

Superfícies em espaços euclidianos

Maria Aparecida Soares Ruas

ICMC - Universidade de São Paulo
8º Mini Workshop
Singularidades, Geometria e Equações Diferenciais

Fevereiro - 2011

Introdução

A investigação de propriedades da geometria extrínseca de subvariedades dos espaços euclidianos apoiada em métodos da teoria de singularidades teve seu início no final da década de 60, início da década de 70, no século passado.

René Thom em seu estudo sobre pontos parabólicos de superfícies em \mathbb{R}^3 foi quem primeiro observou a importância da família de funções altura como uma ferramenta útil para o estudo da geometria diferencial clássica, como aplicação da teoria de singularidades.

A idéia de René Thom foi concretizada pela primeira vez no trabalho pioneiro de [Porteous(1971)], sobre as singularidades genéricas da família de funções distância ao quadrado.



Introdução

O objetivo da palestra é discutir a geometria de superfícies em \mathbb{R}^5 do ponto de vista dos contatos com subespaços lineares.

Uma motivação para estudar superfícies em \mathbb{R}^5 é o problema da existência de imersões 2-regulares de uma superfície M em espaços euclidianos \mathbb{R}^n . Esta questão foi introduzida independentemente por E. A. Feldman e W. Pohl, nos anos sessenta.

Imersão 2-regular

Um ponto $p \in M$ é *2-regular* se existe um sistema de coordenadas $\{x, y\}$ em p , tal que o subespaço gerado pelos vetores $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\}$ em p tem posto máximo.

A imersão f é *regular de ordem 2* se todos os pontos de M são 2-regulares.

Feldman provou que o conjunto das imersões 2-regulares de superfícies em \mathbb{R}^n é denso no espaço $Imm(M^2, \mathbb{R}^n)$, quando $n \geq 7$.

Para $n = 6$, os pontos 2-singulares são isolados. O caso $n = 5$ é mais difícil.

A existência de imersão 2-regular $T^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ é um problema aberto.

Esta questão também aparece na discussão do princípio h (h -principle) de Gromov.

Em particular, não se sabe se o h -principle se verifica para imersões $T^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$.

Para $n = 6$ o h -principle se verifica.

Referência: [Eliašberg and Mishachev (2002)]



- A segunda forma fundamental de superfícies em \mathbb{R}^n ;
- A família de funções altura em M ;
- Linhas assintóticas de mergulhos genéricos de superfícies em \mathbb{R}^5 ;
- Aplicações e exemplos.



Superfícies em \mathbb{R}^n : a segunda forma fundamental

Seja M uma superfície em \mathbb{R}^n definida localmente pelo mergulho $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, e indiquemos por TM e NM o fibrado tangente e o fibrado normal, respectivamente. Seja $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana de \mathbb{R}^n .

Seja X um campo de vetores diferenciável em M e \bar{X} sua extensão a um aberto de \mathbb{R}^n . Dados dois campos de vetores tangentes X e Y em M , a conexão Riemanniana em M é $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$, que é a componente tangencial da conexão Riemanniana em \mathbb{R}^n .

Seja $\mathcal{X}(M)$ (resp. $\mathcal{N}(M)$) espaço dos campos vetoriais tangentes (resp. normais) em M . A segunda aplicação fundamental em M é

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{N}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y. \end{aligned}$$



Dado um campo normal ν em M a aplicação α induz uma função bilinear

$$\begin{aligned} TM \times TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \langle \alpha(X, Y), \nu \rangle. \end{aligned}$$

A *segunda forma fundamental* na direção de $\nu \in N_pM$ é a forma quadrática

$$II_\nu : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_\nu(X) = \langle \alpha_p(X, X), \nu \rangle.$$

O operador de forma (shape operator) associado ao campo normal ν é definido por

$$\begin{aligned} S_\nu : TM &\longrightarrow TM \\ X &\longmapsto -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nu})^\top \end{aligned}$$

S_ν é um operador auto-adjunto e satisfaz $II_\nu(X, Y) = \langle S_\nu(X), Y \rangle$.



Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança U , do ponto p , tal que $\forall q \in U$, $\{e_1(q), e_2(q)\}$ é uma base para T_qM e $\{e_3(q), \dots, e_n(q)\}$ é base para N_qM .

Se $v \in N_pM$ é representado pelas coordenadas (v_3, \dots, v_n) com relação à base $\{e_3, \dots, e_n\}$, então a segunda forma fundamental

$$II_v(q) = v_3(d^2f \cdot e_3) + \dots + v_n(d^2f \cdot e_n).$$

A segunda forma fundamental induz uma aplicação linear

$$A_p : N_pM \rightarrow \mathcal{Q}_2$$

em que \mathcal{Q}_2 é o espaço das formas quadráticas em 2 variáveis, e $A_p(v)$ é a forma quadrática associada a II_v em p . Temos $A_p(v) = II_v(p)$.



Elipse de curvatura de superfícies em \mathbb{R}^n

Seja $p \in M$ e considere o círculo unitário em T_pM parametrizado por $\theta \in [0, 2\pi]$. Seja η_θ o vetor de curvatura normal na direção θ .

A imagem $\eta([0, 2\pi])$ traça uma elipse no espaço normal, a *elipse de curvatura*. Invariantes da elipse de curvatura são invariantes da geometria de segunda ordem de M .

A elipse de curvatura de superfícies em \mathbb{R}^4 é um invariante clássico ([Moore and Wilson (1916)], [Little (1969)])

Para superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, as referências são [Moraes and Romero-Fuster (2004)] e [Costa, Moraes and Romero-Fuster (2009)].



Superfícies em \mathbb{R}^5 : a geometria de segunda ordem

- Mochida, Romero-Fuster, Ruas (2003)
- Romero-Fuster, Ruas, Tari (2008).

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^5$ um mergulho e $p \in U$.

A matriz da segunda forma fundamental α de f no ponto p

$$\alpha_p = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{bmatrix},$$

onde $a_i = \langle f_{xx}, e_i \rangle$, $b_i = \langle f_{xy}, e_i \rangle$ and $c_i = \langle f_{yy}, e_i \rangle$, $i = 3, 4, 5$.



$$A_p : N_p M \rightarrow \mathcal{Q}_2$$

Se $v \in N_p M$ é representado pelas coordenadas (v_3, v_4, v_5) com relação à base $\{e_3, e_4, e_5\}$, então

$$A_p(v_3, v_4, v_5) = v_3(d^2 f \cdot e_3) + v_4(d^2 f \cdot e_4) + v_5(d^2 f \cdot e_5).$$

Seja $M_i \subset M$ definido por

$$M_i = \{p \in M \mid \text{rank } \alpha_p = i\}.$$

Genericamente, $M = M_3 \cup M_2$ e M_2 é curva regular em M .



Seja C o cone das *formas quadráticas degeneradas* em \mathcal{Q}_2 .

- $p \in M_3$: A_p tem rank máximo, logo $A_p^{-1}(C)$ é um cone em N_pM .
- $p \in M_2$: a imagem de A_p é um plano pela origem em \mathcal{Q}_2 .

Conforme a posição relativa deste plano com relação ao cone C , temos os seguintes casos:



(a) *Tipo hiperbólico* (que denotamos por M_2^h): $ImA_p \cap C$ consiste de duas retas.

Neste caso $A_p^{-1}(C)$ é a união de dois planos que se interceptam ao longo da reta $\ker \alpha_p$.

(b) *Tipo elíptico* (que denotamos por M_2^e): $ImA_p \cap C = \{0\}$.

Neste caso $A_p^{-1}(C) = \ker \alpha_p$ é uma reta.

(c) *Tipo parabólico* (que indicamos por M_2^p): ImA_p é tangente a C ao longo de uma reta.

Neste caso, $A_p^{-1}(C)$ é um plano contendo a reta $\ker \alpha_p$.



Vamos assumir que p é a origem e que M está na forma de Monge

$$\phi(x, y) = (x, y, Q_1(x, y) + f^1(x, y), Q_2(x, y) + f^2(x, y), Q_3(x, y) + f^3(x, y)),$$

em que f^i , $i = 1, 2, 3$ são germes de funções diferenciáveis com 2-jato nulo na origem, e as coordenadas de $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ são formas quadráticas.

A geometria dos contatos com subespaços lineares é invariante por mudanças de coordenadas afins ([Bruce, Giblin and Tari (1995)]), portanto podemos reduzir Q a uma das formas normais:



- (x^2, xy, y^2) se e só se $q \in M_3$,
- $(xy, x^2 \pm y^2, 0)$ se e só se $q \in M_2^h$ ou $q \in M_2^e$, conforme o sinal seja + ou -
- $(x^2, xy, 0)$ se e somente se q é um ponto de tipo M_2^p .

Seja

$$\begin{aligned} j^3 f^1 &= a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3, \\ j^3 f^2 &= b_{30}x^3 + b_{31}x^2y + b_{32}xy^2 + b_{33}y^3, \\ j^3 f^3 &= c_{30}x^3 + c_{31}x^2y + c_{32}xy^2 + c_{33}y^3. \end{aligned}$$



A família de funções altura

Em [Mochida, Romero-Fuster and Ruas (2003)] discutimos contatos with hiperplanos, e definimos *direções assintóticas*.

$$\begin{aligned} H : M \times S^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \times S^4 \\ (p, v) &\longmapsto (h_v(p), v) \end{aligned}$$

$$h_v : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_v(p) = \langle f(p), v \rangle,$$

função altura na direção v .



Teorema de genericidade de Looijenga

[Looijenga(1974)]: Para um conjunto residual de mergulhos $f : M \rightarrow \mathbb{R}^5$, a família H é localmente versal. Assim, h_v tem genericamente uma singularidade de tipo $A_{k \leq 5}$, D_4^\pm ou D_5 .

Arnol'd simple singularities, [Arnol'd, Gusein-Zade and Varchenko(1985)]

- A_k $x^2 \pm y^{k+1}$, $k \geq 1$
- D_k $x^2y \pm y^{k-1}$, $k \geq 4$
- E_6 $x^3 + y^4$
- E_7 $x^3 + xy^3$
- E_8 $x^3 + y^5$



Se $p \in M_3$, as singularidades genéricas são de tipo A_k .

Se $p \in M_2$ então existe $v \in N_p M$ tal que h_v tem uma singularidade de tipo D_4 ou D_5 .



Direções degeneradas e direções de contato

Uma direção $v \in N_p M$ é *degenerada* se p é uma singularidade não estável (não Morse) de h_v .

Neste caso, o núcleo da Hessiana de h_v , $\ker(\text{Hess}(h_v)(p))$, contém vetores não nulos. Qualquer direção $u \in \ker(\text{Hess}(h_v)(p))$ é chamada *direção de contato associada a v* .

O "*flat ridge*" de M é o conjunto dos pontos em que a família de funções altura, ao longo de alguma direção normal, tem uma singularidade de tipo A_k , $k \geq 4$. Genericamente, este conjunto é vazio ou uma curva regular de pontos de tipo A_4 , eventualmente com pontos isolados de tipo A_5 .



Direção binormal

Um vetor unitário $v \in N_pM$ é chamado *direção binormal* se h_v tem uma singularidade de tipo A_3 ou mais degenerado em p .

Direções assintóticas

Uma direção $u \in T_pM$ é uma *direção assintótica* em p se é uma direção de contato associada a uma direção binormal v .

Teorema ([Mochida, Romero-Fuster and Ruas (2003)])

Seja p um ponto de tipo M_3 . Então existem no máximo 5 e no mínimo 1 direção assintótica em p .



Equação diferencial das direções assintóticas

Em [Romero-Fuster, Ruas and Tari (2008)] caracterizamos as direções assintóticas de superfícies em \mathbb{R}^5 em termos dos contatos da superfície com k -planos, $k = 1, 2, 3, 4$.

Queremos obter a equação das direções assintóticas em termos dos coeficientes da segunda forma fundamental e dar um argumento geométrico porquê a equação é de quinta ordem.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, $q \in M_3$. Como a curva de pontos de tipo M_2 é regular e a equação dos pontos M_3 é também válida para os pontos de tipo M_2 , passando ao limite.



Seja $u = (dx, dy) \in T_qM$ e $v = (v_3, v_4, v_5) \in N_qM$.

Seja M_v uma carta de superfície regular obtida projetando M ortogonalmente em \mathbb{R}^3 , $T_qM \oplus \langle v \rangle$ (considerado como um espaço afim por q .)

Proposição

Seja $q \in M_3$ e $v \in N_qM$.

(1) A direção v é degenerada se e somente se q é um ponto parabólico de M_v .

Neste caso, a única direção assintótica principal de M_v em q coincide com a direção de contato associada à v .

(2) Uma direção $u \in T_qM$ é assintótica de M se e somente se existe $v \in N_qM$ tal que q é uma cúspide da aplicação de Gauss de M_v e u é a única direção assintótica de M_v neste ponto.



Então u é uma direção assintótica de M_V em q se e somente se $II_V(u, u) = 0$, se e somente se

Equação 1.

$$(v_3c_3 + v_4c_4 + v_5c_5)dy^2 + 2(v_3b_3 + v_4b_4 + v_5b_5)dxdy + (v_3a_3 + v_4a_4 + v_5a_5)dx^2 = 0.$$

Para simplificar a notação, vamos indicar por $A/B/C$ os coeficientes de $dy^2/2dxdy/dx^2$, respectivamente.

Observe que como estamos considerando $q \in M_3$, no mínimo um dos coeficientes A, B, C é não nulo em q .



O ponto q é um ponto parabólico de M_V se e somente se a função discriminante $\delta = B^2 - AC$ da equação anterior é um zero de q , isto é, se e somente se

Equação 2.

$$\begin{aligned} (b_3^2 - a_3c_3)v_3^2 + (2b_4b_3 - a_4c_3 - a_3c_4)v_3v_4 \\ + (2b_5b_3 - a_5c_3 - a_3c_5)v_3v_5 + (b_4^2 - a_4c_4)v_4^2 \\ + (2b_5b_4 - a_5c_4 - a_4c_5)v_4v_5 + (b_5^2 - a_5c_5)v_5^2 = 0. \end{aligned}$$



O ponto q é uma cúspide da Gauss de M_V se e somente se a única direção assintótica u , i.e. a única solução da equação anterior em q , é tangente a Δ (o conjunto dos zeros de δ).

Equation 3.

$$\begin{aligned} A\delta_x - B\delta_y = 0 & \text{ if } A \neq 0 \\ A_y = 0 & \text{ if } A = 0 \end{aligned}$$



Então u é uma direção assintótica se e somente se as equações 1 – 3 estão satisfeitas.

Suponha que $A \neq 0$ em q . A equação 2 determina uma cônica no plano projetivo $(v_3 : v_4 : v_5)$ e $A\delta_x - B\delta_y = 0$ uma curva cúbica.

Portanto, pelo Teorema de Bezout, estas duas curvas se interceptam em no máximo 6 pontos.

Entretanto, se $A = 0$, ambas as equações estão satisfeitas e obtemos então uma das interseções das duas curvas. O ponto de intersecção tem multiplicidade 1, a menos que $A_y = 0$.

Portanto neste caso, o ponto de intersecção correspondente a A não dá uma direção assintótica e as duas curvas acima interceptam em no mínimo 1 e no máximo 5 pontos.



Equação diferencial das linhas assintóticas em \mathbb{R}^5

$$A_0 dy^5 + A_1 dx dy^4 + A_2 dx^2 dy^3 + A_3 dx^3 dy^2 + A_4 dx^4 dy + A_5 dx^5 = 0$$

$$A_0 = \left[\frac{\partial c}{\partial y}, b, c \right]$$

$$A_1 = \left[\frac{\partial c}{\partial x}, b, c \right] + 2 \left[\frac{\partial b}{\partial y}, b, c \right] + \left[\frac{\partial c}{\partial y}, a, c \right]$$

$$A_2 = \left[\frac{\partial c}{\partial x}, a, c \right] + 2 \left[\frac{\partial b}{\partial x}, b, c \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial y}, b, c \right] + 2 \left[\frac{\partial b}{\partial y}, a, c \right] + \left[\frac{\partial c}{\partial y}, a, b \right]$$

$$A_3 = \left[\frac{\partial a}{\partial x}, b, c \right] + 2 \left[\frac{\partial b}{\partial x}, a, c \right] + \left[\frac{\partial c}{\partial x}, a, b \right] + 2 \left[\frac{\partial b}{\partial y}, a, b \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial y}, a, c \right]$$

$$A_4 = \left[\frac{\partial a}{\partial x}, a, c \right] + 2 \left[\frac{\partial b}{\partial x}, a, b \right] + \left[\frac{\partial a}{\partial y}, a, b \right]$$

$$A_5 = \left[\frac{\partial a}{\partial x}, a, b \right]$$

Configurações genéricas das direções assintóticas

Para uma superfície genérica, no mínimo um dos coeficientes da IDE das linhas assintóticas não se anula em ponto qualquer de $q \in M$.

Podemos assumir que a equação das linhas assintóticas perto da origem é uma equação diferencial implícita (IDE) na forma $F = 0$, onde

$$F(x, y, p) = p^5 + A_1(x, y)p^4 + A_2(x, y)p^3 + A_3(x, y)p^2 + A_4(x, y)p + A_5(x, y)$$

As singularidades genéricas desta equação foram estudadas por [Davydov (1994)].



Se $F(0, 0, p)$ tem 5 raízes simples, então, pelo teorema das funções implícitas, as soluções de $F = 0$ consiste de uma rede de 5 famílias de curvas transversais.

Duas tais redes não são homeomorfas. Portanto, modelos discretos topológicos não existem em geral para IDE de grau 5.

Vamos dizer aqui que as duas IDEs acima são equivalentes se as suas soluções são dadas pela união do mesmo número de folheações topologicamente equivalentes.



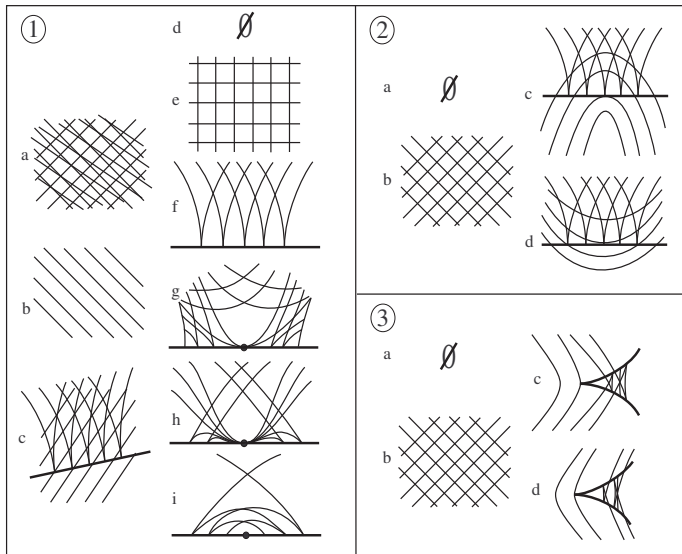
A superfície $F^{-1}(0)$ é genericamente suave e a projeção $\pi : F^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, 0 é genericamente uma submersão ou tem uma singularidade de tipo dobra, cúspide ou dobras transversais. O conjunto de pontos singulares de π é chamado de criminante e sua projeção no plano é o discriminante da IDE.

O campo de direções no plano determinado pela IDE se levanta a um único campo em $F^{-1}(0)$. Este campo é ao longo do campo vetorial

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) p \frac{\partial}{\partial x}$$

Podemos analisar ξ em torno de cada ponto $(0, 0, p_i)$ e projetar no plano para obter a configuração de uma das folheações determinadas pela IDE.





Consequências

Teorema

Suponha que M é uma superfície em \mathbb{R}^5 , com $\chi(M) \neq 0$. Então o discriminante das direções assintóticas não é vazio e as curvas assintóticas tem singularidades de dobras.

Demonstração.

Se Δ é vazio então existe um campo de direções assintóticas globalmente definido em M . Segue da fórmula de Poincaré e da hipótese sobre M que este campo tem pontos singulares em M , o que é uma contradição. \square

Veja também [Challapa and Ruas (2010)]



Corolário

Seja M uma superfície fechada e orientável genericamente imersa em \mathbb{R}^5 com número de Euler $\chi(M)$ não nulo. Então M tem M_2 pontos ou flat ridges.

Demonstração.

Segue da interpretação geométrica das singularidades de dobras da IDE das linhas assintóticas.



Observação

Nas condições do corolário acima, podemos afirmar que existe ponto parabólico de tipo M_2 (isto é interseção do discriminante com a curva M_2), ou ponto de tangência da curva de flat ridges com o discriminante.

Exemplo de imersão 2-regular, [Costa (1982)].






$$\begin{aligned}
 V : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\
 (x, y, z) &\longmapsto (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz).
 \end{aligned}$$

A restrição de V à esfera unitária S^2 define uma imersão 2-regular do plano projetivo em \mathbb{R}^6 , conhecida como a *superfície de Veronese*.






$V(S^2)$ está contida no hiperplano de equação $X + Y + Z = 1$, em que (X, Y, Z, U, W) são coordenadas em \mathbb{R}^6 , e em uma 5-sphere of \mathbb{R}^6 , e portanto numa 4-sphere.

Escolhendo coordenadas em S^2 e no hiperplano $X + Y + Z = 1$, podemos parametrizar localmente $V(S^2)$ $\tilde{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$:






$$\tilde{V} := \left(\frac{y\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}, \frac{x\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}, \frac{xy}{2}, \frac{x^2-y^2}{4}, \frac{3x^2+3y^2-8}{4\sqrt{3}} \right).$$

-  Arnol'd, V. I., Gusein-Zade S. M. and Varchenko A. N. , *Singularities of differentiable maps. Vol. I. The classification of critical points, caustics and wave fronts*. Monographs in Mathematics, 82, (1985), Birkhauser.
-  J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals. In W.L. Marar (Ed.), *Real and Complex Singularities, Pitman Research Notes in Mathematics*, Vol. 333, pp. 148-178 (1995).
-  Challapa, L. and Ruas, M.A.S, Index of an implicit differential equation. *Publ. Mat.*, 54, 173-186.
-  S. I. R. Costa, *Aplicações não singulares de ordem p*. Doctoral Thesis, University of Campinas (1982).
-  S. I. R. Costa; S. M. Moraes; M.C. Romero-Fuster, *Geometric Contacts of Surfaces Immersed in \mathbb{R}^n , $n \geq 5$* . *Differential Geometry and Its Applications*, v. 27, p. 442-454, 2009.






-  A. A. Davydov, *Qualitative control theory*. Translations of Mathematical Monographs 142, AMS, Providence, RI, 1994.
-  Y. Eliašberg and N. Mishachev, *Introduction to the h-Principle*. Graduate Studies in Mathematics, 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
-  E. A. Feldman, Geometry of immersions I. *Transactions AMS* 120 (1965), 185–224.
-  M.L. Gromov and Y. Eliašberg, Elimination of singularities of smooth mappings. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 35 (1971), 600–626.
-  Izumiya S., Romero-Fuster M. C., Ruas M. A. S, and Tari F., *Differential geometry from the singularity theory viewpoint*, in preparation.



-  J.A.Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean space. *Annali Mat. Pura et Appl.* (ser. 4A) **83** (1969), 261-336.
-  Looijenga, E. J. N., *Structural stability of smooth families of C^∞ -functions*, Thesis, University of Amsterdam, 1974.
-  Moore C. and Wilson E., *Differential Geometry of two-dimensional surfaces in hyperspaces*, Proc. Am. Acad. of Arts and Sciences 52, 267-368, (1916).
-  S. M. Moraes and M.C. Romero-Fuster, *Semiumbilics and Normal Fields on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^n , $n > 3$* . Rocky Mountain Journal of Maths., (2004).
-  D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, *Inflection Points and Nonsingular Embeddings of Surfaces in \mathbb{R}^5* . Rocky Mountain Journal of Maths, 33 (2003), no. 33, 995-1010.



-  M. C. Romero-Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Asymptotic curves on surfaces in \mathbb{R}^5* , *Comm. Contemporary Math.*, **???**, 2008.
-  W. Pohl, Differential geometry of higher order. *Topology* 1 (1962), 169–211.
-  Porteous, I., The normal singularities of submanifold, *J. Diff. Geom.*, (1971), **5**, 543–564.

