

Exercício de Aplicação

João Paulo Casagrande Bertoldo & Prof. Eduardo Fontoura Costa

1 Introdução

Vamos estudar um pouco um braço robótico de 3 graus de liberdade (Figura 1).

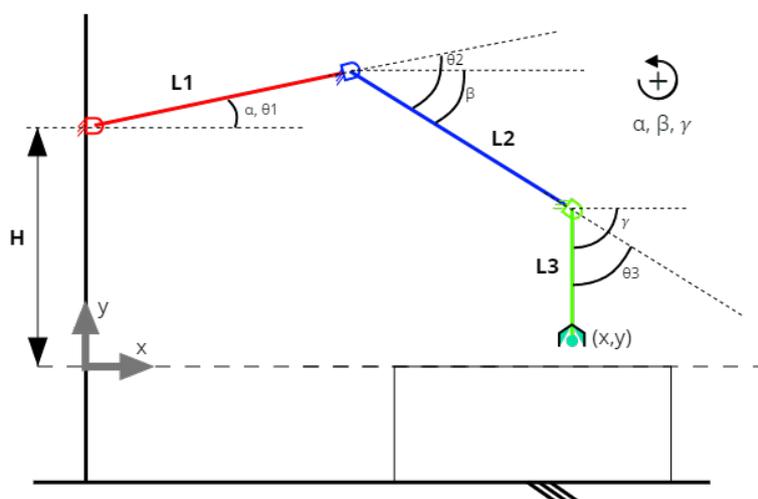


Figura 1: Desenho esquemático da geometria do robô.

Para a execução de uma tarefa, por exemplo pegar um objeto em uma mesa e posicioná-lo em uma máquina, cada articulação ativa deve executar uma série de movimentos ao longo do tempo. Digamos que a articulação entre o braço azul e o verde deve partir de um certo ângulo num certo momento (aqui nesse exercício, $\theta_b = 0$ no instante zero) e, depois de um intervalo de tempo especificado (aqui, 5 segundos), chegar a um ângulo desejado (aqui, $\theta_b = \pi/2$ no instante 5). Na prática, temos que responder o seguinte:

Quais comandos de tensão devem ser aplicados na entrada dos motores e como o sistema se comporta durante a transição?

2 Modelo

Por simplicidade, vamos tratar da dinâmica de apenas um braço isolado e seu acoplamento com um motor de corrente contínua (“motor CC” ou “motor DC”). Também vamos considerar que cada braço pode ser tratado como uma barra rígida de faces retangulares feita de aço (Figura 2).

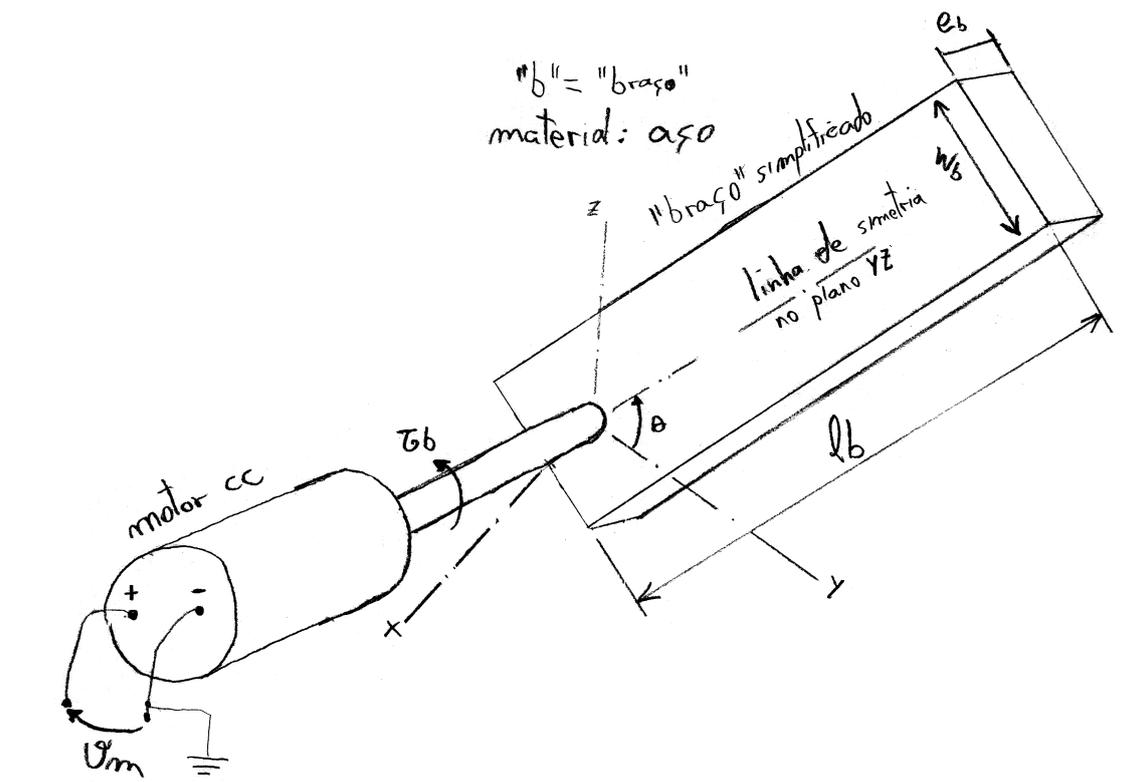


Figura 2: Desenho de um braço simplificado.

O modelo mecânico deste sistema resulta em uma inércia equivalente J_{eq} e um coeficiente de atrito equivalente f_{eq} . Sob a inércia J_{eq} é aplicado o torque gerado pelo motor DC, criando uma aceleração angular $\ddot{\theta}_b$, conforme a Equação 1 (veja a Figura 3).

$$\tau_m = J_{eq}\ddot{\theta}_b + f_{eq}\dot{\theta}_b \quad (1)$$

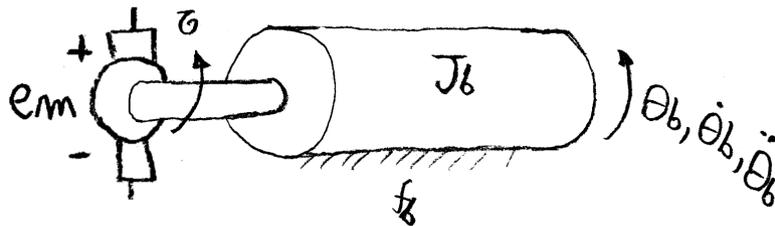


Figura 3: Modelo mecânico.

O sistema elétrico é composto por uma fonte ideal, uma resistência, uma indutância e uma força eletromotriz; todos em série, resultando na Equação 2 (veja a Figura 4). O acoplamento eletromecânico é modelado com relações lineares entre o torque e a corrente do circuito ($\tau_m = K_m i_m$) e entre a velocidade de rotação do braço e a força eletromotriz ($e_m = \frac{K_m}{r_e} \dot{\theta}_b$).

$$v_m = R_m i_m + L_m \frac{di_m}{dt} + \frac{K_m}{r_e} \dot{\theta}_b \quad (2)$$

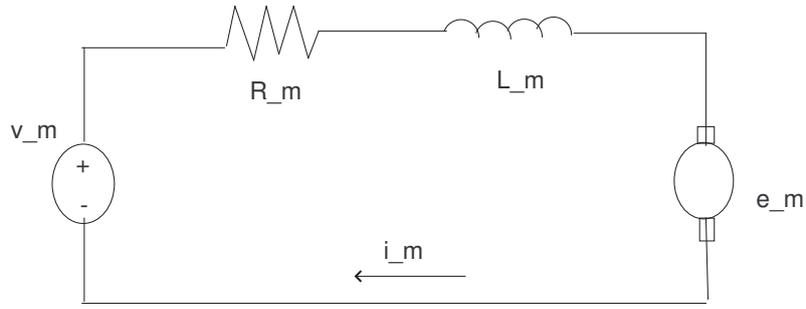


Figura 4: Modelo elétrico.

3 Espaço de estados

!ATENÇÃO! A partir daqui até o final da Seção 4, trata-se de uma explicação simplificada da elaboração matemática do problema. ESTAS PARTES SÃO OPCIONAIS! Se você quiser ir direto para o exercício de implementação do método numérico, vá para a Seção de Exercícios (5) Caso você queira entender como o problema foi formulado (altamente recomendado), leia tudo (não é muito).

Definimos um espaço de estados de dimensão três da seguinte maneira:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_b \\ \dot{\theta}_b \\ i_m \end{bmatrix} \implies \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \ddot{\theta}_b \\ \frac{di_m}{dt} \end{bmatrix}$$

A partir das Equações 1 e 2, obtemos a seguinte expressão para o vetor $\dot{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ -\frac{f_{eq}}{J_{eq}}\dot{\theta}_b + \frac{K_m}{J_{eq}}i_m \\ -\frac{K_m}{r_e L_m}\dot{\theta}_b - \frac{R_m}{L_m}i_m + \frac{1}{L_m}v_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_m}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{K_m}{r_e L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_b \\ \dot{\theta}_b \\ \frac{di_m}{dt} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_m} \end{bmatrix}}_B \underbrace{[v_m]}_{\mathbf{u}}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (3)$$

Ou seja, conforme mostra a Equação 3, obtemos uma expressão para a derivada do espaço de estados com termos lineares que dependem do próprio espaço de estados ($\mathbf{x} = [\theta_b \ \dot{\theta}_b \ i_m]^T$) e do vetor de comando ($\mathbf{u} = [v_m]$).

O vetor comando é o *input* do sistema; isso significa que ele é a única coisa que podemos controlar diretamente - todo o resto apenas reage às mudanças do *input*. Esta equação é contínua no tempo, o que exige a resolução de uma equação diferencial ordinária. Porém, podemos discretizar o sistema e obter uma equação diferença.

A discretização temporal é feita com intervalos de T_s segundos ("s" de "sampling", que significa "amostragem" em inglês). Isso significa que passaremos a analisar o sistema nos instantes de tempo $t = k T_s$, para $k = 0, 1, \dots, K$. Ou seja:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(k T_s), \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (4)$$

Desta forma descrevemos o sistema em instantes de tempo discretos e em um intervalo finito. Para simplificar um pouco a escrita, usaremos a seguinte notação:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(k T_s), \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (5)$$

Então:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{a}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}\mathbf{u}_k \quad (6)$$

Usando a formulação discreta, em vez de resolver a Equação 3, calcularemos os valores numéricos da Equação 6 em $k = 0, 1, \dots, K$, onde as matrizes \mathbf{a} e \mathbf{b} serão obtidas usando uma função de discretização do MATLAB - as transformações feitas por esta função fogem do escopo desta formulação; para mais informações, consulte a referência da função "c2d" do MATLAB.

4 Sistema linear

Ok, vamos ao que interessa...

Conhecemos, por suposição, os valores iniciais de θ_b , $\dot{\theta}_b$ e i_m ; portanto conhecemos \mathbf{x}_0 . No instante de tempo $t = K T_s$, queremos que $\theta_b = \theta_F$, $\dot{\theta}_b = 0$ e $i_m = 0$. A corrente deve ser nula para que o torque seja nulo ($\tau_m = K_m i_m$).

Substituindo k por 0 e K em 6 e rearranjando os termos, obtemos:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}\mathbf{x}_0, \quad \text{onde } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{a}\mathbf{x}_{K-1} - \mathbf{b}\mathbf{u}_{K-1} = -\mathbf{x}_K, \quad \text{onde } \mathbf{x}_K = \begin{bmatrix} \theta_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Fazendo o mesmo para um k genérico tal que $k = 1, \dots, K - 1$, temos:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{a}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}\mathbf{u}_k = 0, \quad \text{para } k = 1, \dots, K - 1 \quad (9)$$

Vamos usar as Equações 7, 8 e 9 para montar um sistema linear onde as incógnitas são $x_1, x_2, \dots, x_{K-1}, x_K$.

Neste mesmo sistema linear, também incluiremos equações de restrições quanto aos valores numéricos de \mathbf{u}_k , sendo que, na metade do percurso, este deve inverter de sinal (a primeira parte é a aceleração e a segunda é a desaceleração).

Assim, podemos transformar o problema em um sistema linear com o seguinte formato:

