os números entre parênteses na segunda e terceira colunas indicam o número de instâncias não resolvidas. Os *gaps* foram calculados em relação ao limitante inferior encontrado pelo Cplex no tempo limite de 3600 segundos.

Tabela 2: *Gaps* da heurística e do *solver* Cplex

Instâncias (N/V, T, J)	*gap* médio RF+FO	*gap* médio Cplex	tempo médio RF+FO
(5, 7, 3)	8,55%	9,59%	818,9 s
(5, 7, 5)	11,16%	15,07%	888,1 s
(5, 14, 3)	7,60%	12,04%	1586,2 s
(5, 14, 5)	7,20%	15,15%	2505,9 s
(10, 7, 3)	8,17%	15,25%	2552,7 s
(10, 7, 5)	6,75%	12,72%	2594,1 s
(10, 14, 3)	6,30%	18,73%	3647,9 s
(10, 14, 5)	5,88%	17,47%	3776,4 s
(15, 7, 3)	7,45% (1)	23,56%	3442,6 s
(15, 7, 5)	17,06%	30,16% (1)	3691,0 s
(15, 14, 3)	6,26% (4)	22,15%	3774,3 s
(15, 14, 5)	34,48% (7)	57,33% (1)	3862,3 s

Foi considerado um tempo máximo de 3600 segundos para os métodos resolverem cada problema, e cada combinação de parâmetros possui 10 instâncias, totalizando 120. A combinação de heurísticas RF+FO obteve resultados melhores, porém perdeu mais soluções que o Cplex nas instâncias maiores. O Cplex não encontrou nenhuma solução ótima, portanto utilizou os 3600 segundos em todas as instâncias.

Conclusões

Neste trabalho consideramos um problema que integra decisões de dimensionamento de lotes e distribuição. Apresentamos um modelo matemático e desenvolvemos uma abordagem de solução baseada na decomposição das variáveis do problema. A abordagem escolhida se mostrou competitiva em relação ao *solver* Cplex, no tempo limite escolhido, porém, encontrou dificuldade em determinar soluções factíveis para todas as instâncias, principalmente para as maiores.

Agradecimentos: Agradecemos ao CNPq (Processos 132404/2014-1 e 476792/2013-4). Pesquisa desenvolvida com utilização dos recursos computacionais do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI) financiados pela FAPESP.

Referências

[1] Adulyasak, Yossiri, Jean-François Cordeau, and Raf Jans. "Optimization-based adaptive large neighborhood search for the production routing problem."Transportation Science 48.1 (2012): 20-45.

[2] Archetti, Claudia, et al. "A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed inventory-routing problem."Transportation Science 41.3 (2007): 382-391.

[3] Armentano, Vinícius Amaral, A. L. Shiguemoto, and Arne Løkketangen. "Tabu search with path relinking for an integrated production-distribution problem."Computers & Operations Research 38.8 (2011): 1199-1209.

[4] Bard, Jonathan F., and Narameth Nananukul. "The integrated production - inventory - distribution - routing problem."Journal of Scheduling 12.3 (2009): 257-280.

[5] Boudia, Mourad, and Christian Prins. "A memetic algorithm with dynamic population management for an integrated production/distribution problem."European Journal of Operational Research 195.3 (2009): 703-715.

[6] Brahimi, Nadjib, and Tarik Aouam. "Multi-item production routing problem with backordering: a MILP approach."International Journal of Production Research (2015): 1-18.

[7] Chandra, Pankaj, and Marshall L. Fisher. "Coordination of production and distribution planning."European Journal of Operational Research 72.3 (1994): 503-517.

[8] Dantzig, George B., and John H. Ramser. "The truck dispatching problem."Management science 6.1 (1959): 80-91.

[9] Fumero, Francesca, and Carlo Vercellis. "Synchronized development of production, inventory, and distribution schedules."Transportation science 33.3 (1999): 330-340.

[10] Karimi, Behrooz, SMT Fatemi Ghomi, and J. M. Wilson. "The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms."Omega 31.5 (2003): 365-378.

[11] Pochet, Yves, and Laurence A. Wolsey. Production planning by mixed integer programming. Springer Science & Business Media, 2006.

[12] Sahling, Florian, et al. "Solving a multi-level capacitated lot sizing problem with multi-period setup carry-over via a fix-and-optimize heuristic."Computers & Operations Research 36.9 (2009): 2546-2553.

[13] Wagner, Harvey M., and Thomson M. Whitin. "Dynamic version of the economic lot size model."Management science 5.1 (1958): 89-96.