1 Integrais impróprias

Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que **para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a+\delta,b]}$ seja limitada e integrável em $[a + \delta, b]$**.

- se existir $\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f **é integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral converge).*
  - L é a **integral em sentido generalizado** *(ou impróprio)* **de f em $[a, b]$**: (notação $\int_a^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f **não é integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral não converge—diverge).*

Analogamente, seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a,b-\delta]}$ seja limitada e integrável em $[a, b - \delta]$.

- se existir $\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a}^{b-\delta} f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral converge).
  - L é a integral em sentido generalizado (ou impróprio) de f em $[a, b]$: (notação $\int_a^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f não é integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral não converge—diverge).

Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que **para todo $M > a$, a função $f|_{[a,M]}$ seja limitada e integrável em $[a, M]$.**

- se existir $\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f **é integrável em $[a, \infty)$ em sentido generalizado** *(ou impróprio)*. (A integral converge).
  - L é a **integral em sentido generalizado** *(ou impróprio)* **de f em** $[a, \infty)$: (notação $\int_a^{+\infty} f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f **não é integrável em $[a, \infty)$ em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral não converge—diverge).*

Analogamente, seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $M < b$, a função $f|_{[M,b]}$ seja limitada e integrável em $[M, b]$.

- se existir $\lim_{M\to-\infty} \int_M^b f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é integrável em $(-\infty, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral converge).
  - L é a integral em sentido generalizado (ou impróprio) de f em $(-\infty, b]$: (notação $\int_{-\infty}^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f não é integrável em $(-\infty, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral não converge—diverge).

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D_f$

- se A **pode ser decomposto em um número finito de intervalos como os acima tais que f seja integrável em sentido generalizado em CADA UM DELES**, então dizemos que f **é integrável em A em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral converge)*. Dizemos então que a **integral generalizada de f em A** é a soma das integrais em cada intervalo
- **caso contrário**, dizemos que f **não é integrável em A em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral não converge)*.

Teorema (Teorema do confronto para integrais impróprias). *Sejam $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ tais que para todo $\delta > 0$, as funções $f, g|_{[a+\delta,b]}$ sejam limitadas e integráveis em $[a+\delta, b]$.*

Se $0 \leq f \leq g$ em $(a, b]$ **então:**

- **se g é integrável em s.g. em $[a.b]$ então f também, e vale**

$$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

- **se f não é integrável em s.g. em $[a.b]$ então g também não.**

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos.

Observe que se $f \geq 0$ então o limite que define $\int_a^b f$ é $L \geq 0$ ou $+\infty$ (não pode não existir)

Corolário. *Sejam $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ tais que para todo $\delta > 0$, as funções $f, g|_{[a+\delta,b]}$ sejam limitadas e integráveis em $[a+\delta, b]$.*

Se $f, g \geq 0$ em $(a, b]$ e

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

então $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ tem o mesmo caráter *(convergente ou divergente).*

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos, avaliando os limites para $x \to b^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, respectivamente.

Teorema. *Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a+\delta,b]}$ seja limitada e integrável em $[a+\delta, b]$.*

- *Se $|f|$ é integrável em s.g. em $[a.b]$* **então f também, e vale**

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos.

Se $|f|$ é integrável em s.g. dizemos que **f é absolutamente integrável em s.g.** *(absolutamente convergente).*

1.1 Algumas integrais úteis para confrontar

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \lim_{M\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^M = +\infty & se\ \alpha\in(0,1) \\ \lim_{M\to\infty}\left[\ln(x)\right]_1^M = +\infty & se\ \alpha=1 \\ \lim_{M\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^M = \frac{1}{\alpha-1} & se\ \alpha>1 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^M = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \lim_{\delta\to0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha} & se\ \alpha\in(0,1) \\ \lim_{\delta\to0^+}\left[\ln(x)\right]_\delta^1 = +\infty & se\ \alpha=1 \\ \lim_{\delta\to0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\delta^1 = +\infty & se\ \alpha>1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{\delta\to0^+}\left[x(\ln(x)-1)\right]_\delta^1 = -1$$