# 1 Definição de limite

- Seja $A \subseteq \mathbb{R}$: $p$ é dito **ponto de acumulação de $A$** se

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A \textit{ tal que } 0 < |x-p| < \delta$$

---

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p$ um ponto de acumulação de $D_f$

- $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ significa

  $\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \delta > \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ **e** $\mathbf{0} < |\mathbf{x}-\mathbf{p}| < \delta$ implica $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$

- se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$ dizemos que $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ **não existe**

# 2 Definição de continuidade

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$

- se $p \in D_f$, dizemos que **$f$ é contínua em $p$**, se

  $\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \delta > \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ **e** $|\mathbf{x}-\mathbf{p}| < \delta$ implica $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})| < \varepsilon$ $\quad (*)$

  Temos duas possibilidades:

  - se $p$ é ponto de acumulação de $D_f$, então

  $$f \text{ é contínua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

  - se $p$ não é ponto de acumulação de $D_f$, então $f$ é contínua em $p$

- se $p \in D_f$, dizemos que **$f$ é descontínua em $p$**, se a propriedade $(*)$ é falsa

- se $p \notin D_f$, *não se fala em continuidade ou descontinuidade.*

---

- se $f$ é contínua em $p$ para todo $p \in A$ dizemos **$f$ é contínua em $A$**

- se $f$ é contínua em $p$ para todo $p \in D_f$ dizemos **$f$ é contínua**

## 3 Limite por vizinhanças

Dados $p \in R$ e $r > 0$, definimos:

- **vizinhança de** $p$: um qualquer intervalo aberto que contém $p$
- **vizinhança de** $p$ **de raio** $r$: o intervalo $V_r(p) := (p - r, p + r)$

---

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$:

- $p$ é dito **ponto de acumulação de** $A$ se

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in A : \; 0 < |x - p| < \delta$$

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in A \cap V_\delta(p) \setminus \{p\}$$

$$\forall X \text{ vizinhança de } p \;\; \exists x \in A \cap X \setminus \{p\}$$

---

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p$ um ponto de acumulação de $D_f$

- $\lim_{x \to p} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in D_f \; e \; 0 < |x - p| < \delta \text{ implica } |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in D_f \cap V_\delta(p) \setminus \{p\} \quad \text{implica } f(x) \in V_\varepsilon(L)$$

$$\forall Y \text{ vizinhança de } L \; \exists X \text{ vizinhança de } p \text{ tal que}$$
$$x \in D_f \cap X \setminus \{p\} \quad \text{implica } f(x) \in Y$$

# 4 Teoremas sobre operações com limites

**Teorema (Operações com limites).**
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad p \text{ ponto de acumulação de } D_f \cap D_g\,,$$

$$\lim_{x\to p} f(x) = L_f\,, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = L_g\,.$$

**Então**

$$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) \pm g(x) = L_f \pm L_g\,, \\ \lim_{x\to p} f(x)g(x) = L_f L_g\,, \\ \lim_{x\to p} f(x)/g(x) = L_f/L_g & \textbf{desde que } L_g \neq 0\,. \end{cases}$$

**Corolário (Operações com funções contínuas).**
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad p \text{ ponto de acumulação de } D_f \cap D_g\,,$$

além disso seja $p \in D_f \cap D_g$ e sejam $f$ e $g$ contínuas em $p$. **Então**

$$\begin{cases} f(x) \pm g(x) \textbf{ é contínua em } p\,, \\ f(x)g(x) \textbf{ é contínua em } p\,, \\ f(x)/g(x) \textbf{ é contínua em } p\,, & \textbf{desde que } g(p) \neq 0\,. \end{cases}$$

---

**Teorema (Limite da composta).**
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

$$p \text{ ponto de acumulação de } D_f\,, \quad a \text{ ponto de acumulação de } D_g\,,$$

$$\lim_{x \to p} f(x) = a\,, \qquad \lim_{y \to a} g(y) = L\,.$$

Além disso, valha pelo menos UMA entre

(a) $a \in D_g$ e $g$ contínua em $a$,

(b) $\exists\, r > 0 :\ x \in D_f \ e\ 0 < |x - p| < r \Rightarrow f(x) \neq a\,.$

**Então**

$$\lim_{x \to p} g \circ f(x) = L\,.$$

**Corolário (Continuidade da composta).**
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

$$p \text{ ponto de acumulação de } D_f\,, \quad f(p) \text{ ponto de acumulação de } D_g\,,$$

além disso seja $p \in D_f$, $(\Rightarrow f(p) \in D_g)$ e sejam

$$f \text{ contínua em } p \quad e \quad g \text{ contínua em } f(p).$$

**Então $g \circ f$ é contínua em $p$.**

---

**Teorema (limite da inversa).**
Seja $f : A \to B$ bijetora. Se $f$ é contínua e $A$ é um intervalo **então $f^{-1}$ é contínua**.

---

**Corolário (Continuidade das composições de contínuas).**
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão composição ou inversão$^{(\text{se o domínio é um intervalo})}$ de funções continuas, **é contínua no seu domínio natural**.

## 5 Limites laterais: definição

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$

- se $p$ é ponto de acumulação de $D_f$, $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

---

- se $p$ é ponto de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)$, $\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{p}^+} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{p} < \mathbf{x} < \mathbf{p} + \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- se $p$ é ponto de acumulação de $D_f \cap (-\infty, p)$, $\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{p}^-} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{p} - \delta < \mathbf{x} < \mathbf{p} \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

---

- se $p$ é ponto de acumulação de $D_f$, $\lim_{x\to p} f(x) = \mathbf{L}^+$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } \mathbf{L} \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{L} + \varepsilon$$

- se $p$ é ponto de acumulação de $D_f$, $\lim_{x\to p} f(x) = \mathbf{L}^-$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } \mathbf{L} - \varepsilon < \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{L}$$

- .....
- .....

**Teorema.**
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e seja $p$ ponto de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)$ e de $D_f \cap (-\infty, p)$. Então vale a seguinte equivalência:

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

Também valem análogos dos teoremas sobre operações com limites e limite da composta:

- substituindo $x \to p$ por $x \to p^+$ e $0 < |x-p| < r$ por $p < x < p+r$
- substituindo $x \to p$ por $x \to p^-$ e $0 < |x-p| < r$ por $p-r < x < p$
- substituindo $y \to a$ por $y \to a^+$ e $a$ por $a^+$
- substituindo $y \to a$ por $y \to a^-$ e $a$ por $a^-$

Exemplo:

**Teorema.**
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

$p$ ponto de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)\,,$ $a$ ponto de acumulação de $D_g \cap (-\infty, a)\,,$

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = a^-\,, \qquad \lim_{y \to a^-} g(y) = L\,.$$

Além disso, valha pelo menos UMA entre

(a) $a \in D_g$ e $g$ contínua em $a$,

(b) $\exists\, r > 0 :\; x \in D_f \; e \; p < x < p + r \Rightarrow f(x) \neq a\,.$

**Então**

$$\lim_{x \to p^+} g \circ f(x) = L\,.$$

## 6 Outros teoremas sobre limites

Considere funções $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ e seja $p$ ponto de acumulação de $D$.

**Teorema (Unicidade do limite).**
Se

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = L_1 \qquad e \quad \exists \lim_{x\to p} f(x) = L_2$$

**então** $L_1 = L_2$

---

**Teorema (de conservação do sinal).**
Se

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = L > 0 \quad (resp.\ L < 0)$$

**então**

$$\exists\, r > 0 :\ x \in D\ e\ 0 < |x-p| < r \ \Rightarrow f(x) > 0 \quad (resp.\ f(x) < 0)$$

---

**Teorema (de comparação).**
Se

$$\exists\, r > 0 :\ x \in D\ e\ 0 < |x-p| < r \ \Rightarrow f(x) \le g(x)$$

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = L_f \qquad e \quad \exists \lim_{x\to p} g(x) = L_g$$

**então** $L_f \le L_g$

---

**Teorema (de confronto).**
Se

$$\exists\, r > 0 :\ x \in D\ e\ 0 < |x-p| < r \ \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = L$$

**então** $\exists\ \lim_{x\to p} g(x) = L$

---

Os mesmos valem

- substituindo $x \to p$ por $x \to p^+$ e $0 < |x-p| < r$ por $p < x < p + r$
- substituindo $x \to p$ por $x \to p^-$ e $0 < |x-p| < r$ por $p - r < x < p$