ANÁLISE E TOPOLOGIA

1º SEMESTRE

Estudaremos neste curso alguns dos conceitos centrais da análise matemática: números reais, derivadas, séries e integrais.

1. Espaços topológicos e métricos

Todos estes conceitos são baseados na ideia fundamental de *continuidade*. A ciência que trata da continuidade se chama *topologia*. Informalmente, poderíamos dizer que a topologia estuda as propriedades e grandezas de um espaço que não variam quando deformamos este espaço de modo contínuo.

[Exemplos desenhados] Comentários: superfície dos tetraedro/esfera/toro (primeiro deforma no segundo mas segundo não se deforma no terceiro). circunferência, nó e segmento (deformação existe, mas em outro espaço). [Todos estes exemplos podem ser vistos como diferentes topologias em um mesmo conjunto.]

Necessitamos, antes de mais nada, de uma definição exata de "espaço". Tal definição deve ser aplicável em muitas circunstâncias diferentes e, por isto, é natural[1] que seja bastante abstrata.

1.1. Definição. Um *espaço topológico* é um conjunto X no qual é especificada uma família de subconjuntos, chamados *conjuntos abertos* ou simplesmente *abertos*, satisfazendo as seguintes condições:

1. o próprio espaço X e o subconjunto vazio $\varnothing$ são conjuntos abertos;
2. a união de qualquer família de conjuntos abertos é um conjunto aberto;
3. a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

A família de conjuntos abertos de X é uma *topologia* em X.

Dada uma topologia em X, chamamos os abertos que contêm um ponto $x \in X$ de *vizinhanças* de x.

Como veremos nos exemplos a seguir, a palavra *vizinhança* dá uma ideia intuitiva do que é uma dada topologia em um conjunto. De fato, ao indicar os conjuntos abertos em X (isto é, ao fixar uma topologia em X), estamos especificando "graus de proximidade" entre pontos de X. Quando dois pontos estão em uma mesma vizinhança, eles são "próximos" no sentido deste aberto.

1.2. Exemplo. Declaramos abertos apenas dois subconjuntos de X: $\varnothing$ e o próprio X. Esta se chama a *topologia trivial* em X, na qual cada ponto possui apenas uma vizinhança, que é todo o conjunto X. Assim, um ponto está "tão próximo" de qualquer outro quanto de si mesmo.

1.3. Exemplo. Declaramos como abertos todos os subconjuntos de X. Esta se chama a *topologia discreta* em X. Cada ponto é uma vizinhança de si mesmo; portanto, todos os pontos estão igualmente "afastados" uns dos outros.

Agora introduzimos a *topologia usual* no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Esta será em geral pressuposta.

[1] Hoje em dia, a topologia é essencial em vários campos do conhecimento: matemática, física, biologia, computação, ciência dos materiais, etc.

1.4. Exemplo. Declaramos um subconjunto $U \subset \mathbb{R}$ como aberto se, para cada ponto $x \in U$, existe um número (real) $\varepsilon > 0$ tal que todo y satisfazendo a condição $|x - y| < \varepsilon$ também está em U. Aqui, a topologia se origina de uma *métrica*: a função $\mathrm{d}(x, y) := |x - y|$, definida para pares de números reais, com valores reais, nos fornece uma medida da distância entre os números x e y. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é aberto quando contém todos os pontos "suficientemente próximos" a cada um dos seus pontos.

O fato que os axiomas 1–3 de espaço topológico são satisfeitos no exemplo acima segue do Exercício 1.12.

Muitos exemplos importantes de espaços topológicos têm origem similar àquela do Exemplo 1.4. Ocorre que será muito útil medir distâncias entre objetos matemáticos variados (por exemplo, mediremos distâncias entre funções de vários tipos, entre matrizes, etc.).

1.5. Definição. Um *espaço métrico* é um conjunto X e uma função d, chamada *métrica,* definida em pares de pontos de X, com valores reais, satisfazendo as seguintes condições:

1. $\mathrm{d}(x, y) \geqslant 0$ para todos $x, y \in X$ e $\mathrm{d}(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
2. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ para todos $x, y \in X$ (*simetria*);
3. $\mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$ (*desigualdade triangular*).

1.6. Exercício. Mostre que o conjunto $\mathbb{R}$ munido da função $\mathrm{d}(x, y) := |x - y|$ é um espaço métrico.

Consideremos outros exemplos de espaços métricos. Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais ("coordenadas") $(x_1, \dots, x_n)$. Este conjunto chama-se o *espaço coordenado n-dimensional*. Para $n = 2$, é o plano coordenado; para $n = 3$, é o espaço (tridimensional) coordenado "usual". Em $\mathbb{R}^n$ pode-se introduzir as seguintes métricas (dentre outras):

1.7. Exemplos. Em $\mathbb{R}^n$, sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. Definimos as seguintes métricas:

1.7.1. Métrica L^p. Fixamos um número real $p \geqslant 1$ e definimos

$$\mathrm{d}_p(x, y) := \big(|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p\big)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$, obtemos no plano ou no espaço coordenados a métrica *Euclidiana* que vocês estudaram no colegial (convençam-se disto!)

1.7.2. Métrica L^∞: $\mathrm{d}_\infty(x, y) := \max\big\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\big\}$.

1.8. Exercício. Mostre que d_1 e d_∞ são de fato métricas.

A demonstração da desigualdade triangular para a métrica L^p com $p > 1$ é um pouco mais complicada e será melhor realizá-la quando já tivermos em mãos uma ferramenta da análise chamada derivada. Por isto, tal demonstração fica adiada (veja o Problema ???).

1.9. Definição. Seja X um espaço métrico com métrica d. Sejam $c \in X$ um ponto e $r > 0$ um número real. Definimos a *bola aberta com centro c e raio r* através da expressão

$$B_r(c) := \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, c) < r\}.$$

Em palavras, a bola aberta com centro c e raio r é o conjunto de todos os pontos de X cuja distância a c é menor do que r.

1.10. Exercício. Desenhe uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$ para as métricas L^1, L^2 e L^∞. A métrica L^1 também se chama *métrica de Manhattan,* ou *métrica do taxista.*

Como no Exemplo 1.4, uma métrica introduz uma topologia em qualquer espaço métrico:

1.11. Definição. Seja X um espaço métrico. Declaramos um subconjunto $U \subset X$ como aberto se, para todo ponto $x \in U$, existe uma bola aberta com centro em x, contida em U (i.e., existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$).

1.12. Exercício. Mostre que a coleção de conjuntos abertos definida acima satisfaz os axiomas de espaço topológico.

1.13. Exercício. Verifique que bola aberta em espaço métrico é um conjunto aberto (para isto, será necessário utilizar a desigualdade triangular). Deste modo, o uso da palavra "aberto" não ganha duplo sentido.

1.14. Exercício. Munimos um conjunto X da seguinte métrica: $\mathrm{d}(x, y) = 0$ se $x = y$ e $\mathrm{d}(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Qual é a topologia que d define em X?

Métricas diferentes podem definir a mesma topologia em um dado conjunto X. Segue um exemplo deste fenômeno.

1.15. Exemplo. *Todas as métricas L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ definem em $\mathbb{R}^n$ uma mesma topologia, chamada a topologia* usual *em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. É fácil ver que, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, são válidas as desigualdades

$$\mathrm{d}_\infty(x, y) \leqslant \mathrm{d}_p(x, y) \leqslant n^{1/p} \cdot \mathrm{d}_\infty(x, y).$$

Destas desigualdades segue que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $r > 0$, temos

$$B_{r,\mathrm{d}_p}(x) \subset B_{r,\mathrm{d}_\infty}(x) \subset B_{n^{1/p}r,\mathrm{d}_p}(x).$$

Logo, um subconjunto em $\mathbb{R}^n$ é aberto relativamente à métrica L^p, onde $p < \infty$, se e só se ele é aberto relativamente à métrica L^∞. ∎

Em geral, assumiremos $\mathbb{R}^n$ munido da topologia usual.

Não é verdade que toda topologia vem de uma métrica. Um caso bobo é o da topologia trivial apresentada no Exemplo 1.2 (você deve se convencer disto), mas há exemplos muito mais sofisticados, mesmo no conjunto $\mathbb{R}$. Isto quer dizer que não há necessariamente em um espaço topológico um conceito quantitativo de distância. Mas a topologia nos dá uma ideia "qualitativa" de distância.

1.16. Proposição. *Seja X um espaço topológico*; *um subconjunto de X é aberto se e só se ele contém alguma vizinhança de cada um de seus pontos.*

Demonstração. Se um subconjunto $U \subset X$ contém uma vizinhança U_x de cada ponto $x \in U$, isto é, $x \in U_x \subset U$, então ele é a união de tais U_x e, por isto mesmo, é aberto (como união de conjuntos abertos). Se, reciprocamente, o conjunto U é aberto, ele próprio é uma vizinhança de cada um de seus pontos. ∎

Como veremos na próxima seção, a ideia de "proximidade" fornecida pela topologia é exatamente o que precisamos para estudar a continuidade de funções. Antes, apresentamos mais uma definição fundamental.

1.17. Definição. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $F \subset X$ é dito *conjunto fechado* ou simplesmente *fechado* se o seu complementar $X \setminus F \subset X$ é aberto (logo, um conjunto é aberto se o seu complementar é fechado).

Utilizando as fórmulas $X \setminus \big(\bigcup_{i\in I} U_i\big) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i)$ e $X \setminus \big(\bigcap_{i\in I} U_i\big) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus U_i)$, válidas para quaisquer subconjuntos $U_i \subset X$, $i \in I$, de um conjunto X dado, podemos reescrever os axiomas 1–3 de espaço topológico em termos de fechados:

1.18. Observação. Seja X um espaço topológico. Então

1. o próprio espaço X e o subconjunto vazio $\varnothing$ são conjuntos fechados;
2. a interseção de qualquer família de conjuntos fechados é um conjunto fechado;
3. a união de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

1.19. Definição. Seja X um espaço topológico e seja $S \subset X$ um subconjunto de X. O *fecho* de S é a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm S. Denotamos o fecho de S por $\overline{S}$.

Pelo item 2 da Observação 1.18, o fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado. É claro que o fecho de S é o menor conjunto fechado que contém S.

O sentido informal do conceito de fecho é o seguinte. Todos os pontos de S estão também no seu fecho, isto é, $S \subset \overline{S}$. A diferença entre $\overline{S}$ e S, se há, é constituída por pontos de X que não pertencem a S mas que estão "arbitrariamente próximos" a S. Tais pontos não existem exatamente quando S é um conjunto fechado. Em outras palavras, temos o

1.20. Lema. *Seja X um espaço topológico e seja $S \subset X$. Então $\overline{S}$ é formado por todos os pontos $x \in X$ satisfazendo a seguinte propriedade*:

$$\textit{vale } U \cap S \neq \varnothing \textit{ para toda vizinhança } U \ni x.$$

Demonstração. Por definição de fecho, $x \in \overline{S}$ é equivalente a $x \in F$ para todo fechado $F \supset S$. Reformulando esta afirmação em termos do aberto complementar $U := X \setminus F$, vemos que $x \in \overline{S}$ é equivalente a $x \notin U$ para qualquer aberto U disjunto de S, i.e., $U \cap S = \varnothing$. Esta última formulação, por sua vez, é equivalente à enunciada. ∎

2. Continuidade. Topologias induzidas

Informalmente, uma função entre dois espaços topológicos é contínua em um certo ponto se ela leva pontos "próximos" a este em pontos "próximos" à imagem deste.

2.1. Definição. Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. A função f é dita *contínua no ponto* $x \in X$ se, para toda vizinhança $V \ni f(x)$, existe uma vizinhança $U \ni x$ tal que $fU \subset V$. A função f é *contínua* se for contínua em *todos* os pontos $x \in X$.

2.2. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos. A função $f : X \to Y$ é contínua se e só se, para todo conjunto aberto* (*fechado*) *$V \subset Y$, a imagem inversa $f^{-1}V \subset X$ também é um conjunto aberto* (*fechado*).

Demonstração. Inicialmente, suponha f contínua. Seja $V \subset Y$ um aberto. Queremos mostrar que $f^{-1}V$ é aberto em X. Seja $x \in f^{-1}V$. Então $f(x) \in V$. Pela Definição 2.1, existe um aberto $U_x \subset X$ tal que $x \in U_x$ e $fU_x \subset V$. Logo, $U_x \subset f^{-1}V$. Obtemos assim uma vizinhança U_x do ponto x contida em $f^{-1}V$. Como o ponto x é um ponto arbitrário em $f^{-1}V$, segue da Proposição 1.16 que $f^{-1}V$ é aberto.

Reciprocamente, vamos supor que as imagens inversas de todos os conjuntos abertos sejam abertas. Seja $x \in X$ e seja $V \ni f(x)$ uma vizinhança de $f(x)$. Então $U := f^{-1}V$ é uma vizinhança de x tal que $fU \subset V$.

O resultado análogo para fechados é uma consequência direta da fórmula $f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}Y \setminus f^{-1}V = X \setminus f^{-1}V$, válida para qualquer subconjunto $V \subset Y$. ∎

2.3. Exercício. Sejam X, Y e Z espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma função contínua no ponto $x \in X$ e $g : Y \to Z$ uma função contínua no ponto $f(x) \in Y$. Mostre que a função composta $g \circ f : X \to Z$ é contínua no ponto x. Consequentemente, a composta de funções contínuas é uma função contínua.

2.4. Definição. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função contínua $f : X \to Y$ é um *homeomorfismo* se é bijetora e se a função inversa f^{-1} também é contínua. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, estes são *homeomorfos.*

Espaços homeomorfos podem ser tratados como “iguais” pois, via o homeomorfismo, seus abertos são “os mesmos”.

Utilizando o conceito de continuidade, estudaremos agora a noção fundamental de *topologia induzida.*

2.5. Definição. Seja $f : X \to Y$ uma função de um *conjunto* X para um *espaço topológico* Y. Definimos a topologia *induzida* ou *inicial* em X declarando como abertos em X as imagens inversas de conjuntos abertos em Y.

Os axiomas de espaço topológico são uma consequência direta das fórmulas $f^{-1}\varnothing = \varnothing$, $f^{-1}Y = X$, $\bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}V_i = f^{-1}\big(\bigcup\limits_{i\in I} V_i\big)$ e $\bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}V_i = f^{-1}\big(\bigcap\limits_{i\in I} V_i\big)$, válidas para quaisquer subconjuntos $V_i \subset Y$, $i \in I$.

Dadas duas topologias τ_1, τ_2 em um conjunto X, dizemos que a topologia τ_1 é *mais grossa, mais fraca* ou *menor* do que a topologia τ_2 (τ_2 é *mais fina, mais forte* ou *maior* do que τ_1) se todo aberto com repeito à τ_1 é aberto com respeito à τ_2. Pela Proposição 2.2, se uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é contínua, ela permanece contínua se trocarmos a topologia em X por uma outra mais fina ou se trocamos a topologia em Y por outra mais grossa.

No âmbito da Definição 2.5, a topologia discreta em X faz qualquer função $f : X \to Y$ contínua. A topologia inicial, ao contrário, é *a mais grossa* que faz f contínua.

2.6. Exercício. Prove que X está munido da topologia inicial exatamente quando é válida a seguinte propriedade [adicionar diagrama ao lado da propriedade]:

Dados um espaço topológico Z e uma função $g : Z \to X$, então
g é contínua se e só se a composta $f \circ g : Z \to Y$ é contínua.

Esta é a propriedade que caracteriza a topologia inicial. Ela é dita *universal.*

Acabamos de induzir a topologia “na direção oposta à seta”. Vamos agora induzir a topologia “na direção da seta”.

2.7. Definição. Seja $f : X \to Y$ uma função de um *espaço topológico* X para um *conjunto* Y. Definimos a topologia *induzida* ou *final* em Y declarando como abertos em Y os subconjuntos cuja imagem inversa é aberta em X.

Pelas mesmas razões apresentadas após a Definição 2.4, a topologia final satisfaz os axiomas de espaço topológico.

A topologia trivial em Y faz qualquer função $f : X \to Y$ contínua. A topologia final, ao contrário, é *a mais fina* que faz f contínua.

2.8. Exercício. Prove que Y está munido da topologia final exatamente quando é válida a seguinte propriedade [adicionar diagrama ao lado da propriedade]:

Dados um espaço topológico Z e uma função $g : Y \to Z$, então
g é contínua se e só se a composta $g \circ f : X \to Z$ é contínua.

Esta é a propriedade que caracteriza a topologia inicial. Ela também é dita *universal.*

2.9. Exercício. Qual é a topologia final determinada pela função $\varnothing \to Y$? Qual é a topologia inicial determinada pela função $X \to *$, onde $*$ denota o espaço topológico com um único ponto?

Apresentaremos agora três casos particulares e importantes de topologias induzidas: a topologia do subespaço, a topologia do quociente e a topologia do produto.

2.10. Definição. Seja X um espaço topológico e seja $S \subset X$ um subconjunto de X. A topologia induzida em S pela inclusão $\iota : S \hookrightarrow X$ é dita a *topologia do subespaço* em S. Como $\iota^{-1}U = U \cap S$ para qualquer subconjunto $U \subset X$, os abertos na topologia do subespaço são, pela Definição 2.5, todos os conjuntos da forma $U \cap S$ onde U percorre todos os abertos em X. Os subconjuntos de um espaço topológico serão tratados como subespaços, ou seja, como munidos da topologia do subespaço (salvo se o contrário for explicitamente dito).

2.11. Exercício. Mostre que, na topologia do subespaço, os fechados em $S \subset X$ são os subconjuntos da forma $F \cap S$, onde F percorre todos os fechados em X.

2.12. Definição. Seja X um espaço topológico e seja $\sim$ uma relação de equivalência em X. A topologia induzida no espaço quociente $X/\sim$ pelo epimorfismo canônico $f : X \to X/\sim$ é dita a *topologia do quociente.*

2.13. Exercício. Considere o intervalo fechado $I := [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ como um subespaço do conjunto $\mathbb{R}$. Tomamos em I a relação de equivalência $\sim$ que identifica os extremos 0 e 2π. Mostre que $I/\sim$, com a topologia do quociente, é homeomorfo à circunferência $\mathbb{S}^1 := \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$ considerada como subespaço do plano coordenado $\mathbb{R}^2$.

2.14. Exercício. Seja $f : [a, b) \to \mathbb{S}^1$ uma bijeção de um intervalo semi-aberto para a circunferência $\mathbb{S}^1$ definida no exercício anterior. Mostre que $[a, b)$ munido da topologia inicial é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Resta considerar a topologia do produto. Sejam X_1, X_2 espaços topológicos e seja $X_1 \times X_2$ o seu produto cartesiano munido das projeções canônicas $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ e $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$. A topologia "adequada" em $X_1 \times X_2$ deve ser a mais grossa que faz contínuas *ambas* as projeções canônicas. Portanto, ela deve ser a menor que contém tanto a topologia inicial definida por π_1 quanto a topologia inicial definida por π_2.

2.15. Definição. Sejam X_1, X_2 espaços topológicos e sejam $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ e $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ as projeções canônicas. A *topologia do produto* em $X_1 \times X_2$ é aquela *gerada* por todos os conjuntos da forma $U_1 \times U_2$, com $U_1 \subset X_1$ e $U_2 \subset X_2$ abertos. Isto significa que os conjuntos abertos de $X_1 \times X_2$ são uniões (possivelmente infinitas) de subconjuntos, chamados *básicos*, da forma $U_1 \times U_2$, com $U_1 \subset X_1$ e $U_2 \subset X_2$ abertos.

Neste curso, não utilizaremos o produto de uma quantidade *infinita* de espaços topológicos. Mesmo assim, cabe observar que podemos introduzir, de modo semelhante ao apresentado acima, a topologia no produto cartesiano $\prod\limits_{i\in I} X_i$ de uma família (finita ou infinita) X_i, $i \in I$, de espaços topológicos: tal topologia é a gerada por todos os conjuntos da forma $\prod\limits_{i\in I} U_i$, com $U_i \subset X_i$ abertos tais que $U_i = X_i$ exceto para um número finito de índices $i \in I$.

2.16. Exercício. Mostre que esta é uma topologia e que é a mais grossa que faz contínuas as projeções.

2.17. Exercício. Prove que $X_1 \times X_2$ está munido da topologia do produto exatamente quando é válida a seguinte propriedade [adicionar diagrama ao lado da propriedade]:

Dados um espaço topológico X e uma função $f : X \to X_1 \times X_2$, então
f é contínua se e só se as compostas $\pi_1 \circ f : X \to X_1$ e $\pi_2 \circ f : X \to X_2$ são contínuas.

Esta é a propriedade que caracteriza a topologia produto. Ela é dita *universal.*

O próximo lema sumariza várias propriedades de funções contínuas que utilizaremos com frequência.

2.18. Lema. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos, sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções, sejam $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ subespaços, sejam $\pi_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$ projeções do produto de espaços topológicos X_i, $i \in I$, e sejam $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, funções contínuas.*

1. *Se f e g são contínuas, então $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*
2. *Se f é contínua, a restrição $f|_{X'} : X' \to Y$ é contínua.*

3. *Suponhamos que $fX \subset Y'$. Então f é contínua se e só se a correspondente função $f' : X \to Y'$ é contínua.*

4. *Sejam $U_i \subset X$, $i \in I$, conjuntos abertos tais que $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Então f é contínua se e só se todas as restrições $f|_{U_i} : U_i \to Y$, $i \in I$, são contínuas. Em outras palavras, "ser contínua" é uma* propriedade local *de uma função. Este item é conhecido como o* lema da colagem *para abertos.*

5. *Sejam $F_1, F_2 \subset X$ conjuntos fechados tais que $F_1 \cup F_2 = X$. Então f é contínua se e só se as restrições $f|_{F_1}$ e $f|_{F_2}$ são contínuas. Este é o* lema da colagem *para fechados.*

6. *Existe uma única função contínua $h : X \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ tal que $\pi_i \circ h = f_i$ para todo $i \in I$. Esta é a mesma propriedade* universal *do produto apresentada no Exercício* 2.17.

Demonstração. **1.** Vide o Exercício 2.3.

2. Segue do item anterior.

3. Sendo $f = \iota \circ f'$, onde $\iota : Y' \hookrightarrow Y$ é a inclusão, f é contínua caso f' seja contínua pelo item 1. A recíproca vale pelo Exercício 2.6.

4. Vamos supor que todas as restrições $f|_{U_i} : U_i \to Y$, $i \in I$, são contínuas. Seja $V \subset Y$ aberto. Como $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, temos $f^{-1}V = \bigcup\limits_{i\in I} (f^{-1}V \cap U_i)$, ou seja, $f^{-1}V = \bigcup\limits_{i\in I} (f|_{U_i})^{-1}V$. Resta observar que cada subconjunto $(f|_{U_i})^{-1}V$, sendo aberto em U_i, é também aberto em X (mostre este fato simples).

A recíproca segue do item 2.

5. Procedemos como no item 4. Vamos supor que as restrições $f|_{F_1}$ e $f|_{F_2}$ são contínuas. Seja $F \subset Y$ um fechado. Temos $f^{-1}F = (f|_{F_1})^{-1}F \cup (f|_{F_2})^{-1}F$. Pela continuidade de $f|_{F_1}$ e $f|_{F_2}$, os subconjuntos $f|_{F_i}^{-1}F$ são fechados em F_i e, portanto, são fechados em X (aqui você precisa entender que "fechado em fechado é fechado"; para isto, basta utilizar o Exercício 2.11). Logo, $f^{-1}F$ é fechado em X. Pela Proposição 2.2, f é contínua.

A recíproca segue do item 2.

6. As existência e unicidade de h valem no nível de conjuntos. O fato que tal h é contínua segue da propriedade universal do produto (vide o Exercício 2.17). ■

Terminamos esta seção com uma definição simples, porém importante.

2.19. Definição. Um espaço topológico X é dito *Hausdorff* se, para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existem conjuntos abertos $U \ni x$ e $V \ni y$ tais que $U \cap V = \varnothing$. Em outras palavras, em um espaço Hausdorff, é sempre possível *separar* dois pontos utilizando vizinhanças disjuntas de cada um deles.

Em um espaço Hausdorff, em particular, não há pontos distintos "arbitrariamente próximos" um do outro.

Todo espaço métrico é Hausdorff, pois as bolas abertas $B_{d/2}(x)$ e $B_{d/2}(y)$ são disjuntas pela desigualdade triangular, onde $d := \mathrm{d}(x, y)$.

Embora a maioria dos espaços topológicos com os quais lidaremos neste curso sejam Hausdorff, os espaços não-Hausdorff também se encontram na natureza.

2.20. Proposição. *Um espaço topológico X é Hausdorff se e só se a* diagonal $\triangle = \big\{(x, x) \mid x \in X\big\}$ *é um conjunto fechado de $X \times X$ (com a topologia do produto).*

Demonstração. Denotemos $W := (X \times X) \setminus \triangle$.

Suponha que a diagonal é fechada. Então W é aberto. Sejam $x, y \in X$ pontos distintos, isto é, $(x, y) \in W$. Pela Definição 2.15, podemos encontrar um aberto da forma $U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subset W$, onde $U \ni x$ e $V \ni y$ são abertos em X. Temos $U \cap V = \varnothing$, pois $(U \times V) \cap \triangle = \varnothing$.

Reciprocamente, suponha X Hausdorff. Vamos mostrar que W é aberto. Seja $(x,y) \in W$, $x \neq y$, um ponto arbitrário em W. Como X é Hausdorff, existem vizinhanças disjuntas $U \ni x$ e $V \ni y$, $U \cap V = \varnothing$. Portanto, $U \times V$ é uma vizinhança de (x,y) contida em W, $(x,y) \in U \times V \subset W$. O resultado segue da Proposição 1.16. ∎

2.21. Exercício. Mostre que a *aplicação diagonal* $f : X \to X \times X$, $x \mapsto (x,x)$, é um homeomorfismo $X \simeq \triangle$ entre X e a diagonal $\triangle$.

3. Bases de abertos. Limites

Como vimos na Definição 2.15 de topologia do produto, para introduzir uma topologia em um conjunto X não é necessário listar todos os abertos; basta indicar uma certa família de abertos que *gera* a topologia.

3.1. Definição. Uma topologia em um conjunto X é *gerada* por uma família de conjuntos abertos quando todo aberto em X é uma união (possivelmente infinita) de conjuntos da família. Neste caso, dizemos que a família de abertos é uma *base de abertos* ou simplesmente uma *base* para a topologia em X.

Dizendo informalmente, uma base para a topologia é uma certa fonte de abertos que são arbitrariamente pequenos.

3.2. Critério. *Seja X um conjunto. Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X gera uma topologia em X se e só se satisfaz a seguinte propriedade: a interseção de qualquer subfamília finita de $\mathcal{F}$ é a união de uma subfamília (possivelmente infinita) de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{F}$ satifaça a propriedade enunciada. Seja τ a família dos subconjuntos de X formada por todas as uniões de subfamílias de $\mathcal{F}$. Vamos mostrar que τ é uma topologia.

O conjunto vazio $\varnothing$ pertence a τ, pois é obtido como a união da subfamília vazia de $\mathcal{F}$. A interseção da subfamília vazia de $\mathcal{F}$ é X e, portanto, X pertence a τ pela propriedade de $\mathcal{F}$. É óbvio que qualquer união de conjuntos pertencentes a τ produz um conjunto pertencente a τ. Finalmente, se $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ e $\bigcup\limits_{j\in J} U_j$ são conjuntos pertencentes a τ, então $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \cap \bigcup\limits_{j\in J} U_j = \bigcup\limits_{i,j} U_i \cap U_j$ pertence a τ pela propriedade de $\mathcal{F}$.

A recíproca é imediata. ∎

3.3. Exemplo. Pelo Critério 3.2, em um espaço métrico X, a família de bolas abertas $B_r(x)$ com $x \in X$ e $r > 0$ formam uma base para a topologia determinada pela métrica. Mais ainda: basta considerar apenas as bolas abertas $B_r(x)$ com $x \in X$ e com raio $r < r_0$ limitado por qualquer constante $0 < r_0 \in \mathbb{R}$.

Em particular, as bolas abertas de cada uma das métricas L^p formam uma base para a topologia de $\mathbb{R}^n$ (você provavelmente desenhou algumas destas bolas abertas no Exercício 1.10.)

3.4. Exemplo. Um *retângulo aberto* no plano coordenado $\mathbb{R}^2$ é um subconjunto da forma $(a_1,b_1) \times (a_2,b_2)$. Os retângulos abertos formam uma base para a topologia do plano coordenado. Mais geralmente, os "retângulos" abertos $(a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$ em $\mathbb{R}^n$ geram a topologia do $\mathbb{R}^n$.

3.5. Exercício. Mostre que $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo ao produto de n cópias de $\mathbb{R}$.

3.6. Definição. Um subconjunto S de um espaço topológico X é *denso* em X se $\overline{S} = X$.

Pelo Lema 1.20, se S é denso no espaço topológico X, então qualquer vizinhança de um ponto arbitrário de X contém algum ponto de S. Em outras palavras, sempre há pontos de S "arbitrariamente próximos" a qualquer ponto de X. No caso em que X é um espaço métrico, isto se traduz assim:

3.7. Observação. Sejam X um espaço métrico, $S \subset X$ um subconjunto denso e $x \in X$ um ponto. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um ponto $s \in S$ tal que $\mathrm{d}(x, s) < \varepsilon$.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Este fato não-trivial, cuja prova fica adiada (vide o Teorema ???), será utilizado na demonstração da Proposição 3.8.

Espaços "bem-comportados" normalmente admitem uma base formada por uma quantidade *enumerável* de abertos, ou seja, têm *base enumerável.* Utilizando o conceito de densidade, é fácil caracterizar os espaços métricos que possuem base enumerável.

3.8. Proposição. *Um espaço métrico X possui base enumerável se e só se ele possui um subconjunto enumerável denso.*

Demonstração. Suponhamos que X possui um subconjunto enumerável denso S. Então a família $\mathcal{F}$ de bolas abertas com raio racional e centro em S é enumerável. Vamos provar que $\mathcal{F}$ é uma base para a topologia em X.

Seja $U \subset X$ um conjunto aberto e seja $x \in U$. Para $r > 0$ suficientemente pequeno, a bola $B_{3r}(x)$ está contida em U. Utilizando a Observação 3.7, encontramos um ponto $s \in S$ tal que $\mathrm{d}(x, s) < r$; utilizando a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, encontramos um $q \in \mathbb{Q}$ tal que $r < q < 2r$. A bola aberta $B_q(s)$ está em $\mathcal{F}$ e contém x, pois $\mathrm{d}(x, s) < r < q$. Além disso, $B_q(s) \subset B_{3r}(x) \subset U$ já que, para $y \in B_q(s)$, temos $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, s) + \mathrm{d}(s, y) < r + q < r + 2r = 3r$ pela desigualdade triangular.

A recíproca, válida em qualquer espaço topológico, é um exercício simples. ■

Sequências constituem uma ferramenta útil para se estudar a topologia de um espaço. Uma sequência de pontos em um espaço topológico X nada mais é do que uma função $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$: para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, indicamos um ponto $x_n \in X$.

3.9. Definição. Dizemos que uma sequência x_i em um espaço topológico X *converge* ao ponto $x \in X$, ou que x é um *limite* de x_i, se vale a seguinte propriedade:

$$\text{dada uma vizinhança } U \ni x, \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_i \in U \text{ para todo } i \geqslant n.$$

Isto quer dizer que uma sequência converge a um ponto quando ela eventualmente fica contida em qualquer vizinhança deste ponto. Notação: $x_i \to x$ ou $\lim_{i \to \infty} x_i = x$.

Em outras palavras, os pontos de uma sequência convergente "aproximam-se arbitrariamente" do ponto limite.

3.10. Exercício. Supondo que X é um espaço métrico, formule a definição de $x_n \to x$ em termos da métrica d.

Seja $U \subset X$ um subconjunto de um espaço topológico X tal que, toda vez que uma sequência x_n converge a um ponto em U, ela fica eventualmente contida em U. Seria ótimo se pudéssemos concluir, neste caso, que U é aberto. Isto significaria que as sequências convergentes "sabem" quais conjuntos são abertos, ou seja, que as sequências convergentes determinam a topologia. Apesar de este não ser o caso em geral, há uma ampla classe de espaços topológicos para os quais tal fato é válido.

3.11. Definição. Um espaço topológico X possui *base enumerável de vizinhanças* se, para cada $x \in X$, existe uma família enumerável $\mathcal{F}_x$ de vizinhanças de x tal que qualquer vizinhança de x contém um elemento da família $\mathcal{F}_x$.

Todo espaço X com base enumerável possui base enumerável de vizinhanças: basta considerar os abertos da base enumerável que contêm um dado ponto $x \in X$. A recíproca não é válida, nem mesmo para espaços métricos.

3.12. Exercício. Mostre que todo espaço métrico possui base enumerável de vizinhanças.

3.13. Proposição. *Seja X um espaço topológico com base enumerável de vizinhanças. Um subconjunto $U \subset X$ é aberto se e só se toda sequência x_n convergente a um ponto $x \in U$ eventualmente fica em U.*

Demonstração. Se $U \subset X$ é aberto, o fato (válido em qualquer espaço topológico) segue diretamente da definição de convergência.

Suponha que toda sequência convergente a um ponto de U eventualmente fica em U. Seja $x \in U$ e seja $\mathcal{F}_x = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ uma base enumerável de vizinhanças de x. Tomando a interseção $U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$ no lugar de U_n, $n \in \mathbb{N}$, podemos assumir que $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ (escreva os detalhes para se convencer disto).

Vamos supor que nenhuma das vizinhanças U_n está contida em U. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos um ponto $x_n \in U_n \setminus U$. A sequência x_n converge a x : se V é uma vizinhança de x, então algum U_k está contido em V e, como $V \supset U_k \supset U_{k+1} \supset \dots$, obtemos $x_n \in V$ para todo $n \geqslant k$. Portanto, x_n eventualmente fica em U; um absurdo. Isto significa que alguma vizinhança U_n de x está contida em U. Pela Proposição 1.16, U é aberto. ■

Se, em um espaço topológico com base enumerável de vizinhanças, as sequências convergentes "sabem" a topologia, então elas também têm que "saber" quais funções neste espaço são contínuas:

3.14. Proposição. *Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Se f é contínua, então f* preserva a convergência *de sequências, isto é, $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$. A recíproca é válida quando X possui base enumerável de vizinhanças.*

Demonstração. Suponhamos que f preserva a convergência de sequências e que X possui base enumerável de vizinhanças. Seja $V \subset Y$ aberto, seja $x \in f^{-1}V$ e seja $x_n \to x$ uma sequência convergente. Temos $f(x_n) \to f(x) \in V$ e, em particular, $f(x_n)$ eventualmente fica em V. Logo, x_n eventualmente fica em $f^{-1}V$. Pela Proposição 3.13, $f^{-1}V$ é aberto.

A afirmação restante fica como exercício. ■

Finalmente, apresentamos uma caracterização de fecho em termos de sequências convergentes.

3.15. Proposição. *Sejam X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto. Se existe uma sequência x_n de pontos em S convergindo a um ponto $x \in X$, então $x \in \overline{S}$. A recíproca é válida quando X possui base enumerável de vizinhanças.*

Demonstração. Vamos supor que X possui base enumerável de vizinhanças. Seja $x \in \overline{S}$. Como na demonstração da Proposição 3.13, tomamos uma base enumerável $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de vizinhanças de x satisfazendo $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Pelo Lema 1.20, $U_n \cap S \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo um ponto $x_n \in U_n \cap S$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência de pontos em S que converge a x.

A afirmação restante fica como exercício. ■

Assim, se X é um espaço topológico com base enumerável de vizinhanças (por exemplo, se X é métrico), o fecho de um subconjunto S é formado exatamente pelos pontos limites de sequências convergentes cujos elementos pertencem a S.

Finalizaremos esta seção discutindo o conceito de *limites de funções*.

3.16. Definição. Sejam X e Y espaços topológicos, seja $a \in X$ e seja f uma função de X em Y ou de $X \setminus a$ em Y. O ponto $b \in Y$ é dito um *limite de f quando x tende ao ponto a* se a função $\widetilde{f} : X \to Y$ definida através da expressão

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a; \\ b, & x = a \end{cases}$$

for contínua em a. Notação: $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Em outras palavras, $b = \lim_{x\to a} f(x)$ se para toda vizinhança $V \ni b$ existe uma vizinhança $U \ni a$ tal que $f(U \setminus a) \subset V$.

3.17. Observação. Introduzimos no conjunto $\hat{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \infty$ a topologia tal que $U \subset \hat{\mathbb{N}}$ é aberto quando não contém ∞ ou quando contém ∞ e todos os números naturais a partir de um algum $n \in \mathbb{N}$. Segue diretamente das correspondentes definições que uma sequência x_i em um espaço topológico X converge a $x \in X$ se e só se $\lim_{i\to\infty} f(i) = x$, onde $f : \hat{\mathbb{N}} \setminus \infty \to X$ é dada por $f(i) := x_i$.

Logo, o limite de sequências pode ser visto como um caso particular do limite de funções.

Às vezes, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ pode não ser único. Há apenas duas razões que levam a este fenômeno: o ponto a ser *isolado* no domínio de f ou o codomínio de f ser não-Hausdorff.

3.18. Definição. Seja X um espaço topológico. Um ponto $x \in X$ chama-se *isolado* se o conjunto $\{x\}$ é aberto.

Informalmente, um ponto é isolado se "em sua proximidade" não há outros pontos. Por exemplo, um espaço é discreto se e só se todos os seus pontos são isolados.

3.19. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos. Suponhamos que o espaço Y é Hausdorff e que $a \in X$ é não-isolado. Então, para toda função f de X para Y ou de $X \setminus a$ para$Y$, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ é único (se existir).*

Em particular, o limite de sequências convergentes em espaços Hausdorff é único.

Demonstração. Suponhamos que f possui dois limites distintos b_1 e b_2 quando x tende a a. Como Y é Hausdorff, existem vizinhanças disjuntas $V_1 \ni b_1$ e $V_2 \ni b_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Pela definição de limite, existem vizinhanças $U_1, U_2 \ni a$ tais que $f(U_1 \setminus a) \subset V_1$ e $f(U_2 \setminus a) \subset V_2$. Como a é não-isolado, existe um ponto a' diferente de a pertencente à interseção $U_1 \cap U_2$. Então $f(a') \in V_1 \cap V_2$; absurdo.

Pela Observação 3.17, a convergência $y_n \to y$ de uma sequência no espaço Hausdorff Y pode ser escrita na forma $\lim_{n\to\infty} f(n) = y$, onde $f : \hat{\mathbb{N}} \setminus \infty \to Y$ é a função $f(n) := y_n$. Resta observar que o ponto ∞ é não-isolado em $\hat{\mathbb{N}}$. ■

3.20. Exercício. Quanto vale $\lim_{x\to a} f(x)$ quando a é um ponto isolado?

4. Compacidade

Um espaço topológico é compacto, grosso modo, quando o seu comportamento é similar ao de espaços *finitos*. Heuristicamente, a compacidade é um modo topológico de expressar um certo aspecto do conceito de finitude.[2] Este aspecto está ligado à possibilidade de se passar do *local* ao *global*, ou seja, de se inferir sobre propriedades globais de um espaço a partir de suas propriedades locais.

4.1. Definição. Um espaço topológico X é *compacto* quando toda *cobertura* de X por abertos admite uma subcobertura finita: se $\mathcal{C} = \{U_i \mid i \in I\}$ é uma família de abertos tal que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, então existe uma subfamília finita $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\} \subset \mathcal{C}$ tal que $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Existem diversas caracterizações de compacidade. Apresentamos em seguida algumas que, além de úteis na prática, nos ajudarão a entender melhor o que significa "ser compacto".

Uma família de conjuntos é *fechada relativamente a uniões* (*interseções*) *finitas* se a união (interseção) de qualquer subfamília finita pertence à família.

[2]Imagine que todas as esferas do mundo são azuis e que nada mais é azul. Assim, não há necessidade de distinguir os conceitos "ser esférico" e "ser azul"... até que, um dia, aparecem um cubo azul e uma esfera verde! Algo análogo ocorre aqui: "ser compacto" e "ser discreto" são as características que, juntas, compõem a finitude.

4.2. Caracterização. *Um espaço topológico X é compacto se e só se X pertence a qualquer cobertura de X por abertos que é fechada relativamente a uniões finitas.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C} := \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura de X por abertos. Se X é compacto e $\mathcal{C}$ é fechada relativamente a uniões finitas, obtemos $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \in \mathcal{C}$ tomando uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$. Reciprocamente, adicionando à cobertura arbitrária $\mathcal{C}$ as uniões de suas subfamílias finitas, obtemos uma cobertura $\mathcal{C}'$ fechada relativamente a uniões finitas. Todo conjunto em $\mathcal{C}'$ é uma união finita de conjuntos em $\mathcal{C}$ e, por hipótese, $X \in \mathcal{C}'$. Acabamos de obter uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$. ■

Vamos reformular a Caracterização 4.2 em termos de fechados. Tomando complementares, vê-se que uma cobertura por abertos que é fechada relativamente a uniões finitas corresponde a uma família de fechados $\{F_i \mid i \in I\}$ que é fechada relativamente a interseções finitas e que satisfaz $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \varnothing$. Portanto, X é compacto se e só se uma tal família de fechados em X contém $\varnothing$. Chegamos à seguinte

4.3. Caracterização. *Um espaço topológico X é compacto se e só se $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \varnothing$ para toda família de fechados $\{F_i \mid i \in I\}$ cujas interseções de subfamílias finitas são todas não-vazias.* ■

A próxima caracterização de compacidade que apresentaremos é profunda. Ela pode ser vista como uma propriedade *universal* da compacidade, no mesmo estilo das propriedades universais que apresentamos para as topologias inicial, final e produto.

O melhor modo de se conhecer as propriedades de um objeto é compará-lo com outros. O mais eficiente é compará-lo com objetos bem próximos, em particular, com suas próprias *deformações*. Isto também se expressa assim: para entender um objeto, deforma-lo.

Na demonstração da Caracterização 4.5, dado um espaço topológico X com uma cobertura por abertos, criamos um aberto que, ao determinar uma deformação "universal" de X, permite entender se o mesmo é ou não compacto.

Uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é dita *fechada* (*aberta*) se as imagens de conjuntos fechados (abertos) em X são conjuntos fechados (abertos) em Y.

Necessitaremos do seguinte exercício simples.

4.4. Exercício. Mostre que a projeção $X \times Y \to Y$ é fechada exatamente quando o conjunto $C_U := \{y \in Y \mid X \times y \subset U\}$ é aberto em Y para todo U aberto em $X \times Y$.

Se pensarmos no produto $X \times Y$ como uma família de "cópias" de X parametrizada por Y, isto é, $X \times Y = \bigcup\limits_{y\in Y} X \times y$, onde $X \times y$ é a "cópia" de X correspondendo ao ponto $y \in Y$ (também chamada *fibra* sobre o ponto y), então a última afirmação do Exercício 4.4 pode ser formulada assim: a coleção de todas as fibras do "tipo" X contidas em um aberto $U \subset X \times Y$ é parametrizada por um aberto C_U em Y.

A demonstração da Caracterização 4.5 não demanda conhecimentos novos mas é um pouco mais difícil do que as que vimos encontrando até agora, podendo ser omitida na primeira leitura sem nenhum prejuízo para o entendimento dos assuntos subsequentes.

4.5. Caracterização. *Um espaço topológico X é compacto se e só se, para qualquer espaço topológico Y, a projeção $\pi : X \times Y \to Y$ é fechada.*

Demonstração. Suponha X compacto. Seja $F \subset X \times Y$ um fechado e seja $y \notin \pi F$. O compacto (convença-se disto utilizando no produto $X \times Y$ coberturas por abertos básicos) $X \times y$ está contido no aberto $W := (X \times Y) \setminus F$. Como W é a união de uma família de abertos básicos, há uma subfamília finita $\{U_i \times V_i \mid i = 1, \dots, n\}$ que cobre $X \times y$ e tal que cada V_i é uma vizinhança de y. O aberto $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ é uma vizinhança de y disjunta de πF.

Reciprocamente, suponha $\pi : X \times Y \to Y$ fechada para todo Y. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos de X fechada relativamente a uniões finitas. Pela Caracterização 4.2, devemos provar que $X \in \mathcal{C}$. Para isto, construímos o seguinte espaço topológico Y.

Os pontos de Y são os abertos de X (utilizaremos a seguinte notação: U e $\mathbf{u}$ denotam respectivamente o aberto $U \subset X$ e o ponto $\mathbf{u} \in Y$ que corresponde a este aberto). Um subconjunto $A \subset Y$ é definido como sendo aberto quando satisfaz as seguintes propriedades: (1) se $\mathbf{u} \in A$ e $U \subset V$ para algum $\mathbf{v} \in Y$, então $\mathbf{v} \in A$; (2) pelo menos um dos elementos não-vazios da cobertura $\mathcal{C}$ pertence a A caso $A \neq \varnothing$. Você deve verificar que esta é uma topologia em Y (para provar que a interseção de dois abertos é aberto, é necessário utilizar (1) e que $\mathcal{C}$ é fechada relativamente a uniões finitas).

Suponha que $E := \bigcup_{\mathbf{u} \in Y} U \times \mathbf{u} \subset X \times Y$ é aberto. Então $\{\mathbf{u} \in Y \mid X \times \mathbf{u} \subset E\}$ é aberto pelo Exercício 4.4 e não-vazio já que $X \times \mathbf{x} \subset E$. Segue de (2) que $X \times \mathbf{u} \subset E$ para algum $\varnothing \neq U \in \mathcal{C}$ e, portanto, $U = X \in \mathcal{C}$. Assim, resta apenas mostrar que E é aberto.

Seja $(x, \mathbf{u}) \in E$, onde $x \in U$, e seja $U' \in \mathcal{C}$ uma vizinhança de x. Como U' está na cobertura e $U' \supset U \cap U'$, o conjunto $T := \{\mathbf{v} \in Y \mid V \supset U \cap U'\}$ é aberto em Y. Finalmente, $(U \cap U') \times T$ é um aberto contido em E e contendo $(x, \mathbf{u})$. ∎

Atuando como no Exercício 4.4, obtemos um critério para a compacidade de subespaços.

4.6. Critério. *Sejam X um espaço topológico e $K \subset X$ um subespaço. Então K é compacto se e só se, para qualquer espaço topológico Y, o conjunto $C := \{y \in Y \mid K \times y \subset U\}$ é aberto em Y sempre que U é aberto em $X \times Y$.*

Demonstração. Sejam $\pi : X \times Y \to Y$ a projeção e $U \subset X \times Y$ aberto. Então $Y \setminus C = \pi\big(F \cap (K \times Y)\big)$, onde $F = (X \times Y) \setminus U$ é fechado em $X \times Y$. O resultado agora segue do Exercício 2.11 e da Caracterização 4.5. ∎

A proposição abaixo contém alguns fatos básicos sobre compacidade.

4.7. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos.*

1. *Se X é Hausdorff e $K \subset X$ é compacto, então K é fechado.*
2. *Se X é compacto e $F \subset X$ é fechado, então F é compacto.*
3. *Se $f : X \to Y$ é contínua e X é compacto, então a imagem $fX \subset Y$ é compacta.*
4. *Se $f : X \to Y$ é contínua, X é compacto e Y é Hausdorff, então f é fechada.*
5. *Se X e Y são compactos, então $X \times Y$ é compacto.*

Demonstração. A demonstração é, essencialmente, uma aplicação direta do Critério 4.6.

1. Temos $X \setminus K = \{x \in X \mid K \times x \subset W\}$ aberto, pois $W := (X \times X) \setminus \triangle$ é aberto pela Proposição 2.20.
2. Sejam Y espaço topológico e $U \subset X \times Y$ aberto. Então $\{y \in Y \mid F \times y \subset U\} = \{y \in Y \mid X \times y \subset W\}$ é aberto, pois $W := \big((X \setminus F) \times Y\big) \cup U$ é aberto em $X \times Y$ e X é compacto.
3. Sejam Z espaço topológico e $U \subset Y \times Z$ aberto. Então $\{z \in Z \mid fX \times z \subset U\} = \{z \in Z \mid X \times z \subset g^{-1}U\}$ é aberto, pois $g : X \times Z \to Y \times Z$, $(x, z) \mapsto (fx, z)$, é contínua e X é compacto.
4. Segue dos itens 2, 3 e 1.
5. Seja Z um espaço topológico. A projeção $X \times Y \times Z \to Z$ é fechada, pois é a composta das projeções fechadas $X \times Y \times Z \to Y \times Z$ e $Y \times Z \to Z$. ∎

4.8. Exercício. Refaça a demonstração da Proposição 4.7 utilizando diretamente a Definição 4.1 de compacidade.

Em espaços métricos, podemos utilizar sequências para caracterizar compacidade. Com este intuito, vamos antes introduzir algumas definições gerais.

4.9. Definição. Seja x_n uma sequência no espaço topológico X e seja $x \in X$. O ponto x é um *ponto de acumulação* da sequência x_n se, para toda vizinhança $U \ni x$, há infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $x_n \in U$.

4.10. Observação. Se X possui base enumerável de vizinhanças (por exemplo, se X é métrico), então $x \in X$ é um ponto de acumulação de uma sequência x_n se e só se x_n possui uma subsequência convergente a x.

4.11. Definição. Um espaço topológico é *sequencialmente compacto* se toda sequência neste espaço possui ponto de acumulação.

Falando informalmente, em um espaço sequencialmente compacto, uma sequência não pode ser "rarefeita em todo lugar".

Em espaços métricos, compacidade sequencial é equivalente à compacidade (Teorema 4.14). Para provar isto, precisamos utilizar a seguinte propriedade de $\mathbb{R}$: a sequência $x_i := 1/i$, $i \in \mathbb{N}$, converge a 0. Em particular, dado um número real $r > 0$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $1/n < r$. Este fato será discutido em breve.

4.12. Lema. *Para toda cobertura por abertos de um espaço métrico sequencialmente compacto X, existe um número $r > 0$ (chamado* número de Lebesgue *da cobertura) tal que, para todo $x \in X$, a bola $B_r(x)$ está contida em um dos conjuntos da cobertura.*

Demonstração. Suponha que uma dada cobertura por abertos não possua número de Lebesgue. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe um ponto $x_i \in X$ tal que a bola $B_{1/i}(x_i)$ não está contida em nenhum aberto da cobertura. Pela Observação 4.10, existe uma subsequência com $x_{n_i} \to x$ para algum $x \in X$. Seja $U \ni x$ um aberto da cobertura e seja $s > 0$ tal que $B_{2s}(x) \subset U$. Escolhemos $n_i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $1/n_i < s$ e $\mathrm{d}(x_{n_i}, x) < s$. Então $B_{1/n_i}(x_{n_i}) \subset B_{2s}(x) \subset U$, pois $\mathrm{d}(y, x) \leqslant \mathrm{d}(y, x_{n_i}) + \mathrm{d}(x_{n_i}, x) < 1/n_i + s < 2s$ para todo $y \in B_{1/n_i}(x_{n_i})$. Chegamos a uma contradição. ∎

4.13. Lema. *Qualquer espaço métrico sequencialmente compacto pode ser coberto por uma quantidade finita de bolas abertas de raio r para qualquer $r > 0$.*

Demonstração. Suponha que o resultado não é válido para algum $r > 0$. Construímos indutivamente uma sequência x_n tal que $\mathrm{d}(x_m, x_n) \geqslant r$ para $m \neq n$: se já temos os termos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, basta tomar x_{n+1} fora de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_r(x_i)$. É um exercício simples mostrar que a sequência x_n não possui ponto de acumulação. ∎

4.14. Teorema. *Um espaço métrico X é compacto se e só se é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Suponha que X é compacto. Se uma sequência não possui ponto de acumulação então, para todo $x \in X$, existe um aberto U_x que contém apenas uma quantidade finita de termos da sequência. A cobertura por abertos $X = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$ possui uma subcobertura finita $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Portanto, algum dos U_{x_i} deve conter uma quantidade infinita de termos da sequência; um absurdo.

Reciprocamente, suponha X sequencialmente compacto. Dada uma cobertura de X por abertos, utilizamos o Lema 4.12 para encontrar um número de Lebesgue $r > 0$ da cobertura. Pelo Lema 4.13, X pode ser coberto por uma quantidade finita de bolas de raio r. ∎

Acabamos de formular a compacidade em espaços métricos em termos de sequências. Veremos em seguida como caracterizar de modo simples a compacidade em $\mathbb{R}^n$.

4.15. Definição. Um subespaço $S \subset X$ de um espaço métrico X é *limitado* caso $S \subset B_r(x)$ para alguns $r > 0$ e $x \in X$.

4.16. Observação. *Todo subespaço compacto $K \subset X$ de um espaço métrico X é limitado e fechado.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Temos $K \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n(x)$. Extraindo uma subcobertura finita, obtemos $K \subset B_n(x)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Que K é fechado, segue do item 1 da Proposição 4.7. ∎

Embora não seja válida para espaços métricos em geral, a recíproca da Observação 4.16 é verdadeira para $\mathbb{R}^n$ com a métrica L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Para mostrar este fato, conhecido como teorema de Heine-Borel, precisamos de maiores conhecimentos sobre números reais. Já que uma definição rigorosa de "número real" será apresentada somente na Seção ???, por enquanto apenas enunciaremos sem demonstração uma propriedade de $\mathbb{R}$ (Proposição 4.20) que será essencial na demonstração do teorema de Heine-Borel.

4.17. Definição. Um número real $r \in \mathbb{R}$ é uma *cota superior* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se $x \leqslant r$ para todo $x \in X$. Neste caso, escrevemos $X \leqslant r$. Um conjunto de números reais que admite cota superior é *limitado superiormente.* O *supremo* de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, denotado $\sup X$, é a menor das cotas superiores de X (se existir).

Analogamente definimos *cota inferior,* conjunto *limitado inferiormente* e *ínfimo.* O ínfimo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denotado $\inf X$.

Claro que, na métrica usual, ser limitado superiormente e inferiormente é equivalente a ser limitado.

4.18. Exercício. Qual o supremo do conjunto $C := \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$? Será que este conjunto possui *máximo,* i.e., será que existe $m \in C$ tal que $C \leqslant m$?

4.19. Exercício. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subespaço de $\mathbb{R}$. Suponha que $i := \inf X$ e $s := \sup X$ existem. Mostre que $i, s \in \overline{X}$. Logo, i e s são o mínimo e o máximo de X se X é fechado.

4.20. Proposição. *Todo conjunto não-vazio de números reais limitado superiormente* (*inferiormente*) *possui supremo* (*ínfimo*).

Postergamos a demonstração desta proposição até a Seção ???.

4.21. Teorema. *Todo intervalo fechado* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura de $[a, b]$ por abertos. Definimos $X := \big\{x \in [a, b] \mid$ o intervalo $[a, x]$ é coberto por um número finito de conjuntos de $\mathcal{C}\big\}$. O conjunto X é não-vazio, pois $a \in X$, e possui supremo $s := \sup X \in [a, b]$ pela Proposição 4.20. Seja $s \in U \in \mathcal{C}$.

Se $s = a$, então $[a, c) \subset U$ para algum $c > a = s$; absurdo. Logo, $s > a$.

Se $a < s < b$, então $s \in I \subset U$, onde I é um intervalo aberto. Existe $x \in X \cap I$, pois $s \in \overline{X}$. Pela definição de X, temos $[a, x] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ para alguns $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{C}$. Tomando $I \ni x' > s \geqslant x$, obtemos $[a, x'] \subset U \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, pois $[x, x'] \subset I$. Um absurdo. Portanto, $s = b$.

Agora, $(c, b] \subset U$ para algum $c < b$. De novo, $b = s \in \overline{X}$ implica que há um $x \in X \cap (c, b]$. Pela definição de X, o invervalo $[a, x]$ é coberto por um número finito de conjuntos de $\mathcal{C}$. Adicionando U a esta cobertura, obtemos uma subcobertura finita de $[a, b]$. ∎

4.22. Corolário (teorema de Heine-Borel)**.** *Consideremos em* $\mathbb{R}^n$ *a métrica* L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Um subespaço* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto se e só se é limitado e fechado.*

Demonstração. Se K é compacto, então é limitado e fechado pela Observação 4.16. Para a recíproca, pelo Exemplo 1.15, basta considerar $\mathbb{R}^n$ com a métrica L^∞. Sendo limitado na métrica L^∞, o subespaço K está contido em um "retângulo" fechado $R := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Pelos Exercício 3.5, Teorema 4.21 e item 5 da Proposição 4.7, R é compacto. Resta aplicar o item 2 da Proposição 4.7. ∎

4.23. Corolário. *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função contínua com* X *compacto. Então* f *atinge em* X *os seus valores máximo e mínimo. Assim, toda função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *atinge no intervalo fechado* $[a, b]$ *seus valores máximo e mínimo.*

Demonstração. Pelo item 3 da Proposição 4.7, a imagem $fX \subset \mathbb{R}$ é compacta. Pela Observação 4.16, tal imagem é limitada e fechada. Pela Proposição 4.20, a imagem fX possui sup e inf, os quais, pelo exercício 4.19, estão contidos em fX. ∎

Incidentalmente, a Proposição 4.20 permite demonstrar duas propriedades de $\mathbb{R}$ que já foram utilizadas sem prova: a convergência $1/n \to 0$, $n \in \mathbb{N}$, e a densidade dos racionais $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Estas propriedades são consequência do *axioma de Arquimedes*:

4.24. Proposição (axioma de Arquimedes)**.** *Em $\mathbb{R}$ com a métrica usual, o subconjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente.*

Demonstração. Se $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, possui supremo s pela Proposição 4.20. Portanto, $n+1 \leqslant s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $n \leqslant s-1 < s$ para todo $n \in \mathbb{N}$; absurdo. ■

4.25. Corolário. *A sequência $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, converge a 0.*

Demonstração. Seja $0 < r \in \mathbb{R}$. Se $r \leqslant 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma cota superior $1/r$ para o conjunto $\mathbb{N}$, o que contradiz o axioma de Arquimedes. Portanto, dado $r > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < r$; disto segue facilmente a convergência desejada. ■

4.26. Corolário. *Os números racionais são densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Basta provar que todo intervalo aberto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ contém um número racional. Seja $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\frac{1}{n} < b-a$. Então $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\} \cap (a,b) \neq \varnothing$ pois, caso contrário, existiria um número inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{m}{n} \leqslant a$ e $b \leqslant \frac{m+1}{n}$, donde $b-a \leqslant \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$; absurdo. ■