1 Introdução

Problema:
Dada $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f, queremos **determinar a reta tangente ao gráfico de f no ponto** $(p, f(p))$.

Considerações:

- por um ponto passam infinitas retas, que podem ser distinguidas pelo coeficiente angular: $y = m(x - p) + f(p)$.
- o que exatamente define uma reta tangente?

Definição:
Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D.
Diremos

$$\text{“}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \text{ quando } x \to p\text{”}$$

(f é ozinho de g quando x tende a p),

(f é infinitésima com respeito a g quando x tende a p),

se

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Exemplos:

$$\ln(1 + x) = \sigma(1) \text{ quando } x \to 0$$

$$\sin(x^2) = \sigma(x) \text{ quando } x \to 0$$

$$\sin(x) = \sigma(x) \text{ quando } x \to \infty$$

Cuidado:

$$x^2 = \sigma(x) \text{ quando } x \to 0$$

$$x = \sigma(x^2) \text{ quando } x \to +\infty$$

Definição:

Reta tangente em p ao gráfico de f:

é a única (se existir) reta $r(x)$ que passa por $(p, f(p))$ com a propriedade que

$$f(x) - r(x) = \sigma(x - p) \text{ **quando** } x \to p.$$

Isto é, tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - r(x)}{x - p} = 0$$

É a reta que (neste sentido) melhor aproxima a função, quando x está perto de p.

comparação tangente secantes

Se $r(x) = f(p) + m(x - p)$ temos

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - r(x)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - m(x - p)}{x - p} =$$

$$= \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) - m$$

Logo **a reta tangente é a com**

$$m = \lim_{t \to p} \frac{f(t) - f(p)}{t - p}$$

(se o limite existir).

OBS: isso pode ser visto como o limite quando $t \to p$, do coeficinete angular $m_{p,t}$ da **reta secante ao gráfico de f em $(p, f(p))$ e em $(t, f(t))$**:

$$m_{p,t} = \frac{f(t) - f(p)}{t - p}.$$

uma secante

outra secante

...limite

2 Definição de derivada

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f.

- **Se existir**
$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{p}} \frac{\mathbf{f(t)-f(p)}}{\mathbf{t-p}} = \mathbf{L} \in \mathbb{R},$$
então dizemos que
  - **f é derivável em p,**
  - **L é a derivada de f em p;** notação: $\mathbf{f'(p)} := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que **f não é derivável em p**.

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

- se f é derivável em p para todo $p \in A$ dizemos **f é derivável em A**,
- se f é derivável em p para todo $p \in D_f$ dizemos **f é derivável**.

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada de f** :

$$\mathbf{f'} : \mathbf{D_{f'}} \to \mathbb{R} : \mathbf{p} \mapsto \mathbf{f'(p)}$$

onde $D_{f'} = \{p \in D_f :$ p **é de acumul. de** D_f **e** f **é derivável em** $p\}$

Teorema.
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f.
Se f é derivável em p então f é contínua em p.

---

3 Regras de derivação

Teorema (Operações com derivadas).
Sejam

$$f, g : D \to \mathbb{R}\,, \quad \text{deriváveis em } p \;^{(p \in D \text{ um ponto de acumulação de } D)}$$

e $k \in \mathbb{R}$
então

- $kf,\ f \pm g,\ fg$ **são deriváveis em** p**,**
- f/g **é derivável em** p**, desde que** $g(p) \neq 0$**,**
- **vale**

$$\begin{cases} (kf)'(p) = k\,f'(p)\,, \\ (f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p)\,, \\ (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)\,, \\ (f/g)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g^2(p)} \qquad (\text{se } g(p) \neq 0). \end{cases}$$

Teorema (Derivada da composta (regra da cadeia)).
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

$$f \text{ derivável em } p, \qquad g \text{ derivável em } f(p).$$

$(p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f, $f(p) \in D_g$ um ponto de acumulação de $D_g)$

Então $g \circ f$ **é derivável em** p **e vale**

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)\,.$$

Corolário (Derivabilidade das composições de deriváveis).
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão ou composição de funções deriváveis, **é derivável**.

Teorema (Derivada da inversa).
Seja $f : A \to B$ contínua e bijetora onde A é um intervalo.
Se f derivável em x_0 e $f'(x_0) \neq 0$
então f^{-1} **é derivável em** $y_0 := f(x_0)$ **e vale**

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

.

4 Tabela de derivadas

$$D(const) = 0, \qquad D(x) = 1$$

$$D(e^x) = e^x$$

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$D(\ln(x)) = \left.\frac{1}{x}\right|_{x>0}$$

$$D(\sin(x)) = \cos(x), \qquad D(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$D(\sinh(x)) = \cosh(x), \qquad D(\cosh(x)) = \sinh(x)$$

$$D(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$D(\tanh(x)) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$D(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D(SetSh(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad D(SetCh(x)) = \left.\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right|_{x>1} \qquad D(SetTh(x)) = \left.\frac{1}{1-x^2}\right|_{|x|<1}$$

$$D(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$x^2 \sin(1/x)$

5 Derivadas de ordem superior

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável em $D_{f'}$ e $p \in D_{f'}$ um ponto de acumulação de $D_{f'}$.

- **Se existir**
$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{p}} \frac{\mathbf{f'(t) - f'(p)}}{\mathbf{t - p}} = \mathbf{L} \ \in \mathbb{R}\,,$$
então dizemos que
  - f **é duas vezes derivável em** p **,**
  - L **é a derivada segunda de** f **em** p **;** notação: $\mathbf{f''(p)} := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que
f **não é duas vezes derivável em** p.

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada segunda de** f :

$$\mathbf{f''} : \mathbf{D_{f''}} \to \mathbb{R} : \mathbf{p} \mapsto \mathbf{f''(p)}$$

onde
$D_{f''} = \{p \in D_{f'} :\ p$ **é de acumul. de** $D_{f'}$ **e** f **é duas vezes derivável em** $p\}$

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável k vezes em $D_{f^{(k)}}$ e $p \in D_{f^{(k)}}$ um ponto de acumulação de $D_{f^{(k)}}$.

- **Se existir**
$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{p}} \frac{\mathbf{f^{(k)}(t) - f^{(k)}(p)}}{\mathbf{t - p}} = \mathbf{L} \ \in \mathbb{R}\,,$$
então dizemos que
  - f **é** $k+1$ **vezes derivável em** p **,**
  - L **é a derivada** $(k+1)$**-ésima de** f **em** p **;** not.: $\mathbf{f^{(k+1)}(p)} := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que
f **não é** $k+1$ **vezes derivável em** p.

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada** $(k+1)$**-ésima de** f :

$$\mathbf{f^{(k+1)}} : \mathbf{D_{f^{(k+1)}}} \to \mathbb{R} : \mathbf{p} \mapsto \mathbf{f^{(k+1)}(p)}$$

onde

$D_{f^{(k+1)}} = \left\{p \in D_{f^{(k)}} :\ p \text{ **é de acum. de** } D_{f^{(k+1)}} \text{ **e** } f \text{ **é** } k+1 \text{ **vezes deriv. em** } p\right\}$

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

- se f é k vezes derivável em p para todo $p \in A$ dizemos f **é** k **vezes derivável em** A,
- se f é k vezes derivável em p para todo $p \in D_f$ dizemos f **é** k **vezes derivável**.

6 Outros significados da derivada

- derivada é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função
- se $f(t)$ indica a posição ao longo de uma reta de uma partícula em função do tempo, então
  - f' indica a **velocidade instantânea**
  - f'' indica a **aceleração instantânea**
- mais em geral, se $f(t)$ indica uma certa quantidade física em função do tempo, então
  - f' indica a **taxa di variação** desta quantidade.

  exemplo $c(t)$ concentração de um reagente numa solução $\to$ $c'(t)$ taxa de variação da concentração.
- se $f(x)$ indica uma certa quantidade física A em função de outra quantidade B, então
  - f' indica a **taxa di variação de A com respeito a B**.

  exemplo $V(P)$ volume de um gás em função da Pressão $\to$ $V'(P)$ taxa de variação do volume em função da pressão

7 A diferencial

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável em p.

A **diferencial de f em p** é a função (linear)

$$df_p : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ h \to f'(p)\, h$$

Pelo que vimos possui a propriedade que

$$f(x) - f(p) = df_p(x-p) + o(x-p) \text{ quando } x \to p\,.$$

Resumo: se existir (real) $f'(p) := \lim_{t\to p} \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ então

- *Derivada de f em p*: é o número $f'(p)$.
- *Diferencial de f em p*: é a função linear $df_p : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ h \to f'(p)\, h$
- *Reta tangente ao gráfico de f em p*: é a função afim

$$T_p(x) : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ x \to f(p) + f'(p)(x-p) = f(p) + df_p(x-p)$$