1 Definição de limite (lembrete)

Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ e p é ponto de acumulação de D_f

- $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa

  $$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

  (por vizinhanças:

  $$\forall Y \text{ vizinhança de } L\ \exists X \text{ vizinhança de } p \text{ tal que}$$
  $$x \in D_f \cap X \setminus \{p\} \quad \text{implica } f(x) \in Y$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$ dizemos que $\lim_{x\to p} f(x)$ **não existe**

2 Vizinhanças de infinito

Definimos:

- **vizinhança de** $+\infty$: uma qualquer semireta aberta do tipo $(a, +\infty)$
- **vizinhança de** $-\infty$: uma qualquer semireta aberta do tipo $(-\infty, a)$

3 Limites infinitos: definição

Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ e p é ponto de acumulação de D_f

- $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa

  $$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ significa

  $$\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{M}$$

- $\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$ significa

  $$\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{M}$$

---

4 Limites no infinito: definição

Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ e D_f **não é limitado superiormente**

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} f(x) = L$ significa

$$\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} > \mathbf{H} \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{M}$$

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} f(x) = -\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{M}$$

Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ e D_f **não é limitado inferiormente**

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to-\infty} f(x) = L$ significa

$$\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} < \mathbf{H} \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to-\infty} f(x) = +\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} < \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{M}$$

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to-\infty} f(x) = -\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} < \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{M}$$

5 Propriedades dos limites infinitos

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e considere limites para $x \to p$, ou $x \to p^{\pm}$ ou $x \to \pm\infty$.

- se $f \to +\infty$, $g \to +\infty$ **então** $f + g \to +\infty$, $fg \to +\infty$
- se $f \to -\infty$, $g \to -\infty$ **então** $f + g \to -\infty$, $fg \to +\infty$
- se $f \to +\infty$, $g \to -\infty$ **então** $f + g$ **DUVIDA!**, $fg \to -\infty$

- se $f \to L$, $g \to +\infty$ **então** $f + g \to +\infty$, $fg \to \begin{cases} +\infty & se\ L > 0 \\ -\infty & se\ L < 0 \\ \text{DUVIDA!} & se\ L = 0 \end{cases}$
- se $f \to L$, $g \to -\infty$ **então** $f + g \to -\infty$, $fg \to \begin{cases} -\infty & se\ L > 0 \\ +\infty & se\ L < 0 \\ \text{DUVIDA!} & se\ L = 0 \end{cases}$

- se $f \to +\infty$ ou $f \to -\infty$ **então** $1/f \to 0$ (respectivamente, $1/f \to 0^+$ ou $1/f \to 0^-$).
- se $f \to 0^+$ **então** $1/f \to +\infty$ **(desde que o limite de $1/f$ faça sentido)**
- se $f \to 0^-$ **então** $1/f \to -\infty$ **(desde que o limite de $1/f$ faça sentido)**

Teorema (de confronto com limites infinitos).
Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e seja p ponto de acumulação de D. Suponha que

$$\exists\, r > 0 : \; x \in D \; e \; 0 < |x - p| < r \;\Rightarrow f(x) \le g(x)$$

Então:

$$\mathit{se} \; \lim_{x\to p} f(x) = +\infty \quad \textbf{então} \quad \lim_{x\to p} g(x) = +\infty$$

$$\mathit{se} \; \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \quad \textbf{então} \quad \lim_{x\to p} f(x) = -\infty$$

Ainda,

- no Teorema do Limite da composta, podemos ter $\pm\infty$ no lugar de a ou no lugar de L;
- os teoremas de unicidade e de permanência do sinal valem também se os limites valem $\pm\infty$;

6 Propriedades dos limites no infinito

Todos os teoremas vistos ainda valem

- substituindo
  – $x \to p$ por $x \to +\infty$,
  – $\exists r > 0 :$ .... $0 < |x - p| < r$ ... por $\exists H \in \mathbb{R} :$ .... $x > H$ ...,
  – p de acumulação de D_f por D_f **não limitado superiormente**
- substituindo
  – $x \to p$ por $x \to -\infty$,
  – $\exists r > 0 :$ .... $0 < |x - p| < r$ ... por $\exists H \in \mathbb{R} :$ .... $x < H$ ...,
  – p de acumulação de D_f por D_f **não limitado inferiormente**

PS também valem análogos com limites laterais.

7 Assíntotas

Dada uma função $f : D \to \Re$

- **a reta** $y = L$ é dita **Assíntota horizontal (do gráfico) de** f se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \textbf{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

- **a reta** $y = ax + b$ é dita **Assíntota oblíqua (do gráfico) de** f se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \qquad \textbf{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

- **a reta** $x = p$ é dita **Assíntota vertical (do gráfico) de** f se

$$\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty \qquad \textbf{ou} \qquad \lim_{x\to p^+} f(x) = \pm\infty \qquad \textbf{ou} \qquad \lim_{x\to p^-} f(x) = \pm\infty$$

8 Teoremas sobre funções contínuas

Teorema (**de conservação do sinal para funções contínuas**).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$, seja $p \in D$ um ponto de acumulação de D e seja f contínua em p.
Se $f(p) > 0 \quad$ (resp. $f(p) < 0$), **então**

$$\exists\, r > 0 : \; x \in D \text{ e } |x-p| < r \;\Rightarrow f(x) > 0 \;\; (resp.\ f(x) < 0)$$

Teorema (**Teorema de Bolzano (ou dos zeros)**).
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a)f(b) < 0$,
então existe $c \in (a,b) : \; f(c) = 0$.

Corolário (**Teorema do valor intermediário**).
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) > \gamma > f(b) \qquad ou \qquad f(a) < \gamma < f(b)$$

então existe $c \in (a,b) : \; f(c) = \gamma$.
Em particular f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema (**Teorema de Weiestrass**).
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então existem $x_1, x_2 \in [a,b] : \; f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \; \forall\, x \in [a,b]$.

Corolário.
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.

bisec.c
bisec.exe

9 Alguns limites para saber!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x=e$$
$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{1/x}=e^k \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(1+k/x)^x=e^k$$