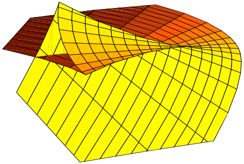
Variedades Determinantais e Singularidades de Matrizes

Maria Aparecida Soares Ruas
ICMC-USP

Encontro Paulista de Mulheres Matemáticas
Campinas, 11 de Março, 2016

Introdução

- singularidades de conjuntos
- singularidades de funções e aplicações



Classes especiais de conjuntos singulares

- Hipersuperfície :

$$V = \{z \in \mathbb{C}^n |\, f(z) = 0\}$$

 (algébrica quando f é um polinômio; analítica quando f é uma função analítica).

- Interseção completa:

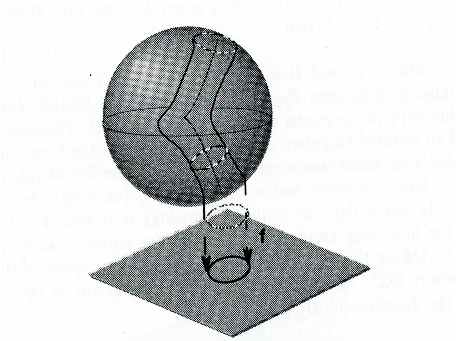
$$V = \{z \in \mathbb{C}^n |\, f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_p(z) = 0\},$$

 quando dim $V = n - p$.

Fibração de Milnor : $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$

John Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, 1968.

$V \cap B_\epsilon$ é topologicamente equivalente a um cone sobre o $K = V \cap S_\epsilon$ link da singularidade.



Fibração de Milnor dentro da bola B_ϵ

A fibra de Milnor F_f é uma variedade diferenciável de dimensão real $2(n-1)$.

Quando $\Sigma_f := \{0\}$, a fibra de Milnor F_f é $n-2$ conexa e tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas de dimensão real $n-1$.

O número de esferas do bouquet é chamado número de Milnor de f .

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \rangle}$$

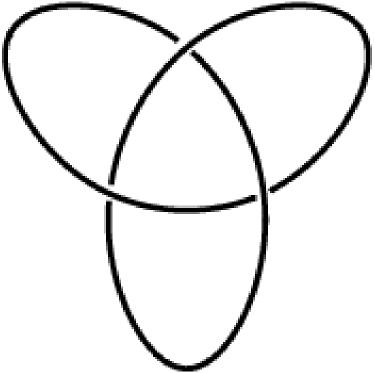
onde $\mathcal{O}_n = \{h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0), h \in C^w\}$, anel local dos germes de funções analíticas.

Exemplo

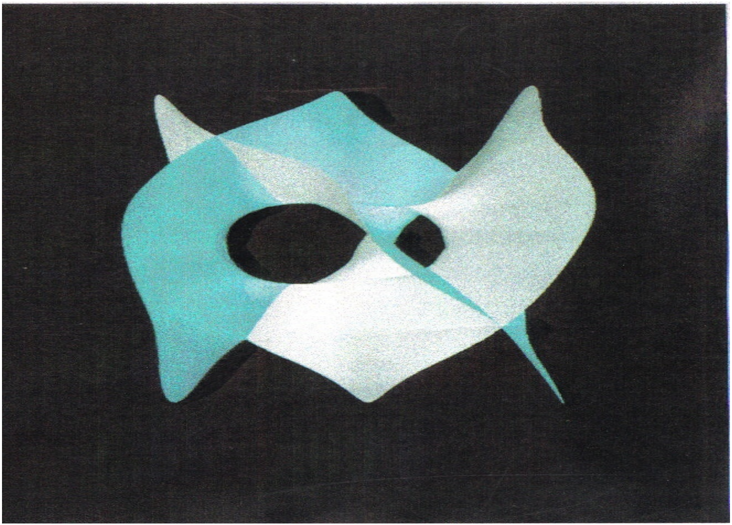
$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \ f(z, w) = z^2 + w^3,$$

$V = f^{-1}(0)$ *é uma curva complexa em* $\mathbb{C}^2$, $\mu(f) = 2$.

The link of V



$V \cap S^3$: Nó de tipo $(2, 3)$ em S^3



Projeção de $z^2 + w^3 = c$, $c \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$

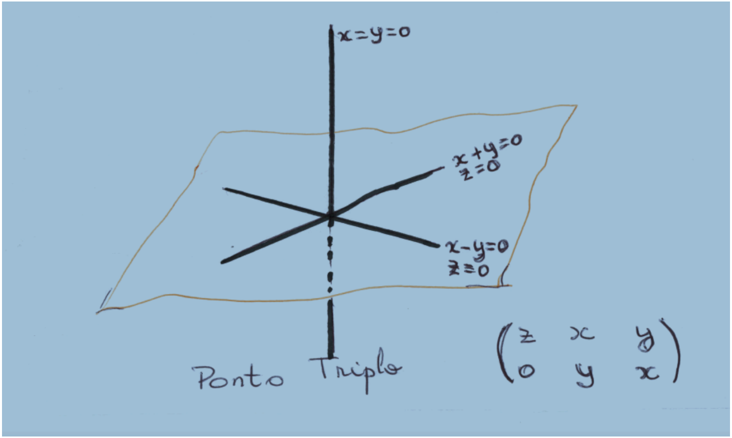
Variedades Determinantais

As variedades determinantais são definidas pelos zeros dos menores de um determinado tamanho de uma matriz, desde que sua dimensão seja a esperada.

- Porque estudar variedades determinantais?

- Na Geometria Algébrica clássica (as variedades de Segre, as variedades de Schubert nas Grassmanianas são VD).
- Conjuntos singulares e discriminantes de aplicações são VD.

- Conjuntos analíticos, por exemplo, curvas espaciais, admitem representações analíticas como VD.



Teses recentes sobre as Variedades Determinantais.

- Miriam Silva Pereira, ICMC, 2010. miriam
  http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-22062010-133339/pt-br.php
- Brian Pike, North Carolina University, 2010. brian
  http://www.brianpike.info/thesis.pdf
- Bruna Oréfice Okamoto, UFSCar, 2011 bruna
  http://www.dm.ufscar.br/ppgm/attachments/article/179/download.pdf
- Nancy Carolina Chachapoyas Siesquén, ICMC and Université Aix Marseille, 2014. nancy
  http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-13022015-100258/pt-br.php

• W. Ebeling and S. M. Gusein-Zade, *On indices of* 1*-forms on determinantal singularities*, *Singularities and Applications*, **267**, 119-131, (2009).

Artigos recentes sobre variedades determinantais.

- J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice Okamoto, J. N. Tomazella, *Israel J. Math.*, **197** (2013), no. 1, 475-495.
- J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice Okamoto, J. N. Tomazella, *Math. Z.* to appear.
- M. A. S. Ruas and M. Silva Pereira, *Math. Scand.*, **115** (2014), no. 2, 161–172.
- T. Gaffney and A. Rangachev, $arXiv$: 1501.00201.
- A. Frühbis-Krüger and M. Zach, preprint.
- J-P Brasselet, N. Chachapoyas and M.A.S. Ruas, $arXiv$: 1504.06518.
- T. Gaffney and M.A.S. Ruas, $arXiv$: 1602.00362.
- N. Chachapoyas, $arXiv$: 1603.00548.

Variedades determinantais genéricas

Definição

Seja $M_{m,n}$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$, e para todo $t \leq \min\{m, n\}$ seja

$$M^t_{m,n} = \{A \in M_{m,n} | rank(A) < t\}.$$

Este conjunto é uma variedade, chamada variedade determinantal genérica.

1. $M^t_{m,n}$ tem codimensão $(n - t + 1)(m - t + 1)$ em $M_{m,n}$
2. O conjunto singular de $M^t_{m,n}$ é $M^{t-1}_{m,n}$
3. $M^t_{m,n} = \cup_{i=1,\dots,t}(M^i_{m,n} \setminus M^{i-1}_{m,n})$, é uma estratificação de Whitney $M^t_{m,n}$.

Variedades Determinantais

Seja $F : U \subset \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$. Para cada x, $F(x) = (f_{ij}(x))$ é uma matriz $m \times n$; as coordenadas f_{ij} são funções analíticas complexas em U.

Definição

Uma variedade determinantal de tipo (m, n, t), num domínio aberto $U \subset \mathbb{C}^N$ é uma variedade X que satisfaz as seguintes condições:

- *X é a pré-image da variedade $M^t_{m,n}$. Isto é $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$.*
- *$codim(X) = (m - t + 1)(n - t + 1)$ em $\mathbb{C}^N$*

Variedades determinantais

Example

Seja F a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcccc} F & : & \mathbb{C}^4 & \to & M_{2,3} \\ & & (x,y,z,w) & \mapsto & \begin{pmatrix} z & y & x \\ w & x & y \end{pmatrix} \end{array}$$

Então $X = F^{-1}(M^2_{2,3}) = V(zx - wy, zy - wx, y^2 - x^2)$, X é uma superfície em $\mathbb{C}^4$ com singularidade isolada na origem.

Singularidades Determinantais Essencialmente Isoladas (EIDS)

As *Singularidades Determinantais Essencialmente Isoladas (EIDS)* foram definidas por Ebeling e Gusein-Zade em [Proc. Steklov Inst. Math. (2009)].

Definição de EIDS:

Um germe $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ de variedade determinantal de tipo (m, n, t) tem uma singularidade determinantal essencialmente isolada na origem (EIDS) se F é transversal a todos os estratos $M^i_{m,n} \setminus M^{i-1}_{m,n}$ da estratificação de $M^t_{m,n}$ numa vizinhança da origem, exceto possivelmente na origem.

O conjunto singular de uma EIDS $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ é a EIDS $F^{-1}(M^{t-1}_{m,n})$.

Deformações de uma EIDS

Deformações (em particular, suavizações (smoothings)) de uma variedade determinantal são também variedades determinantais.

Definição

(Ebeling and Gusein Zade (2009)) *Uma suavização essencial* $\tilde{X}$ *de uma EIDS* $(X, 0)$ *é uma subvariedade definida numa vizinhança* U *da origem em* $\mathbb{C}^N$ *por uma perturbação* $\tilde{F} : U \to M_{m,n}$ *do germe* F *tal que* $\tilde{F}$ *é transversal a todos os estratos* $M^i_{m,n} \setminus M^{i-1}_{m,n}$, *com* $i \leq t$.

Example

Para valores genéricos de a, b, c, $\tilde{N}$ é um smoothing da curva em $\mathbb{C}^3$.

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} z & y+a & x+b \\ c & x & y \end{pmatrix}$$

Singularidades determinantais isoladas (IDS)

Proposição

- *Um EIDS* $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ *de tipo* (m, n, t), *definida por* $F : (\mathbb{C}^N, 0) \to (M_{m,n}, 0)$ *tem uma singularidade isolada na origiem se e somente se* $N \leq (m - t + 2)(n - t + 2)$.
- $(X, 0)$ *tem um smoothing se e somente se* $N < (m - t + 2)(n - t + 2)$.

Example

$F : \mathbb{C}^N \to M_{2,3}, \; N \geq 6, F \pitchfork M^i_{2,3}, \; i = 1, 2.$

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

Quando $N = 6$, a singularidade de $X = F^{-1}(M^2_{2,3})$ é isolada e X não tem smoothing.

A ação de $\mathcal{G}$ em $\{F : (\mathbb{C}^N, 0) \to M_{m,n}\}$

$\mathcal{R} = \{h : (\mathbb{K}^N, 0) \to (\mathbb{K}^N, 0)$, germes de difeomorfismos analíticos $\}$

$\mathcal{H} = GL_m(\mathcal{O}_N) \times GL_n(\mathcal{O}_N)$ e $\mathcal{G} = \mathcal{R} \times \mathcal{H}$ (produto semi-direto)

Definição

Dadas duas matrizes $F_1(x) = (f^1_{ij}(x))_{m\times n}$ e $F_2(x) = (f^2_{ij}(x))_{m\times n}$, dizemos que

$$F_1 \sim F_2 \text{ se } \exists\ (\phi, R, L) \in \mathcal{G} \text{ tal que } \ F_1 = L^{-1}(\phi^* F_2)R.$$

Proposição

Se $F_1 \sim F_2$ então as variedades determinantais correspondentes $X^t_1 = F_1^{-1}(M^t_{m,n})$ e $X^t_2 = F_2^{-1}(M^t_{m,n})$, $1 \leq t \leq m$ são isomorfas.

O grupo $\mathcal{G}$ é um subgrupo geométrico do grupo de contato $\mathcal{K}$. Portanto podemos aplicar os métodos da teoria de singularidades neste caso.

- F é G-estável se e só se existe um representante $F : U \to M_{m,n}$ transversal a todos os estratos da estratificação canônica de $M^n_{m,n}$.

- F é G-finitamente determinado se e só se existe um representante $F : U \to M_{m,n}$ transversal a todos os estratos da estratificação de $M^n_{m,n}$ fora da origem.

F é $\mathcal{G}$-finitamente determinado se e só se $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ é uma EIDS para todo $t \leq \min\{m, n\}$.

Uma perturbação estável $\tilde{F}$ de F define uma suavização essencial $\tilde{X} = \tilde{F}^{-1}(M^t_{m,n})$ of X, para todo $t \leq \min\{m, n\}$.

Example

$$A_k = \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & z^k & x \end{pmatrix}, \forall\, k \geq 1.$$

Esta é a primeira forma normal da classificação das singularidades Cohen-Macaulay de codimensão 2 de A. Fübhis-Kruger e A. Neumer em [Comm. Alg. 38, 454-495, (2010)].

A surperfície $X_k \subset \mathbb{C}^4$ associada a A_k é definida pelo ideal $\left\langle xz^k - yw, x^2 - zw, xy - z^{k+1} \right\rangle$.

O desdobramento versal de F_k é

$$\tilde{F}_k(x, y, z, w, u_0, u_1, \ldots, u_k) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & z^k + \Sigma_0^{k-1} u_i z^i & x + u_k \end{pmatrix},$$

$$\tau(F_k) = k + 1.$$

Fibração singular de uma EIDS

$$F:(\mathbb{C}^N,0)\to M_{m,n},\ (X,0)=F^{-1}(M^t_{m,n})$$

$$\widetilde{F}:W\subset\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^s\to M_{m,n}, \widetilde{F}(x,0)=F(x),\ \widetilde{F}\pitchfork\{M^i_{m,n}\backslash M^{i-1}_{m,n}\},\ \mathfrak{X}=\widetilde{F}^{-1}(M$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \subset & W\subset\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^s \\ & & \downarrow\pi \\ B(F) & \subset & \mathbb{C}^s \end{array},$$

onde $B(F)$ é o conjunto de bifurcação.

Para $u\in\mathbb{C}^s\setminus B(F)$, $\widetilde{F}_u$ define $\widetilde{X}_u$ que é uma suavização essencial de X.
A fibra genérica $\widetilde{X}_u$ está bem definida.

Invariantes de EIDS

Definição

(Damon and Pike [Geom. Topol., **18**(2) (2014)], Ebeling and Gusein-Zade (2009)) *A* *característica de Euler evanescente singular de X*, *é definida como*

$$\bar{\chi}(X) = \bar{\chi}(\widetilde{X}_u) = \chi(\widetilde{X}_u) - 1.$$

(Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto and Tomazella [Israel J. Math. **197** (2013), 475-495.]) *Quando $\widetilde{X}_u$ é suave,*

$$\nu(X) = (-1)^{dim(X)}(\chi(\widetilde{X}_u) - 1).$$

Singularidades isoladas que admitem smoothing: N < (m-t+2)(n-t+2)

Se $X \subset \mathbb{C}^N$ é uma variedade normal que admite suavização, então $b_1(X_u) = 0$ (Greuel and Steenbrink [*Proc. Symp. Pure Math.* **40**,(1983).])

Teorema

(Nuno-Ballesteros, Oréfice-Okamoto and Tomazella [Israel J. 2013]) *Seja $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ uma função linear genérica e $\widetilde{X}$ uma suavização essencial de X. Então*

$$\#\Sigma(p|_{\widetilde{X}}) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap p^{-1}(0), 0),$$

one $\#\Sigma(p|_{\widetilde{X}})$ indica o número de pontos críticos de $p|_{\widetilde{X}}$.

Notação: $\#\Sigma(p|_{\widetilde{X}}) = m_d(X)$, onde d é a dimensão de X.

Superfícies Determinantais

M. S. Pereira and M. Ruas [Math. Scand., 2014], Nuno-Ballesteros, Oréfice-Okamoto and Tomazella [Israel J., 2013], Damon and Pike [Geom. Topol. 2014].

Número de Milnor de uma superfície determinantal em $\mathbb{C}^N$,

O número de Milnor de X em 0, denotado por $\mu(X)$, é definido como $\mu(X) = b_2(X_u)$, onde X_u é a fibra genérica de X e $b_2(X_u)$ é o 2*o*. número de Betti.

Fórmula de Le-Greuel

Proposição: [Math. Scand. 2014], [Israel J. 2013], [Geom. Top. 2014]

Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ uma IDS 2-dimensional. Seja $p:(\mathbb{C}^N,0) \to (\mathbb{C},0)$ uma função linear genérica definida em X. Então,

$$\mu(X) + \mu(X \cap p^{-1}(0)) = m_2(X).$$

M.S. Pereira'conjecture, Ph. Thesis (2010)

([Math. Scand. 2014], [Geom. Top. 2014])
If $X^2 \subset \mathbb{C}^4$ is a simple 2-dimensional IDS, then $\mu(X) + 1 = \tau(X)$

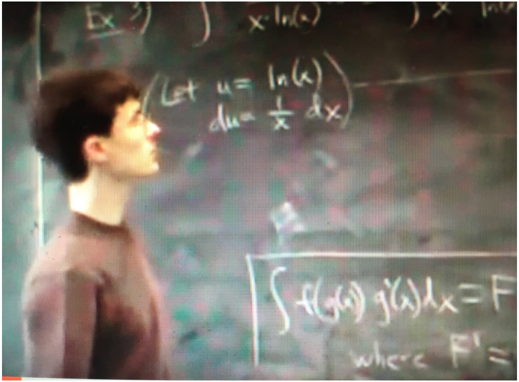
Miriam

Bruna

Nancy


USP and AMU
Invariants of determinantal varieties 1
Nancy Carolina Chachapoyas Siesquén
Advisors: Maria Ruas and Jean-Paul Brasselet
nancy@icmc.usp.br
Universidade de São Paulo
Aix -Marseille Université
24 October 2014

Brian



Muito obrigada!!!