

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA
ICMC - USP, São Carlos (SP)

Semana de estudos da matemática, 22 de outubro de 2014

Matemática - Engenharia

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA

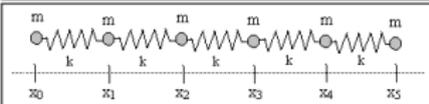
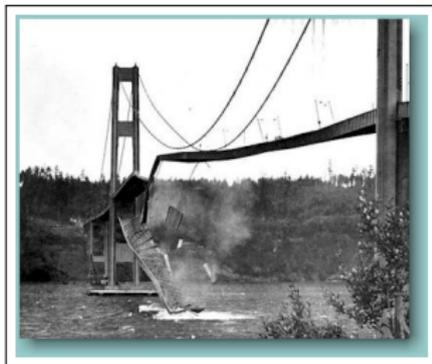
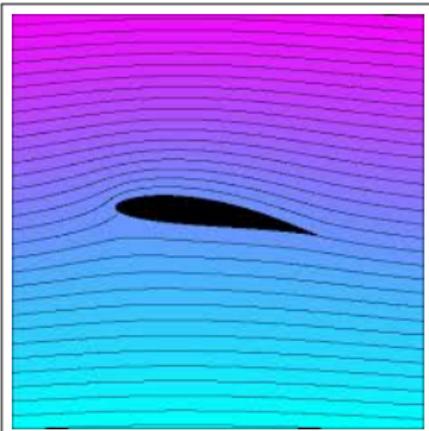
Introdução

Equações de movimento de um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um sistema elástico

A ponte de Tacoma



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{v} \right\} = 0.$$

Equações de movimento de um gás

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Consideremos um gás: podemos descrever seu estado através de **funções**:

$$\begin{aligned}\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{x}, t) \mapsto \rho(\mathbf{x}, t) : && \text{densidade do gás} \\ p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{x}, t) \mapsto p(\mathbf{x}, t) : && \text{pressão do gás} \\ \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 : (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) : && \text{velocidade do gás}\end{aligned}$$

Equações de movimento de um gás

O gás deve respeitar as leis da física:

1) Conservação da massa:

A massa contida em um volume V é

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Ela só pode variar por causa do fluxo de massa que passa através da fronteira $S = \partial V$:

$$F(t) = \oint_S \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{est}) dS_{\mathbf{x}}.$$

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Equações de movimento de um gás

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se V é fixo e as funções são regulares, podemos passar a derivada para dentro da integral, aplicar o teorema do divergente e obter

$$\int_V [\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v})] dV = 0,$$

como isso deve valer para qualquer $V \subseteq \mathbb{R}^3$, implica

$$\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) \equiv 0.$$

Obtivemos a chamada **Equação de continuidade**.

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Equações de movimento de um gás

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se V é fixo e as funções são regulares, podemos passar a derivada para dentro da integral, aplicar o teorema do divergente e obter

$$\int_V [\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v})] dV = 0,$$

como isso deve valer para qualquer $V \subseteq \mathbb{R}^3$, implica

$$\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) \equiv 0.$$

Obtivemos a chamada **Equação de continuidade**.

Equações de movimento de um gás

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se V é fixo e as funções são regulares, podemos passar a derivada para dentro da integral, aplicar o teorema do divergente e obter

$$\int_V [\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v})] dV = 0,$$

como isso deve valer para qualquer $V \subseteq \mathbb{R}^3$, implica

$$\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) \equiv 0.$$

Obtivemos a chamada **Equação de continuidade**.

Equações de movimento de um gás

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se V é fixo e as funções são regulares, podemos passar a derivada para dentro da integral, aplicar o teorema do divergente e obter

$$\int_V [\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v})] dV = 0,$$

como isso deve valer para qualquer $V \subseteq \mathbb{R}^3$, implica

$$\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) \equiv 0.$$

Obtivemos a chamada **Equação de continuidade**.

Equações de movimento de um gás

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

2) Equação do momento linear:

O momento linear contido em um volume V só pode variar por causa do fluxo de momento linear que passa através da fronteira $S = \partial V$ e das forças aplicadas sobre o gás que está em V :

Isto é,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \oint_S \mathbf{p} dS + \int_V \mathbf{F} dV,$$

Equações de movimento de um gás

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

3) Equação da energia:

A energia total contida em um volume V só pode variar por causa do fluxo de energia total que passa através da fronteira $S = \partial V$, do trabalho das forças aplicadas sobre o gás que está em V , e do calor que o gás que está em V troca com o que está fora:

Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \right) dV = & - \oint_S \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ & + \oint_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV - \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

Equações de movimento de um gás

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \Delta v_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div}(\mathbf{v}) + F_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{v} \right\} = \dots$$

Premio de um milhão de dolares!

Equações de movimento de um gás

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \mu \Delta v_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div}(\mathbf{v}) + F_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{v} \right\} = \dots$$

Premio de um milhão de dolares!

Equações de movimento de um gás

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Equações de Euler

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i} p = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{v} \right\} = 0.$$

► bkdiv

► bkP

Equações de movimento de um gás

O que podemos fazer com estas equações?

- Matemáticos puros procuram condições para ter existência e/ou unicidade de soluções, propriedades das soluções...
- Matemáticos aplicados / Engenheiros procuram maneiras de aproximar soluções numericamente.

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

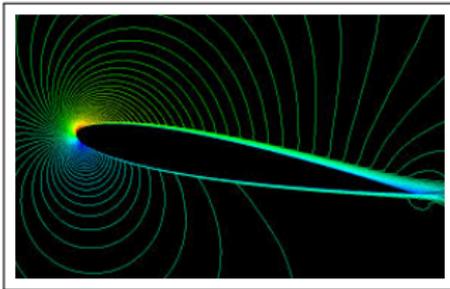
Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

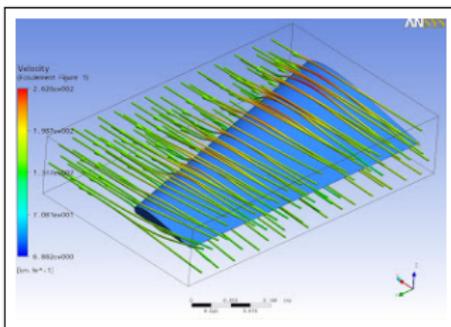
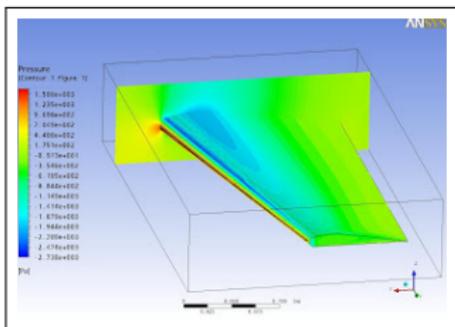
Equações de movimento de um gás

O que podemos fazer com estas equações?

- Matemáticos puros procuram condições para ter existência e/ou unicidade de soluções, propriedades das soluções...
- Matemáticos aplicados / Engenheiros procuram maneiras de aproximar soluções numericamente.



Equações de movimento de um gás



#CFD asa# #galeria asa(3:24)#

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de movimento de um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um sistema elástico

A ponte de Tacoma

Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

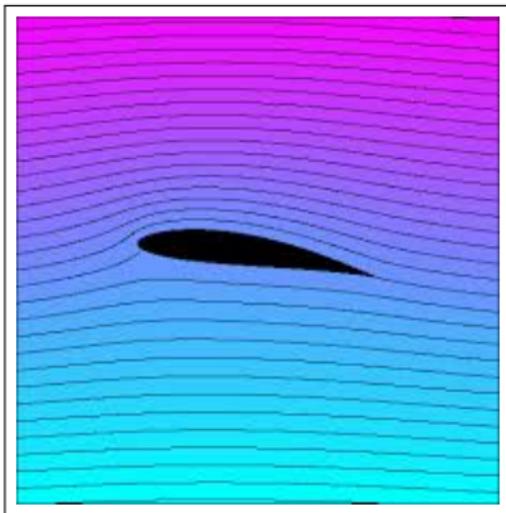
Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa

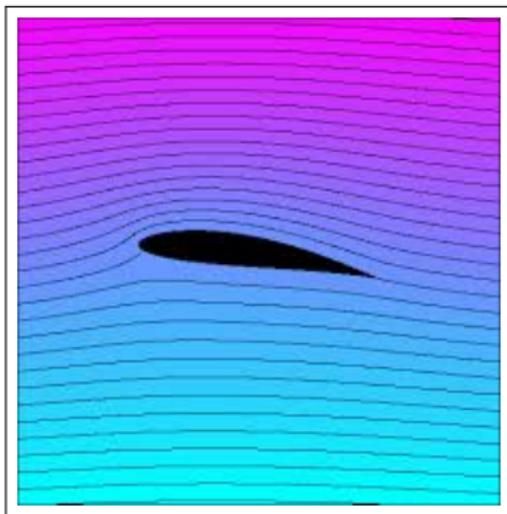
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma



Escoamento plano ao redor de um perfil de asa



Mais simplificações:

- duas variáveis: x, y ,
- sem viscosidade,
- sem variação de densidade $div(\mathbf{v}) = 0$
- rotacional nulo: $rot(\mathbf{v}) = 0$

► EULER

Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \\ \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

- Se Ω simplesmente conexo poderia por $\mathbf{v} = \nabla\phi$ e obter $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi = 0$: equação de Laplace!
- No caso geral, podemos explorar a teoria das **funções holomorfas**: se $f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, então
 - f é holomorfa e $f'(z) = \phi_x + i\psi_x$se e só se
 - $\phi_x = \psi_y$ e $\phi_y = -\psi_x$,Isso implica que o campo vetorial $\mathbf{v} = (v, w) = (\phi_x, \phi_y)$ satisfaz:
 $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \phi_{xx} + \phi_{yy} = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0$ e
 $\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \phi_{yx} - \phi_{xy} = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$,
isto é, \mathbf{v} **satisfaz (3.1)**, ϕ, ψ são funções harmônicas

Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de movimento de um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um sistema elástico

A ponte de Tacoma

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \\ \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

- Se Ω simplesmente conexo poderia por $\mathbf{v} = \nabla\phi$ e obter $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi = 0$: equação de Laplace!
- No caso geral, podemos explorar a teoria das **funções holomorfas**: se $f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, então
 - f é holomorfa e $f'(z) = \phi_x + i\psi_x$se e só se
 - $\phi_x = \psi_y$ e $\phi_y = -\psi_x$,Isso implica que o campo vetorial $\mathbf{v} = (v, w) = (\phi_x, \phi_y)$ satisfaz:
 $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \phi_{xx} + \phi_{yy} = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0$ e
 $\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \phi_{yx} - \phi_{xy} = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$,
isto é, \mathbf{v} **satisfaz (3.1)**, ϕ, ψ são funções harmônicas

Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \\ \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

- Se Ω simplesmente conexo poderia por $\mathbf{v} = \nabla\phi$ e obter $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi = 0$: equação de Laplace!
- No caso geral, podemos explorar a teoria das **funções holomorfas**: se $f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, então
 - f é holomorfa e $f'(z) = \phi_x + i\psi_x$

se e só se

- $\phi_x = \psi_y$ e $\phi_y = -\psi_x$,

Isso implica que o campo vetorial $\mathbf{v} = (v, w) = (\phi_x, \phi_y)$ satisfaz:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \phi_{xx} + \phi_{yy} = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0 \text{ e}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \phi_{yx} - \phi_{xy} = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0,$$

isto é, \mathbf{v} satisfaz (3.1), ϕ, ψ são funções harmônicas

Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \\ \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

- Se Ω simplesmente conexo poderia por $\mathbf{v} = \nabla\phi$ e obter $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi = 0$: equação de Laplace!
- No caso geral, podemos explorar a teoria das **funções holomorfas**: se $f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, então
 - f é holomorfa e $f'(z) = \phi_x + i\psi_x$se e só se
 - $\phi_x = \psi_y$ e $\phi_y = -\psi_x$,Isso implica que o campo vetorial $\mathbf{v} = (v, w) = (\phi_x, \phi_y)$ satisfaz:
 $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \phi_{xx} + \phi_{yy} = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0$ e
 $\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \phi_{yx} - \phi_{xy} = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$,
isto é, \mathbf{v} **satisfaz (3.1)**, ϕ, ψ são funções harmônicas

Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

CONCLUIMOS:

Dada uma função complexa holomorfa

$$f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

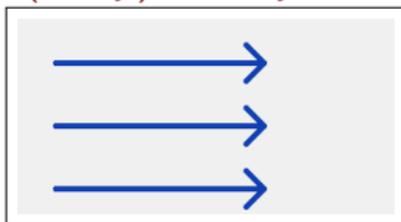
o campo vetorial

$$(x, y) \mapsto (\phi_x(x, y), \phi_y(x, y))$$

representa a velocidade de um escoamento plano incompressível e irrotacional.

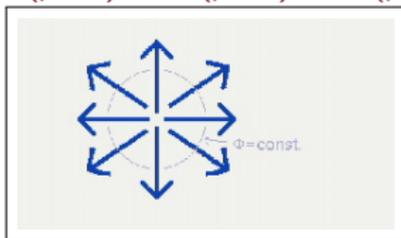
Escoamento plano: exemplos

- $f(x + iy) = x + iy \Leftrightarrow \mathbf{v} = (1, 0)$



escoamento uniforme horizontal

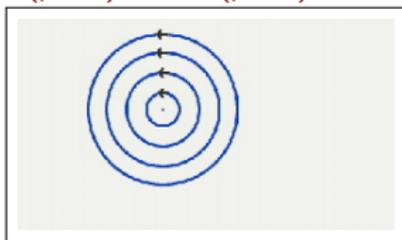
- $f(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta \Leftrightarrow \mathbf{v} = (x, y)/(x^2 + y^2)$



fonte

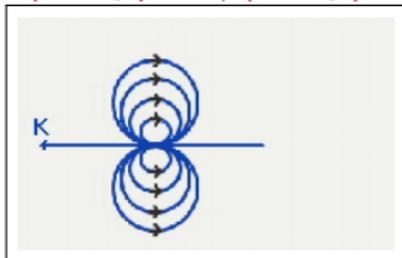
Escoamento plano: exemplos

■ $f(\rho e^{i\theta}) = i \ln(\rho e^{i\theta}) = -\theta + i \ln(\rho) \Leftrightarrow \mathbf{v} = (y, -x)/(x^2 + y^2)$



vórtice

■ $f(x + iy) = 1/(x + iy) = (x - iy)/(x^2 + y^2)$



dípolo

Escoamento plano: exemplos

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

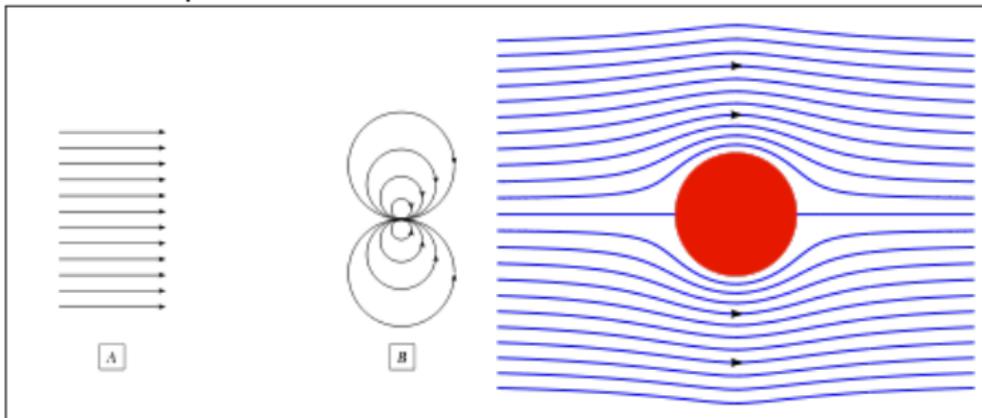
Equações de movimento de um gás

Perfil de asa
Exemplos

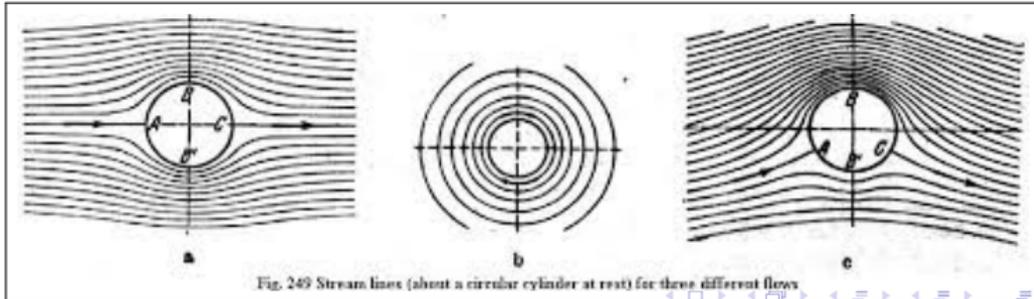
Mecânica de um sistema elástico

A ponte de Tacoma

somando dipólo com uniforme:



somando ainda um vórtice



Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

...e agora um pouco de magia: se **mudo de variável** pondo $z = g(w)$, sendo g também holomorfa (**transformação conforme**), então $f(g(w))$ também representa um escoamento...
com oportunas transformações conformes posso **transformar a região externa ao círculo em regiões mais complicadas:**

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de movimento de um gás

Perfil de asa

Exemplos

Mecânica de um sistema elástico

A ponte de Tacoma

Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

...e agora um pouco de magia: se **mudo de variável** pondo $z = g(w)$, sendo g também holomorfa (**transformação conforme**), então $f(g(w))$ também representa um escoamento... com oportunas transformações conformes posso **transformar a região externa ao círculo em regiões mais complicadas**:

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de movimento de um gás

Perfil de asa

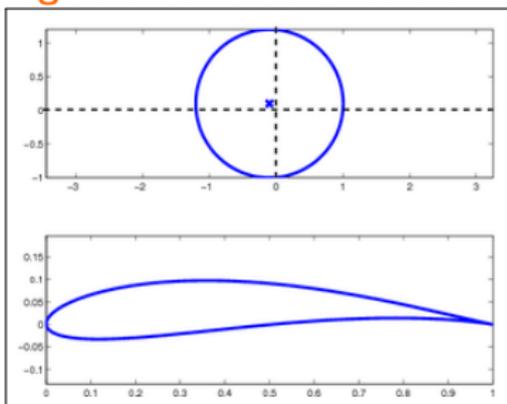
Exemplos

Mecânica de um sistema elástico

A ponte de Tacoma

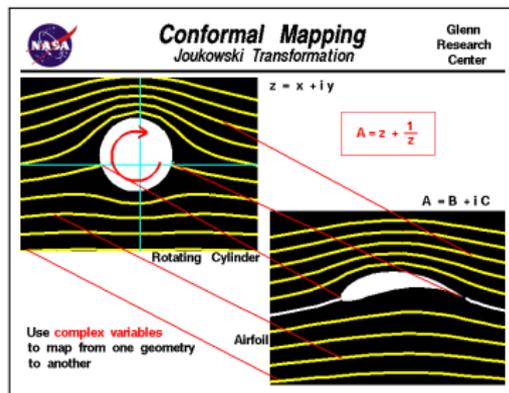
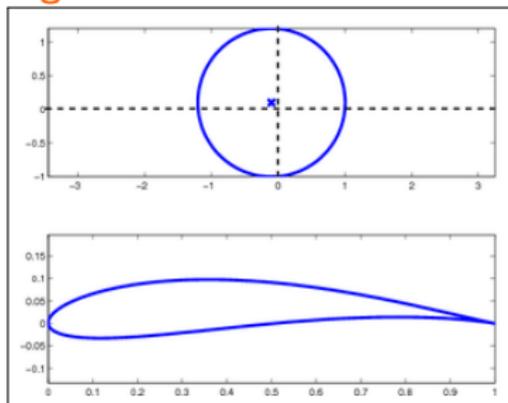
Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

...e agora um pouco de magia: se **mudo de variável** pondo $z = g(w)$, sendo g também holomorfa (**transformação conforme**), então $f(g(w))$ também representa um escoamento....
com oportunas transformações conformes posso **transformar a região externa ao círculo em regiões mais complicadas**:



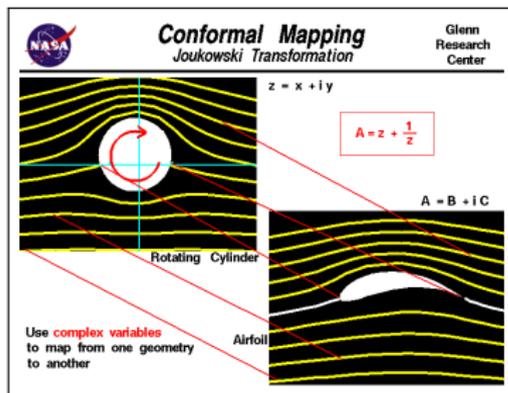
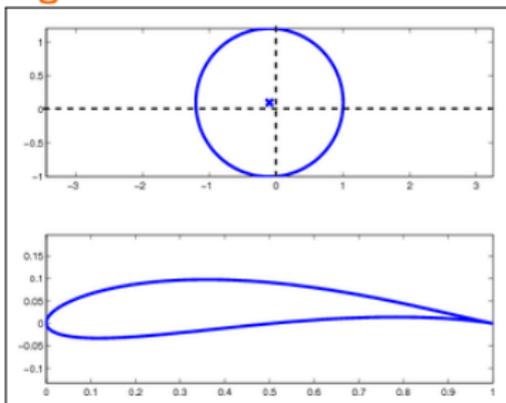
Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

...e agora um pouco de magia: se **mudo de variável** pondo $z = g(w)$, sendo g também holomorfa (**transformação conforme**), então $f(g(w))$ também representa um escoamento... com oportunas transformações conformes posso **transformar a região externa ao círculo em regiões mais complicadas**:



Escoamento plano ao redor de um perfil de asa

...e agora um pouco de magia: se **mudo de variável** pondo $z = g(w)$, sendo g também holomorfa (**transformação conforme**), então $f(g(w))$ também representa um escoamento... com oportunas transformações conformes posso **transformar a região externa ao círculo em regiões mais complicadas:**

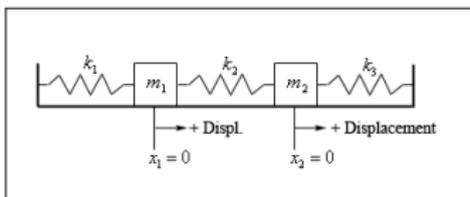


Uma vez que temos a velocidade **podemos calcular a pressão:**

► EULER

Calculamos a sustentação gerada por esta asa!

Mecânica de um sistema elástico



Vamos escrever as equações do movimento deste pequeno sistema:

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f_1$$

$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 + f_2$$

em forma matricial

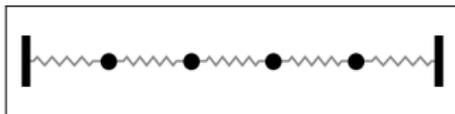
$$M\mathbf{x}'' = -K\mathbf{x} + F \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Mecânica de um sistema elástico

Se fossem 3 massas e 4 molas

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$



Se fossem n massas e $n + 1$ molas

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & \dots & 0 & -k_{n-2} & k_{n-2}+k_{n-1} & k_{-n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & -k_n & k_n+k_{n+1} \end{bmatrix},$$

Mecânica de um sistema elástico

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Procuramos soluções de $M\mathbf{x}'' = -K\mathbf{x}$:

- Suponha a solução seja um vetor $\mathbf{x}(t)$ na forma $\mathbf{x}(t) = X \cos(\omega t)$.
- Substituindo obtemos $-\omega^2 MX \cos(\omega t) = -KX \cos(\omega t)$, logo $X \neq 0$ se e só se $\omega^2 MX = KX$, i.é,

$$M^{-1}KX = \omega^2 X :$$

X autovetor e ω^2 autovalor de $M^{-1}K$.

Observe que $M^{-1}K$ é **simétrica definida positiva**! logo é diagonalizável e existem n autovalores positivos e n autovetores independentes.

Mecânica de um sistema elástico

Matemática e Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de movimento de um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um sistema elástico

A ponte de Tacoma

Procuramos soluções de $M\mathbf{x}'' = -K\mathbf{x}$:

- Suponha a solução seja um vetor $\mathbf{x}(t)$ na forma $\mathbf{x}(t) = X \cos(\omega t)$.
- Substituindo obtemos $-\omega^2 MX \cos(\omega t) = -KX \cos(\omega t)$, logo $X \neq 0$ se e só se $\omega^2 MX = KX$, i.é,

$$M^{-1}KX = \omega^2 X :$$

X autovetor e ω^2 autovalor de $M^{-1}K$.

Observe que $M^{-1}K$ é **simétrica definida positiva**! logo é diagonalizável e existem n autovalores positivos e n autovetores independentes.

Mecânica de um sistema elástico

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Procuramos soluções de $M\mathbf{x}'' = -K\mathbf{x}$:

- Suponha a solução seja um vetor $\mathbf{x}(t)$ na forma $\mathbf{x}(t) = X \cos(\omega t)$.
- Substituindo obtemos $-\omega^2 MX \cos(\omega t) = -KX \cos(\omega t)$, logo $X \neq 0$ se e só se $\omega^2 MX = KX$, i.é,

$$M^{-1}KX = \omega^2 X :$$

X autovetor e ω^2 autovalor de $M^{-1}K$.

Observe que $M^{-1}K$ é **simétrica definida positiva**! logo é diagonalizável e existem n autovalores positivos e n autovetores independentes.

Mecânica de um sistema elástico

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Procuramos soluções de $M\mathbf{x}'' = -K\mathbf{x}$:

- Suponha a solução seja um vetor $\mathbf{x}(t)$ na forma $\mathbf{x}(t) = X \cos(\omega t)$.
- Substituindo obtemos $-\omega^2 MX \cos(\omega t) = -KX \cos(\omega t)$, logo $X \neq 0$ se e só se $\omega^2 MX = KX$, i.é,

$$M^{-1}KX = \omega^2 X :$$

X autovetor e ω^2 autovalor de $M^{-1}K$.

Observe que $M^{-1}K$ é **simétrica definida positiva**! logo é diagonalizável e existem n autovalores positivos e n autovetores independentes.

Mecânica de um sistema elástico

Em particular, existem Λ matriz diagonal e Γ matriz invertível tais que

$$M^{-1}K\Gamma = \Gamma\Lambda.$$

Vamos mudar de incógnita, pondo $X(t) = \Gamma V(t)$: V será então o vetor das componentes de X nas direções dos autovetores. Temos

$$MX'' = -KX + F \quad (4.2)$$

$$\Gamma V'' = -M^{-1}K\Gamma V + M^{-1}F = -\Gamma\Lambda V + M^{-1}F \quad (4.3)$$

$$V'' = -\Lambda V + \Gamma^{-1}M^{-1}F \quad (4.4)$$

Mecânica de um sistema elástico

Em particular, existem Λ matriz diagonal e Γ matriz invertível tais que

$$M^{-1}K\Gamma = \Gamma\Lambda.$$

Vamos mudar de incógnita, pondo $X(t) = \Gamma V(t)$: V será então o vetor das componentes de X nas direções dos autovetores. Temos

$$MX'' = -KX + F \quad (4.2)$$

$$\Gamma V'' = -M^{-1}K\Gamma V + M^{-1}F = -\Gamma\Lambda V + M^{-1}F \quad (4.3)$$

$$V'' = -\Lambda V + \Gamma^{-1}M^{-1}F \quad (4.4)$$

Mecânica de um sistema elástico

Em particular, existem Λ matriz diagonal e Γ matriz invertível tais que

$$M^{-1}K\Gamma = \Gamma\Lambda.$$

Vamos mudar de incógnita, pondo $X(t) = \Gamma V(t)$: V será então o vetor das componentes de X nas direções dos autovetores. Temos

$$MX'' = -KX + F \quad (4.2)$$

$$\Gamma V'' = -M^{-1}K\Gamma V + M^{-1}F = -\Gamma\Lambda V + M^{-1}F \quad (4.3)$$

$$V'' = -\Lambda V + \Gamma^{-1}M^{-1}F \quad (4.4)$$

Mecânica de um sistema elástico

Conclusão:

$$V'' = -\Lambda V + \Phi :$$

as componentes nas direção dos autovalores satisfazem **equações desacopladas** do tipo

$$v_i'' = -\omega_i^2 v_i + \phi_i$$

onde ϕ_i é a componente do vetor das acelerações que age sobre o autovetor considerado.

Os autovetores e autovalores são chamados **modos de vibração** e as **frequências próprias** do sistema!

#desenho modos#

#ponte0:15# #ponte1:10# #ponte1:50#

A ponte de Tacoma, Flutter, problemas abertos

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Ultimo problema: **A queda da ponte de Tacoma.**
#Tacoma Bridge0:14# #Flutter Piper0:46#

A ponte de Tacoma, Flutter, problemas abertos I

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

Bibliografia matemática (parcial) sobre a ponte de Tacoma:

- Glover, J. ; Lazer, A. C. ; McKenna, P. J. *Existence and stability of large scale nonlinear oscillations in suspension bridges*. **Z. Angew. Math. Phys.** **40 (1989), no. 2, 172–200.**
- McKenna, P. J. *Large torsional oscillations in suspension bridges revisited: fixing an old approximation*. **Amer. Math. Monthly** **106 (1999), no. 1, 1–18.**
- McKenna, P. J. ; Ó Tuama, C. *Large torsional oscillations in suspension bridges visited again: vertical forcing creates torsional response*. **Amer. Math. Monthly** **108 (2001), no. 8, 738–745.**
- Humphreys, L. ; McKenna, P. J. *When a mechanical model goes nonlinear: unexpected responses to low-periodic shaking*. **Amer. Math. Monthly** **112 (2005), no. 10, 861–875.**

A ponte de Tacoma, Flutter, problemas abertos II

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

- Lazer, A. C. ; McKenna, P. J. *On travelling waves in a suspension bridge model as the wave speed goes to zero.* **Nonlinear Anal.** **74** (2011), no. 12, 3998–4001.
- McKenna, P. J. *Oscillations in suspension bridges, vertical and torsional.* **Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S** **7** (2014), no. 4, 785–791.
- Al-Gwaiz, M. ; Benci, V. ; Gazzola, F. *Bending and stretching energies in a rectangular plate modeling suspension bridges.* **Nonlinear Anal.** **106** (2014), 18–34.
- A. Ferrero, F. Gazzola, *A partially hinged rectangular plate as a model for suspension bridges*, to appear in **Disc. Cont. Dyn. Syst. A**
- G. Arioli, F. Gazzola, *A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge collapse*, to appear in **Appl. Math. Modelling**

A ponte de Tacoma, Flutter, problemas abertos III

Matemática e
Engenharia

EUGENIO MASSA

Introdução

Equações de
movimento de
um gás

Perfil de asa
Exemplos

Mecânica de um
sistema elástico

A ponte de
Tacoma

- E. Berchio, F. Gazzola, *A qualitative explanation of the origin of torsional instability in suspension bridges*, [arXiv:0967187](#)
- F. Gazzola, M. Jleli, B. Samet, *On the Melan equation for suspension bridges*, to appear in [J. Fixed Point Theory Appl.](#)