10ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Aplicações da derivada, derivação implícita e taxas de variação

1. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e de y, onde $y = f(x)$ é uma função derivável dada implicitamente pela equação:
(a) $xe^y + xy = 3$ (b) $y + \ln(x^2 + y^2) = 4$ (c) $5y + cosy = xy$ (d) $2y + seny = x$

2. A função $y = f(x)$, $y > 0$, é dada implicitamente por $x^2 + 4y^2 = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 1.

3. Determine a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, no ponto (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$.

4. A reta tangente à curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ no ponto (x_0, y_0), $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, intercepta os eixos x e y nos pontos A e B, respectivamente. Mostre que a distância entre A e B não depende do ponto (x_0, y_0).

5. A função derivável $y = f(x)$ é tal que, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação $xy^3 + 2xy^2 + x = 4$. Sabe-se que $f(1) = 1$. Calcule $f'(1)$.

6. A função derivável $y = f(x)$ é tal que, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação $xy^3 + 2xy^2 + x = 4$. Sabe-se que $f(1) = 1$. Calcule $f'(1)$.

7. Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y+x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

8. Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $x = \sqrt{4t^2 + 3}$, com $t \geq 0$. Ache o valor de t para o qual a medida da velocidade instantânea é (a) 0; (b) 1; (c) 2.

9. A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x depende do tempo de acordo com a equação $x = e^{-t}\text{sen}t$, $t \geq 0$.
(a) Estude o sinal da velocidade $v(t)$ (b) Estude o sinal da aceleração $a(t)$
(c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}\text{sen}t$ (d) Esboce o gráfico de $x = e^{-t}\text{sen}t$, $t \geq 0$ e interprete o movimento.

10. Um ponto P move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Suponha que as coordenadas de $x(t)$ e $y(t)$ de P são deriváveis e que $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$. Pergunta-se: em que ponto da parábola a velocidade da ordenada y é o triplo da velocidade da abscissa x de P?

11. Um ponto move-se ao longo da elipse $x^2 + 4y^2 = 1$. A abscissa x está variando a uma velocidade $\dfrac{dx}{dt} = sen4t$. Mostre que: (a) $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{xsen(4t)}{4y}$ (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{sen^2 4t + 16xy^2 cos4t}{16y^3}$

12. Uma escada de $8m$ está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de $2m/s$, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a $3m$ da parede?

13. Um ponto P move-se sobre a parábola $y^2 = x$, $x > 0$ e $y > 0$. A abscissa está variando com uma aceleração que, em cada instante, é o dobro do quadrado da velocidade da ordenada y. Mostre que a ordenada está variando com aceleração nula.

14. Considere uma partícula que se desloca sobre o eixo x com função posição $x = cos3t$.
(a) Verifique que a aceleração é proporcional a posição;
(b) Calcule a aceleração no instante em que a partícula se encontra na posição $x = \frac{1}{2}$.

15. Os lados x e y de um retângulo estão variando a taxas constantes de $0,2m/s$ e $0,1m/s$, respectivamente. A que taxa estará variando a área do retângulo no instante em que $x = 1m$ e $y = 2m$?

16. Num determinado instante, as arestas de um paralelepípedo medem a, b e c (m) e, neste instante, estão variando com velocidade v_a, v_b e v_c (m/s), respectivamente. Mostre que neste instante o volume do paralelepípedo estará variando a uma taxa de $v_a bc + a v_b c + ab v_c$ (m^3/s).

17. O raio r e a altura h de um cilindro circular reto estão variando de modo a manter constante o volume V. Num determinado instante $h = 3cm$ e $r = 1cm$ e, neste instante, a altura está variando a uma taxa de $0,2cm/s$. A que taxa estará variando o raio neste instante?

Gabarito

Exercício 1 a) $y' = -\frac{y+e^y}{x(e^y+1)}$ (com $x \neq 0$).
Exercício 2 $y = -1/2(x-1) + 1/2$
Exercício 10 $P = (5/3, 5)$
Exercício 12 $v = 6/\sqrt{55}\ m/s$
Exercício 15 $0.5\ m^2/s$