Sistemas dinâmicos não-lineares

SMA - 5880

Prof. Alexandre N. Carvalho

Departamento de Matemática
ICMC-USP São Carlos
Segundo semestre de 2023

Sumário

Prefácio

Para explicar o que é um sistema dinâmico imaginemos que queiramos prever o valor variável x em instantes futuros e denotemos o espaço dos possíveis valores para esta variável por X. A variável x pode descrever uma infinidade quantidades físicas, biológicas, econômicas, etc. Como exemplo citamos a posição de um corpo no espaço (um vetor em $\mathbb{R}^3$) ou a distribuição de temperaturas em um corpo Ω (uma função definida em Ω e tomando valores em $\mathbb{R}$). Assim, o espaço X pode ser de dimensão finita ou infinita.

Um sistema dinâmico é uma família de operadores $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$, definidos em X e tomando valores nele mesmo de forma que, dado que o valor da variável no instante s é x, $S(t,s)x$ é o valor da variável num instante posterior t. O conhecimento do sistema dinâmico nos permite saber (no futuro) os valores da variável que conhecemos no instante presente para cada possível valor da variável x em X. É claro que esta família de operadores deve obedecer certas condições de compatibilidade. Estas condições são i) para todo t, $S(t,t) = I_X$ onde I_X é a identidade em X e ii) $S(t,\tau)S(\tau,x)x = S(t,s)x$ sempre que $t \geqslant \tau \geqslant s$ e $x \in X$.

Se t,s forem tomados em $\mathbb{Z}$, diremos que $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ é um sistema dinâmico discreto e se t,s são tomados em $\mathbb{R}$ diremos que $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ é um sistema dinâmico contínuo. Para fixar idéias vamos imaginar que estamos trabalhando com um sistema dinâmico contínuo.

O espaço X em geral é um espaço métrico e denotaremos por $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot) : X \times X \to [0,\infty)$

a sua métrica. Em geral também pedimos que um sistema dinâmico goze de alguma propriedade de continuidade; isto é, iii) $\{(t,s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times X : t \geqslant s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

Definição 0.0.1 *Seja X um espaço métrico e $\mathcal{C}(X)$ o espaço das transformações contínuas de X nele mesmo. Um sistema dinâmico em X é uma família $\{S(t,s) : t \geqslant s\} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que*

i) $S(t,t)x = x$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e para todo* $x \in X$*,*

ii) $S(t,\sigma)\circ S(\sigma,s) = S(t,s)$ *para todo* $t \geqslant \sigma \geqslant s$*,*

iii) $\{(t,s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times X : t \geqslant s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ *é contínua.*

Em geral, distinguiremos dois tipos de sistemas dinâmicos contínuos. Os sistemas dinâmicos autônomos são aqueles que satisfazem $S(t,s) = S(t-s,0)$ para todo $t \geqslant s$. Neste caso se definimos $T(t) = S(t,0) \in \mathcal{C}(X)$ temos que

i) $T(0)x = x$, para todo $x \in X$,

ii) $T(t)T(s) = T(t+s)$ para todo $t,s \in [0,\infty)$ e

iii) $[0,\infty)\times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Uma família $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ com as propriedades acima é chamada um semigrupo contínuo. É claro que, a partir de um semigrupo contínuo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ podemos definir um sistema dinâmico autônomo $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ fazendo $S(t,s) = T(t-s)$, $t \geqslant s$.

Note que, num sistema dinâmico autônomo, a evolução do estado x ocupado no instante s para o estado $S(t+s,s)x$ ocupado no instante $t+s$ é independente de s e depende apenas de t.

Os demais sistemas dinâmicos serão chamados sistemas dinâmicos não autônomos.

Os sistemas dinâmicos aparecem frequentemente associados a equações diferenciais que podem ser ordinárias, parciais ou funcionais. Para exemplificar, vamos considerar uma classe de exemplos que surge nas equações diferenciais ordinárias

Exemplo 0.0.2 *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x) \\ x(s) &= x_s \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma função continuamente diferenciável. Nestas condições, o seguinte resultado vale*

Teorema 0.0.3 *Para cada* $x_s \in \mathbb{R}^n$ *e* $s \in \mathbb{R}$, *existe* $\tau > s$ *e função continuamente diferenciável* $[s,\tau) \ni t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\xi(s) = x_s$ *e* $\dot{\xi}(t) = f(t,\xi(t))$ *para todo* $t \in (s,\tau)$. *Esta função é chamada uma solução do problema de valor inicial* (4.2.15) *e tem as seguintes propriedades*

- *Se existe* $\sigma > s$ *e função continuamente diferenciavel* $\eta : [s,\sigma) \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\eta(s) = x_s$ *e* $\dot{\eta}(t) = f(t,\eta(t))$ *para todo* $t \in (s,\sigma)$ *então* $\xi(t) = \eta(t)$ *para todo* $t \in [0, \min\{\sigma,\tau\})$

- *Existe* $\tau(s,x_s) > s$ *e uma solução* $[s,\tau_{s,x_s}) \ni t \mapsto x(t,s,x_s) \in \mathbb{R}^n$ *de* (4.2.15) *tal que ou* $\tau(s,x_s) = \infty$ *ou* $\limsup_{t\to\tau(s,x_s)} \|x(t,s,x_s)\| = \infty$.

- *Se* $E = \{(t,s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : s \leqslant t \leqslant \tau(s,x)\}$, *a função* $E \ni (t,s,x_s) \mapsto x(t,s,x_s) \in \mathbb{R}^n$ *é contínua.*

Denotaremos por $x(t,s,x_s)$, $t \in [s,\tau(s,x_s))$ *a única solução de* (4.2.15).

Suponha que existe uma constante $M > 0$ *tal que*

$$f(t,x)\cdot x < 0, \ \textit{sempre que} \ \ \|x\| \geqslant M, \quad \textit{e para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{0.0.2}$$

Então, se $x(t,s,x_s)$ *é a solução de* (4.2.15),

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 2f(t,x)\cdot x.$$

Segue de (0.0.2) *que e do Teorema 0.0.3 que* $\tau(s,x_s)=\infty$ *para todo* $s\in\mathbb{R}$ *e* $x_s\in\mathbb{R}^n$.

Nestas condições defina $S(t,s):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $t\geqslant s$, *por*

$$S(t,s)x_s = x(t,s,x_s),\ \ x_s\in\mathbb{R}^n.$$

É claro que, em vista do Teorema 0.0.3, a única condição que precisamos verificar para concluir que $\{S(t,s):t\geqslant s\}$ *é um sistema dinâmico (com* $X=\mathbb{R}^n$*) é a condição ii) da Definição 0.0.1. Esta condição segue da unicidade de solução para* (4.2.15) *dada no Teorema 0.0.3 observando-se que* $x(t,\sigma,x(\sigma,s,x_s)$ *e* $x(t,s,x_s)$ *são ambas soluções de*

$$\dot{x} = f(t,x)$$
$$x(\sigma) = x(\sigma,s,x_s)\in\mathbb{R}^n.$$

Se $f(t,x)=g(x)$ *para todo* $x\in\mathbb{R}^n$*; isto é,* f *não depende de* t*, então* $t\mapsto x(t+\tau,\tau,x_s)$ *e* $t\mapsto x(t+\sigma,\sigma,x_s)$ *são ambas soluções de*

$$\dot{x} = g(x)$$
$$x(0) = x_s\in\mathbb{R}^n.$$

Neste caso $\{T(t):t\geqslant 0\}$ *definido por* $T(t)x_0 = x(t,0,x_0)$ *define um semigrupo contínuo de operadores (com* $X=\mathbb{R}^n$*).*

Exercício 0.0.4 *Por que o argumento acima não funciona se* f *depende de* t*?*

Agora que já entendemos o que é um sistema dinâmico vamos procurar definir o que buscaremos compreender do mesmo.

Primeiramente insistiremos para que os sistemas dinâmicos estudados aqui incluam modelos mais gerais que as equações diferenciais ordinárias. Assim, assumiremos que X

é um espaço métrico ou, em situações onde a estrutura de espaço vetorial seja necesária, um espaço de Banach (que pode ter dimensão infinita).

Em segundo lugar, dada a natureza do nosso espaço de estados X, gostaríamos de estudar aqueles sistemas dinâmicos que fossem dissipativos (no exemplo acima todas as soluções eventualmente entram na bola de raio M). Um conjunto no qual *t*odas as soluções entram (de forma uniforme em limitados de X) depois de decorrido um certo tempo é chamado absorvente. Queremos que os sistemas dinâmicos que consideraremos possuam conjuntos absorventes limitados. Também queremos que a interseção de todos os conjuntos absorventes seja um compacto que chamaremos *atrator*. O atrator será um conjunto assintótico de estados e os estados que estão fora do atrator são estados transitórios.

Buscaremos condições para existência de atratores, procuraremos entender como é o sistema dinâmico dentro do atrator, como os conjuntos limitados são atraídos para o atrator e como o atrator se comporta sob perturbação.

Capítulo 1

Atratores para Semigrupos

No nosso estudo dos sistemas dinâmicos autônomos, os atratores globais desempenharão um papel central. Neste capítulo apresentaremos os conceitos e os resultados básicos que nos levam à caracterização dos semigrupos que possuem um attrator global.

Seja X um espaço métrico e $d : X \times X \to [0, \infty)$ sua métrica. Denote por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das transformações contínuas de X em X.

Escreveremos $\mathbb{T}$ para denotar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geqslant 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T} : t \leqslant 0\}$, $\mathbb{T}_t^- = t + \mathbb{T}^-$ e $\mathbb{T}_t^+ = t + \mathbb{T}^+$.

Dados $K \subset X$ e $r > 0$, a $r-$vizinhança de K é o conjunto definido por $\mathcal{O}_r(K) := \{x \in X : d(x, K) < r\}$.

Definição 1.0.1 *Um semigrupo é uma família* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ *tal que*

- $T(0)x = x$ *para todo* $x \in X$*,*
- $T(t + s) = T(t) \circ T(s)$*,*
- $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ *é contínua.*

No caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ a terceira condição está automaticamente satisfeita e, como $T(n) = T(1)^n$, escrevendo $T := T(1)$, o semigrupo pode ser escrito na forma $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e será simplesmente a família de operadores $\{T^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(X)$.

Dado semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ e um subconjunto B de X, definimos:

- Para cada $t \in \mathbb{T}$, a *imagem* de B sob $T(t)$,

$$T(t)B := \{T(t)x : x \in B\};$$

- A *órbita positiva* de B,

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)B;$$

- A *órbita parcial* entre dois números de $\mathbb{T}^+$, $t < t'$,

$$\gamma^+_{[t,t']}(B) := \bigcup_{t\leqslant s\leqslant t'} T(s)B;$$

- A *órbita* de $T(t)B$,

$$\gamma^+_t(B) := \bigcup_{s\in\mathbb{T}^+} T(s+t)B = \bigcup_{s\in\mathbb{T}^+_t} T(s)B.$$

- A função $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é a *solução* por x do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. No caso em que $\mathbb{T}^+ = \mathbb{N}$ temos que a solução por x satisfaz, para $T := T(1)$, o problema discreto de valor inicial

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = Tx_n,\ n \in \mathbb{N}, \\ &x_0 = x. \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

Definição 1.0.2 *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito* eventualmente limitado *se para cada limitado $B \subset X$ existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Diremos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.*

Observação 1.0.3 **Não** *segue do fato que $T \in \mathcal{C}(X)$ que T leva limitados de X em subconjuntos limitados de X, uma vez que subconjuntos limitados de X não são necessariamente relativamente compactos. Se assumirmos que T é limitado em subconjuntos limitados de X, considerando o semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, temos que $\gamma^+_{[n,n']}(B)$ é limitado* *para cada subconjunto limitado B de X e $n, n' \in \mathbb{N}$. Em geral, nos casos em que $\mathbb{T}^+ = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$, para obter que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado, precisamos assumir que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e que $\gamma^+_{[0,T_B]}(B)$ é limitado para algum $T_B \in \mathbb{T}^+$ e para todo $B \subset X$ limitado.*

O conjunto onde a órbita de B se acumula é chamado conjunto $\omega-$limite e desempenha um papel fundamental no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo.

Definição 1.0.4 *O conjunto ω-limite de um subconjunto B de X é definido por*

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Definição 1.0.5 *Uma* solução global *de $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $x \in X$ é uma função contínua $\phi : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e $T(t)(\phi(s)) = \phi(t+s)$, para todo $t, s \in \mathbb{T}$ com $t \geq 0$. Uma solução global constante será chamada de* solução estacionária *e o seu valor um ponto de* equilíbrio. *Como $T(t)$ não é necessariamente injetiva, se existe uma solução global ela não precisa ser única. Quando existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por $x \in X$, definiremos a órbita global de x relativa à solução global ϕ por $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{T}\}$. Neste caso, para $t \in \mathbb{T}$ escreveremos $(\gamma_\phi)_t^-(x) := \{\phi(s) : s \leq t\}$ e definiremos o conjunto $\alpha-$limite de x relativo a ϕ por*

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}.$$

A seguinte caracterização do conjunto $\omega-$limite será frequentemente usada na demonstração dos resultados que se seguem.

Proposição 1.0.6 *Se $B \subset X$, $\omega(B)$ é fechado e*

$$\omega(B) = \{y \in X : \text{existem seqüências } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{T}^+ \text{ e } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } B$$
$$\text{tais que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } y = \lim_{n \to +\infty} T(t_n)x_n\}.$$

Se $\phi : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global do semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ por $x \in X$, então $\alpha_\phi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \text{ existe uma seqüência } \{t_n\} \text{ em } \mathbb{T}^+ \text{ tal que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } \phi(-t_n) \to v\}.$$

Prova: Primeiramente, seja $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$, e assim $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$; isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma seqüência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Como $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, existem $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que

$$y_k^n = T(n + q_k^n)x_k^n.$$

Sabemos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_k^n, y) < \epsilon, \text{ se } k \geqslant k(n, \epsilon),$$

isto é, $d(T(n + q_k^n)x_k^n, y) < \epsilon$ se $k \geqslant k(n, \epsilon)$. Defina então $t_n := n + q^n_{k(n,\frac{1}{n})}$ e $x_n := x^n_{k(n,\frac{1}{n})}$, assim

$$d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para a recíproca, seja $y \in X$ e seqüências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, tais que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Assim, fixado $\tau \in \mathbb{T}^+$ temos $\{T(t_n)x_n\}_{t_n \geqslant \tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$, e $y \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Isto mostra que $y \in \omega(B)$.

A caracterização de $\alpha_\phi(x)$ tem prova análoga. ∎

A seguir definiremos as noções de atração, absorção e invariância sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Para este fim, relembremos a definição de *semi-distância de Hausdorff* $\mathrm{dist}_H(A, B)$ entre dois subconjuntos A e B de X

$$\mathrm{dist}_H(A, B) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y).$$

Denotaremos por $\mathrm{dist}(A, B)$ a distância usual entre conjuntos; isto é,

$$\mathrm{dist}(A, B) := \inf_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y).$$

Exercício 1.0.7 *Mostre que* $\mathrm{dist}_H(A,B) = 0$ *se, e somente se,* $\overline{A} \subset \overline{B}$ *e que existem conjuntos fechados e não vazios* A *e* B *tais que* $\mathrm{dist}(A,B) = 0$ *e* $A \cap B = \varnothing$.

Sejam X um espaço métrico e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ um semigrupo.

Definição 1.0.8 *Se* A *e* B *são subconjuntos de* X. *Diremos que* A atrai B *sob a ação do semigrupo* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *se*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)B, A) = 0.$$

Se existir um $t_0 \in \mathbb{T}^+$ *tal que* $T(t)B \subset A$ *para todo* $t \geqslant t_0$, *diremos que* A absorve B. *Em particular, se* A *absorve* B, *então* A *atrai* B *(a recíproca não é verdadeira).*

A noção de invariância, dada a seguir, desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

Definição 1.0.9 *Diremos que um subconjunto* A *de* X *é* invariante (*ou* positivamente invariante) *sob a ação de um semigrupo* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *se* $T(t)A = A$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$ *(ou* $T(t)A \subset A$*). Um conjunto invariante unitário corresponde a um ponto de equilíbrio de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$*; isto é, um ponto* $x^* \in X$ *tal que* $T(t)x^* = x^*$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$.

Finalmente, estamos em condições de definir atratores globais para semigrupos.

Definição 1.0.10 *Um conjunto* $\mathcal{A}$ *é chamado um* atrator global *para* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de* X *sob a ação de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Note que o atrator global para um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é único. De fato, se $\mathcal{A}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ são atratores globais para este semigrupo,

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \mathrm{dist}_H(T(t)\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e assim $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$. Analogamente $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, e temos resultado.

Observação 1.0.11 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em um espaço métrico X. Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tenha um atrator $\mathcal{A}$. Afirmamos que, dado $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_x(0) = x$. De fato, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto \phi(t) := T(t)x \in X$ está sempre bem definida e é limitada, agora seja $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, assim existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$ e procedendo indutivamente, conseguimos uma seqüência $\{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, (recorde que a seqüência $\{x_{-n}\}$ não é unicamente determinada). Defina então*

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, \ t \geqslant 0 \\ \\ T(j+t)x_{-j}, \ t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}, \ j = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

que é uma solução global limitada em $\mathcal{A}$ passando por x em $t = 0$.

Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{T} \to X$ para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é tal que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$. Tendo dito isto, concluímos que

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{ existe uma solução global limitada por } x\} \tag{1.0.2}$$

Proposição 1.0.12 *Seja K um subconjunto compacto de X e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma seqüência em X tal que*

$$\mathrm{dist}(x_n, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente. Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e K um subconjunto compacto de X, se K atrai um conjunto compacto K_1, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \omega(K_1) \subset K$.

Prova: Para a primeira parte, notemos que dado $m \in \mathbb{N}$, existem $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$ tais que $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}$. Como K é compacto podemos assumir, passando a uma subseqüência se necessário, que $y_{n_m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_0$ para algum $y_0 \in K$. Assim, obtemos

$$d(x_{n_m}, y_0) \leqslant d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

isto é, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente. Agora, para a segunda parte, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K), \text{ para todo } t \geqslant t_0.$$

Assim, $\cup_{t\geqslant t_0} T(t)K_1$ está contido em uma união finita de bolas de raio ϵ. Segue facilmente do fato que $\cup_{0\leqslant t\leqslant t_0} T(t)K_1$ é compacto, que $\gamma^+(K_1)\cup K$ é totalmente limitado. Do ítem anterior temos que $\gamma^+(K_1)\cup K$ é completo e portanto compacto. Segue que $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Finalmente, temos $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ compacto e não-vazio, para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $\overline{\gamma_t^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_s^+(K_1)}$ para $s \leqslant t$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t\in\mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita e assim

$$\omega(K_1) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K_1)} \neq \varnothing.$$

Dados $y \in \omega(K_1)$ e $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(K),$$

assim $\mathrm{dist}(y, K) \leqslant \epsilon$ e como ϵ é arbitrário, segue o resultado. ■

Lema 1.0.13 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se $B \subset X$, então $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Se B é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B)$ é invariante.*

Prova: Se $\omega(B) = \varnothing$, não há o que provar. Se $\omega(B) \neq \varnothing$, fixe $t \in \mathbb{T}^+$, da Proposição 1.0.6, se $y \in \omega(B)$, existem seqüências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)y = \lim_{n\to\infty} T(t+t_n)x_n$ e que $T(t)y \in \omega(B)$. Logo $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para cada $t \in \mathbb{T}^+$. Para $x \in \omega(B)$, existem seqüências $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Para $t \in \mathbb{T}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B temos $\mathrm{dist}(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Segue da Proposição 1.0.12 que $\{T(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente (que denotaremos novamente por $\{T(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). Se $T(t_n - t)x_n \to y$, temos que $y \in \omega(B)$ e que $T(t)y = x$. Portanto, $\omega(B) = T(t)\omega(B)$.■

Lema 1.0.14 *Seja $x \in X$ e suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x tal que $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ seja compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ será não-vazio, compacto e invariante.*

Prova: Da definição de $\alpha_\phi(x)$, da compacidade de $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ e da propriedade da interseção finita segue que $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio e compacto. Mostremos que $\alpha_\phi(x)$ é invariante.

Fixe $t \in \mathbb{T}^+$. Da Proposição 1.0.6, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe uma seqüência $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tal que $\phi(-t_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Da continuidade de $T(t) : X \to X$ obtemos que $T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T(t)y$ e portanto $T(t)y \in \alpha_\phi(x)$. Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(x)$, existe uma seqüência $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(-t_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} w$. Como $\{\phi(-t_n - t) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, passando para uma subseqüência se necessário, existe $z \in X$ tal que $\phi(-t_n - t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ e $z \in \alpha_\phi(x)$. Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)z = w$. ■

Observação 1.0.15 *Segue imediatamente da primeira parte do Lema 1.0.13 que, se $x \in X$, $\omega(x)$ atrai x e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um equlíbrio para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Um resultado similar vale para $\alpha_\phi(x)$.*

Lema 1.0.16 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B.*

- *Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo;*
- *Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, B é conexo e $B \supset \omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo.*

Prova: Suponha que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e que $\omega(B)$ é desconexo, então $\omega(B)$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos (portanto separados por uma distância positiva 2ρ), mas $\omega(B)$

atrai B, logo $\text{dist}_H(T(t)(B),\omega(B)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mas isto implica (do fato que $T(t)B$ é conexo) que $T(t)B$ deve estar contido na ρ vizinhança de uma das componentes de $\omega(B)$ para t suficientemente grande. Do Lema 1.0.13 temos que $T(t)B$ contém $\omega(B)$ e isto nos leva a uma contradição.

A demonstração do caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ segue imediatamente do fato que $\omega(B) = \cap_{t\geqslant 0}\overline{\gamma_t^+(B)}$ e do fato que $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é conexo para cada $t \geqslant 0$ (já que $[0,\infty) \times X \ni (s,x) \mapsto T(s)x \in X$ é contínua e leva o conexo $[t,\infty) \times B$ sobre o conexo $\gamma_t^+(B)$). ■

<u>**Lema**</u> **1.0.17** *Se B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto, para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

Prova: Para cada $t \in \mathbb{T}^+$, $t \geqslant t_0$, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto. Segue do fato que a família $\{\overline{\gamma_t^+(B)} : t \geqslant t_0\}$ tem propriedade da interseção finita que $\omega(B) = \bigcap_{t\geqslant t_0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em B, $\{t_n : n \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geqslant n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subseqüências $t_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_{n_j} \in B$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j}$ é convergente para algum $y \in X$. Disto segue que $y \in \omega(B)$ e $d(y, \omega(B) \geqslant \epsilon_0$ o que nos leva a um absurdo. Logo $\omega(B)$ atrai B.

Segue agora do Lema (1.0.13) que $\omega(B)$ é invariante e a prova está completa. ■

O conceito a seguir desempenha um papel importante na caracterização dos semigrupos que possuem um atrator global.

<u>**Definição**</u> **1.0.18** *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito* assintoticamente compacto *se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não-vazio $B \subset X$, para o qual $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B.*

Lema 1.0.19 *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto e B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado, para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

Prova: Como $T(t)$ é contínua e $T(t)\gamma_{t_0}^+(B) \subset \gamma_{t_0}^+(B)$, segue que $T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para todo $t \geqslant 0$. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto temos que existe um compacto $J \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ que atrai $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$. Logo, existem seqüências $\epsilon_n \to 0$ e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $T(t)(\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}) \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(J)$ para todo $t \geqslant t_n$. Assim, $\varnothing \neq \omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, temos que $\omega(B)$ é compacto.

Resta mostrar que $\omega(B)$ atrai B. Se não, existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $x_n \in B$ e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$. Da compacidade de J e da Proposição 1.0.12, existem seqüências $x_{n_j} \in B$, $t_{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $z \in J$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Segue que $z \in \omega(B)$ e $\mathrm{dist}(z, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$, o que nos dá um absurdo e prova que $\omega(B)$ atrai B. Portanto, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B e do Lema 1.0.13, segue a invariância. ∎

Proposição 1.0.20 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em um espaço métrico X. Suponha que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitada em X, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em X e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.*

Reciprocamente, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e assintoticamente compacto então $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto sempre que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência limitada em X e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Prova: Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não-vazio tal que $T(t)(B) \subset B$, para todo $t \geqslant 0$. Então, não é difícil ver que $\omega(B) \subset B$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Segue que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Por outro lado, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência limitada em X, existe $t_0 > 0$ such that $B = \overline{\gamma_{t_0}^+(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})}$ é um conjunto limitado. Como B é positivamente invariante e $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto, existe um compacto J em X que atrai B. Em particular $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge para J quando n tende a infinito e portanto é relativamente compacto. ∎

Definição 1.0.21 *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito* condicionalmente eventualmente compacto *se dado B limitado e positivamente invariante, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito* eventualmente compacto *se dado B limitado existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.*

Teorema 1.0.22 *Um semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.*

Prova: Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$ para todo $t \geqslant 0$. Então, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é condicionalmente eventualmente compacto temos que $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é compacto para um t suficientemente grande. Assim, do Lema 1.0.17, $\omega(B) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio, compacto e atrai B. Isto nos mostra que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. ∎

Definição 1.0.23 *Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é* ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo) *se existir um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X.*

Observação 1.0.24 *Na definição acima podemos trocar a palavra* atrai *pela palavra* absorve *sem mudar os significados dos conceitos.*

Lema 1.0.25 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que K é compacto, então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.*

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de X. Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, temos que U é não-vazio. Claramente $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos. Sabemos também que $T(t)(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $t \geqslant 0$, e que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. Portanto, existe um conjunto compacto K, com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que K atrai U e portanto K atrai pontos de X.

Mostremos agora que existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitado para algum $t \in \mathbb{T}^+$. Se este não é o caso, existem seqüências $x_n \in X$, $x_n \to y \in K$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitada. Considere $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo $\overline{A}$ é compacto e $\gamma_t^+(A)$ é não-limitada para cada $t \in \mathbb{T}^+$. Isto contradiz a hipótese de que existe t_A tal que $\gamma_{t_A}^+(A)$ é limitado.

Seja V uma vizinhança de K e $t_V \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitado. Como K atrai pontos de X e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_x > 0$ tal que $T(t)(\mathcal{O}_x) \subset \gamma_{t_V}^+(V)$ para $t \geqslant t_x$; isto é, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Disto segue facilmente que $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. ■

Proposição 1.0.26 *Seja X um espaço métrico e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se K é compacto atrai a si mesmo sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\omega(K) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K$.*

Prova: Claramente $\cap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K \subset \omega(K)$. Agora, para a inclusão contrária, usamos a Proposição 1.0.12 com $K_1 = K$ para garantir que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Do Lema 1.0.17 temos que $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai K. Assim

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+,$$

Isto prova o resultado. ■

O seguinte teorema caracteriza os semigrupos que têm atratores globais.

Teorema 1.0.27 *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Prova: Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado segue do Lema 1.0.25 que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X. Considere $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$. Claramente B absorve subconjuntos compactos de X, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ e, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B. Segue que K atrai subconjuntos compactos de X.

O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante. Se $J \subset X$ é compacto $\omega(J) \subset K$ e consequentemente $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$ para cada $s \geqslant 0$. Segue da Proposição 1.0.26 que $\omega(J) \subset \cap_{s\in\mathbb{T}^+} T(s)K = \omega(K)$ e consequentemente $\omega(K)$ atrai J.

Seja B um subconjunto limitado de X, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.0.19 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Como $\omega(B)$ é compacto e invariante temos que $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $\mathcal{A}$ atrai B.

Claramente, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global, ele é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto, esta última seguindo diretamente da Proposição 1.0.20. ∎

1.1 Condições suficientes para a existência de atratores para semigrupos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que são comumente usados para garantir que um semigrupo é assintoticamente compacto e limitado.

Teorema 1.1.1 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Prova: Segue do Lema 1.0.22 e do Teorema 1.0.27 que precisamos somente mostrar que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. Dado um conjunto limitado B, segue do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto que existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_B)B$ é relativamente compacto. Logo, é necessário somente mostrar que a órbita de subconjuntos compactos de X são limitadas, pois $T(t)T(t_B)B \subset T(t)\overline{T(t_B)B}$. Seja K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos. Dado $x \in K$, da continuidade de $T(t)$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_x)\mathcal{O}_x \subset T(t_{B_0})B_0$. Como K é compacto, existem $\{\mathcal{O}_{x_1}, \cdots, \mathcal{O}_{x_p}\}$ que cobrem K. Seja $\tau = \tau(K) = \max\{t_{x_i} : 1 \leqslant i \leqslant p\}$, $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $\tilde{K}_0 = \gamma^+_{[0,\tau(K_0)]}K_0$. Claramente K_0 e $\tilde{K}_0$ são subconjuntos compactos de X. Segue que $T(t)B_0 \subset \tilde{K}_0$ para todo $t \geqslant t_{B_0}$ e para cada subconjunto compacto K de X temos que $T(t)K \subset \tilde{K}_0$ para $t \geqslant \tau(K)$. Isto prova que a órbita de um subconjunto compacto de X é limitada e completa a demonstração do resultado. ■

Teorema 1.1.2 *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Suponha que $T(t) = S(t) + K(t)$ com $S(t)$ e $K(t)$ satisfazendo*

i) Para cada conjunto limitado B em X, existe um $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $K(t)B$ é relativamente compacto para todo $t \geqslant t_B$.

ii) Para cada subconjunto limitado B de X, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\sup_{x\in B} \|S(t)x\|_X := s_B(t) < \infty$ para todo $t \geqslant t_B$ e $s_B(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. Além disso, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo e eventualmente limitado, então ele possui um atrator global.

Prova: Dado um conjunto não-vazio, fechado e limitado B tal que $T(t)B \subset B$ para todo $t \geqslant 0$ e $\epsilon > 0$, escolha $s \in \mathbb{T}^+$ tal que $s \geqslant t_B$ e $s_B(s) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $K(s)B$ é relativamente compacto, existem $N = N(s, B)$ em $\mathbb{N}$ e $y_1, \ldots, y_N$ em $K(s)B$ tais que

$K(s)B \subset \cup_{i=1}^{N} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i)$. Segue que

$$\omega(B) = \cap_{t\in\mathbb{T}^+}\overline{T(t)B} \subset \overline{T(s)B} \subset \overline{S(s)B} + \overline{K(s)B} \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(0) + \cup_{i=1}^{N} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i) \subset \cup_{i=1}^{N} B_{\epsilon}(y_i).$$

Como ϵ é arbitrário, temos que $\omega(B)$ é totalmente limitado. Logo $\omega(B)$ é fechado e totalmente limitado no espaço de Banach X e portanto compacto. Podemos ver facilmente que $\omega(B)$ é não-vazio, pois para cada seqüência $\{x_n\}$ em B e $t_n \in \mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ a seqüência $\{T(t_n)x_n\} = \{K(t_n)x_n + S(t_n)x_n\}$ é totalmente limitada, possuindo portanto uma subseqüência convergente. Agora, procedendo como na demonstração do Lema 1.0.17 concluímos que $\omega(B)$ atrai B e isto prova que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. Se além disso $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo e eventualmente limitado, do Teorema 1.0.27, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global. ∎

1.2 Semicontinuidade superior e inferior de atratores

Nesta seção estudaremos a continuidade dos atratores relativamente a perturbações no semigrupo. Esta questão é vital para a sobrevivência da modelagem matemática de fenômenos utilizando semigrupos, visto que, toda modelagem é baseada em aproximações através de leis empíricas, observações, medidas, etc. Desta forma, modelos são sempre aproximações da real lei de evolução e é imprescindível que gozem de certa estabilidade sob perturbação para que o resultado de sua análise reflita, de alguma maneira, o fenômeno modelado. Nesta seção abordaremos este aspécto do ponto de vista da dinâmica assintótica dando condições para que os atratores se comportem continuamente quando perturbamos o semigrupo.

Definição 1.2.1 *Seja X um espaço métrico,* $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *a métrica de X, Λ um espaço métrico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos de X.*

1. *Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = \sup_{x_\lambda\in\mathcal{A}_\lambda} \mathrm{dist}(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

2. *Diremos que* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua inferiormente em* λ_0 *se*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) = \sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_0}} \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}_\lambda) \stackrel{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

3. *Diremos que* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é contínua em* λ_0 *se for semicontinua superiormente e inferiormente.*

Para provarmos as semicontinuidades superior e inferior empregaremos o seguinte resultado

Lema 1.2.2 *Seja* Λ *um espaço métrico e* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família de subconjuntos de* X.

1. *Se para* $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ *temos que toda seqüência* $\{x_{\lambda_n}\}$ *com* $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ *tem uma subseqüência convergente com limite pertencendo a* $\mathcal{A}_{\lambda_0}$*, então* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente em* λ_0*. Reciprocamente, se* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente em* λ_0 *e* $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*, qualquer seqüência* $\{x_{\lambda_n}\}$ *com* $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ *tem uma subseqüência convergente com limite pertencendo a* $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

2. *Se* $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ *é compacto e para qualquer* $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ *e* $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ *existe uma subseqüência* $\lambda_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*, e seqüência* $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$ *com* $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ *que converge para* x*, então* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua inferiormente em* λ_0*. Reciprocamente, se* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua inferiormente em* λ_0*,* $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ *e* $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$*, existe uma subseqüência* $\lambda_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*, e seqüência* $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$ *com* $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ *que converge para* x.

Prova: 1) Se qualquer seqüência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, tem uma subseqüência convergente com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ não é semicontínua superiormente em λ_0 então, existem $\epsilon > 0$ e seqüência $\{\lambda_n\}$ com $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ tal que $\sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_n}} \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geqslant 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos que $\mathrm{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0})$ $\geqslant \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz o fato de que $\{x_{\lambda_n}\}$ tem uma subseqüência que converge para um elemento de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$. A recíproca é deixada como exercício.

2) Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e para qualquer $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ existe uma subseqüência $\lambda_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, e seqüência $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$ com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ que converge para x e $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ não é semicontínua inferiormente em λ_0 então, existem $\epsilon > 0$ e seqüência $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ tais que $\sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_0}} \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geqslant 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, temos que $\operatorname{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geqslant 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto podemos assumir que $\{x_{\lambda_n}\}$ converge para algum $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e que $\operatorname{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geqslant \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Das nossas hipóteses, existe uma subseqüência $\lambda_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ e seqüência $y_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ tal que $y_{\lambda_{n_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\epsilon \leqslant \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}) \leqslant \operatorname{dist}(x, y_{\lambda_{n_k}}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o que nos leva a um absurdo. A recíproca é deixada como exercício. ■

Definição 1.2.3 *Diremos que a família de semigrupos* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$, *é contínua em* $\eta = 0$ *se* $T_\eta(t,x) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} T_0(t,x)$ *uniformemente para* (t,x) *em subconjuntos compactos de* $\mathbb{T}^+ \times X$ *quando* $\eta \to 0$.

Teorema 1.2.4 (Semicontinuidade Superior) *Seja* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua em* $\eta = 0$ *de semigrupos. Se* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$ *para cada* $\eta \in [0,1]$ *e* $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$ *é compacto, então a família* $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ *é semicontínua superiormente em* $\eta = 0$.

Prova: Considere as subseqüências $\eta_k \to 0$, $\{u_{\eta_k}\}_{k=1}^\infty$, $u_{\eta_k} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$. Como $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto em X, existe $u_0 \in X$ tal que $u_{\eta_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0$.

Para concluir a demonstração da semicontinuidade superior falta mostrar que $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Para este fim, é suficiente provar que existe uma solução global limitada de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}\}$ por u_0. Da invariância dos atratores $\mathcal{A}_{\eta_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução global limitada $\psi^{(\eta_k)} : \mathbb{T} \to X$ por u_{η_k}. Para $t \geqslant 0$, segue da continuidade de $[0,1] \ni \eta \to T_\eta(t)x \in X$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^+ \times X$ que

$$\psi^{(\eta_k)}(t) = T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k} \to T_0(t)u_0,$$

uniformemente para t em limitados de $\mathbb{T}^+$.

Agora, construímos uma solução global por u_0 da seguinte maneira. Se $\eta_k^0 := \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$, dado $j \in \mathbb{N}^*$ existe uma subseqüência $\{\eta_k^j\}$ de $\{\eta_k^{j-1}\}$ e u_{-j} tal que $\psi^{(\eta_k^j)}(-j) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_{-j}$ (lembremos que $\{\psi^{(\eta_k)}(-j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ está em $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$).

Da convergência de $x \mapsto T_\eta(1)x$ para $x \mapsto T_0(1)x$ uniformemente em subconjuntos compactos de X segue que, para $0 \leqslant i \leqslant j$,

$$\psi^{(\eta_k^j)}(-j) = T_{\eta_k}(i)\psi^{(\eta_k^j)}(-j-i) \to u_{-j} = T_0(i)u_{-j-i}.$$

Definindo

$$\psi^{(0)}(t) := \begin{cases} T_0(t)u_0, & \text{para } t \geqslant 0 \\ T_0(t+j)u_{-j}, & \text{para } -j \leqslant t < -j+1, \ j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

temos que $\psi^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}\}$ por u_0 e

$$\psi^{(\eta_k^k)}(t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi^{(0)}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Como $\psi^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ é limitada, sua imagem deve estar contida em $\mathcal{A}_0$ e em particular $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Agora o resultado segue do Lema 1.2.2. ∎

Observação 1.2.5 *A hipótese que* $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$ *seja compacto no Teorema 1.2.4 pode ser enfraquecida assumindo em seu lugar uma* compacidade coletiva*; isto é, dada uma seqüência* $\{\eta_n\}$ *em* $[0,1]$ *com* $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e uma seqüência* $\{x_n\}$ *com* $x_n \in \mathcal{A}_{\eta_n}$*, então* $\{x_n\}$ *tem uma subseqüência convergente. Note que isto implica que existe* $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $\cup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitado. A demonstração do Teorema 1.2.4 com esta hipótese mais fraca é inteiramente análoga a demonstração dada.*

Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e A um conjunto invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, já vimos que existe uma solução global por a, para cada $a \in A$. As soluções globais mais simples são as constantes; isto é, os pontos de equíbrio. A classe das soluções globais que tendem a um equilíbrio y^* quando t tende a $-\infty$ formam um conjunto invariante que chamamos de *conjunto instável* $W^u(y^*)$ de y^*; isto é,

$$W^u(y^*)=\{y \in X : \text{existe solução global } \phi_y : \mathbb{T} \to X \text{ tal que, } \phi_y(0) = y \text{ e } \phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*\}.$$

Dada uma vizinhança V de y^*, o conjunto dos pontos y de V tais que existe solução global $\phi_y : \mathbb{T} \to X$ tal que, $\phi_y(0) = y$, $\phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*$ e $\phi_y(t) \in V$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ é chamado um *conjunto instável local* de y^* e é denotado por $W^u_{\mathrm{loc}}(y^*)$.

A órbita γ_ϕ de uma solução global não constante $\phi : \mathbb{T} \to X$ que tende a um ponto de equilíbrio y^* quando t tende a $\pm\infty$ é chamada uma órbita homoclinica em y^*.

Observamos que quando existe uma órbita homoclinica em y^*, $W^u_{\mathrm{loc}}(y^*)$ pode não coincidir com a interseção de $W^u(y^*)$ com uma vizinhança de y^*.

<u>Teorema</u> 1.2.6 (Semicontinuidade Inferior) *Seja* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua em* $\eta = 0$ *de semigrupos que satisfaz*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$, *para cada* $\eta \in [0, 1]$.

b) Se $\mathcal{E}_\eta$ *denota o conjunto das soluções estacionárias de* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, *existe* $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots , y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, *para todo* $\eta \in [0, 1]$.

c) Se $W^u_\delta(y_j^{*,\eta}) = \{y \in B_\delta(y_j^{*,\eta})$: *existe solução global* $\phi_y : \mathbb{T} \to X$ *tal que,* $\phi_y(0) = y$, $\phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*$ *e* $\phi_y(t) \in B_\delta(y_j^{*,\eta})$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^-\}$. *Suponha que, para algum* $\delta > 0$ *pequeno,*

$$\{W^u_\delta(y_j^{*,\eta}) : \eta \in [0, 1]\}$$

é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

d) $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$

Então, $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$.

Prova: De $d)$ temos que $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$. Segue que, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, existe uma solução global $\phi^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ por u_0 ($\phi^{(0)}(0) = u_0$), $1 \leqslant \ell \leqslant \mathfrak{p}$ e $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $\phi^{(0)}(-\tau) \in W_\delta^u(y_\ell^{*,0})$. De $c)$, existe $u_\eta^{-\tau} \in W_\delta^u(y_j^{*,\eta})$ tal que $u_\eta^{-\tau} \xrightarrow{\eta \to 0} \phi^0(-\tau)$ e solução global $\psi^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\psi^{(\eta)}(0) = u_\eta^{-\tau}$ tal que $\psi^{(\eta)}(0) \xrightarrow{\eta \to 0} \phi^{(0)}(-\tau)$. Segue de $a)$ e da continuidade de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\eta = 0$ que

$$T_\eta(\tau)\psi^{(\eta)}(0) \to u_0.$$

O resultado segue agora do Lema 1.2.2. ■

1.3 Semigrupos gradientes

Nesta seção vamos considerar os semigrupos gradientes. Esta classe de semigrupos aparece naturalmente em diversas aplicações e suas características permitem descrever com bastante precisão a estrutura dos seus atratores.

Lembremos que $y^* \in X$ é um ponto de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se o conjunto $\{y^*\}$ é a órbita de uma solução global constante; isto é, $T(t)y^* = y^*$, para todo $t \geqslant 0$. Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.3.1 *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito gradiente se tem uma função de Lyapunov; isto é, se existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ *é decrescente para cada* $x \in X$*;*

(ii) Se x é tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in \mathcal{E}$.

Para semigrupos gradientes temos o seguinte resultado de caracterização:

Lema 1.3.2 *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente, então $\omega(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$ para cada $x \in X$. Se existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x então $\alpha_\phi(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$.*

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente, tem atrator global $\mathcal{A}$ e $\mathcal{E}$ só tem pontos isolados, então $\mathcal{E}$ é finito e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é um conjunto unitário. Neste caso, se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ é uma solução global por x, então $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário.

Prova: Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é decrescente e possui uma subseqüência convergente. Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{T}^+$, e da propriedade (ii) na Definição 1.3.1 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x. Se $\alpha_\phi(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Por outro lado, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$, pois é crescente e tem uma subseqüência convergente. Como $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que para cada $y \in \alpha_\phi(x)$, $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{T}^+$, e $y \in \mathcal{E}$.

Agora suponhamos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, segue que se todos os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados, então $\mathcal{E}$ é finito. Falta ainda mostrar que se o conjunto das soluções estacionárias é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ isto segue imediatamente do fato que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos. Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e $\omega(x) = \{y_1^*, \cdots, y_\ell^*\} \subset \mathcal{E}$ com $\ell \geqslant 2$, então existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_i : 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ de $\mathbb{N}$ com a propriedade de que cada $\mathbb{N}_i$ é infinito e $\lim\limits_{\substack{n\in N_i\\ n\to\infty}} T(n)x = y_i^*$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Escolha uma seqüência $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $k_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \in \mathbb{N}_j$, para algum $2 \leqslant j \leqslant \ell$. Então, $y_1^* = T(1)y_1^* = \lim_{k\to\infty} T(k_{2n})x = y_j^*$, o que é uma contradição. Isto mostra que se o conjunto das soluções estacionárias for finito, então $\omega(x)$ será um conjunto unitário. A prova de que $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ é inteiramente análoga. Isto conclui a demonstração. ∎

<u>**Teorema**</u> **1.3.3** *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ seja um semigrupo gradiente, eventualmente limitado e assintoticamente compacto cujo conjunto de pontos equilíbrios $\mathcal{E}$ seja*

limitado. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$, onde

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in X : \textit{existe uma solução global } \phi(\cdot) : \mathbb{T} \to X$$
$$\textit{por } y \ (\phi(0) = y) \textit{ tal que } \phi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}\}$$

será chamado de conjunto instável de $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ for finito, então $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$. Finalmente, se existir um conjunto conexo e limitado B que contenha $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ será conexo.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x. Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é limitado, temos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo. To Teorema 1.0.27, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x. Como $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x) \neq \varnothing$. Do Lema 1.3.2, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$. Se $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x e $\phi(t) \overset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Do fato de que $\phi(\mathbb{T})$ é invariante e limitado concluímos que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $x \in \mathcal{A}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$ e completa a prova de que $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots e_n^*\}$, a igualdade $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ segue imediatamente do Lema 1.3.2 e, se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo e limitado de X, um resultado anterior implica que $\mathcal{A}$ é conexo. ∎

O seguinte lema é uma conseqüência imediata da continuidade dos semigrupos e é importante para a demonstração dos resultados que se seguem, ele garante que, dado um ponto de equilíbrio y^* de um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e y perto de y^*, a órbita finita $\gamma_{[0,t]}(y) = \{T(s)y : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ permanece perto de y^* para valores grandes de t.

Lema 1.3.4 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e y^* um ponto de equilibrio para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Dado $t \in \mathbb{T}^+$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\{T(s)y : 0 \leqslant s \leqslant t,\ y \in B_\delta(y^*)\} \subset B_\epsilon(y^*)$.*

Prova: Suponha que existam $t_0 \in (0,\infty)$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$ existe $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(y^*)$ e $s_k \in [0,t_0]$ com $d(T(s_k)x_k, y^*) \geqslant \epsilon_0$. Podemos assumir que $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} s_0$ para algum $s_0 \in [0,t_0]$. Como $\mathbb{T}^+ \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua, temos que $0 = d(T(s_0)y^*, y^*) \geqslant \epsilon_0$. ∎

<u>**Lema**</u> **1.3.5** *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente que tem um atrator global $\mathcal{A}$ e que $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $V : X \to \mathbb{R}$ a função de Lyapunov associada a $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e $V(\mathcal{E}) = \{\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_p\}$ com $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{n}_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$.*

Se $1 \leqslant j \leqslant p-1$ e $\mathfrak{n}_j \leqslant r < \mathfrak{n}_{j+1}$, então $X_r = \{z \in X : V(z) \leqslant r\}$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, a restrição de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ a X_r, tem atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$ dado por

$$\mathcal{A}^{(j)} = \cup\{W^{\mathrm{u}}(y_\ell^*) : V(y_\ell^*) \leqslant \mathfrak{n}_j\}.$$

Em particular, $V(z) \leqslant \mathfrak{n}_j$ para $z \in \mathcal{A}^{(j)}$, $\mathfrak{n}_1 = \min\{V(x) : x \in X\}$ e $\mathcal{A}^{(1)} = \{y^* \in \mathcal{E} : V(y^*) = \mathfrak{n}_1\}$ consiste de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; isto é para cada $y^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_{y^*}$ de $y*$ tal que $T(t)x \to y*$ para cada $x \in \mathcal{O}_{y*}$.

Prova: É claro da definição da função de Lyapunov que X_r é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Para provar a existência de um atrator para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ notemos que as propriedades requeridas para obtermos um atrator global são herdadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$; a saber, órbitas de subconjuntos limitados de X_r são limitadas, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Logo, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$. A restrição V_r de V a X_r é uma função de Lyapunov para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$ segue.

Agora provemos a última afirmação . Seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{d(x^*, y^*),\ x^*, y^* \in \mathcal{A}_1,\ x^* \neq y^*\}$. Se existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e seqüências $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em X e $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{T}^+$ tais que $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ e $d(T(t_k)x_k, x^*) \geqslant \delta$ $(d(T(t)x_k, x^*) < \delta$ para $0 \leqslant t < t_k)$ concluímos que

$\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente. De fato, segue do Lema 1.3.4 que $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e o resultado segue da compacidade assintótica do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Denote esta subseqüência convergente por $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ e seja y seu limite. É imediato do fato de que $V(x_k) \to \mathfrak{n}_1$ que $V(y) = V(T(t)y) = \mathfrak{n}_1$. Portanto $y \in \mathcal{A}_1$ e $\mathrm{dist}(y, x^*) \geqslant \delta$. Por outro lato $\{T(t_k - 1)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ também tem uma subseqüência convergente e o limite z desta subseqüência pertence a $\mathcal{A}_1 \cap \overline{B_\delta(x^*)}$. Segue que $z = x^*$ e que $x^* = T(1)x^* = T(1)z = y$. Isto é um absurdo. Isto prova que, para cada $x^* \in \mathcal{A}_1$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta > \delta' > 0$ tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}_1$ consiste somente dos equilíbrios estáveis. Para concluir precisamos somente notar que, para cada $x \in X$, $T(t)x \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ para algum $x^* \in \mathcal{E}$. ■

1.4 Semigrupos gradient-like

A associação dos semigrupos gradientes às suas funções de Lyapunov fazem que, em geral, não esperemos que uma perturbação de um semigrupo gradiente nos dê um novo semigrupo gradiente. Esta associação é o maior obstáculo na prova de que o problema perturbado seja gradiente. Assim, definimos o conceito de *semigrupo gradient-like* utilizando apenas as propriedades dinâmicas de um semigrupo gradiente e evitando a associação com funções de Lyapunov. Mostraremos que pequenas perturbações de semigrupos gradient-like são ainda semigrupos gradient-like.

Antes de continuarmos, vamos enfatizar a distinção entre semigrupos gradientes e semigrupos que têm atratores do tipo gradiente.

Definição 1.4.1 *Seja* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo com um atrator global* $\mathcal{A}$ *com* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *para algum* $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$*. Se* $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_i^*)$*, diremos que* $\mathcal{A}$ *é um* ***atrator do tipo gradiente*** *e que* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um* ***semigrupo com atrator do tipo gradiente****.*

Como provado no Teorema 1.3.3, um semigrupo gradiente com um atrator global e um número finito de equilíbrios é um semigrupo com um atrator do tipo gradiente.

Não é difícil ver (veja exemplo em Hale [34] páginas 2 e 3) que um atrator do tipo gradiente pode vir de um semigrupo que não é gradiente e também que uma perturbação de um semigrupo com um atrator do tipo gradiente pode não ter atrator do tipo gradiente.

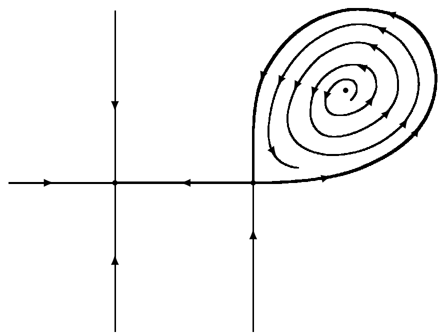


Figura 01

A Figura 01 acima apresenta um atrator do tipo gradiente que não é proveniente de um semigrupo gradient-like. Mas uma pequena perturbação deste semigrupo pode resultar em um semigrupo com o atrator descrito na Figura 02 abaixo.

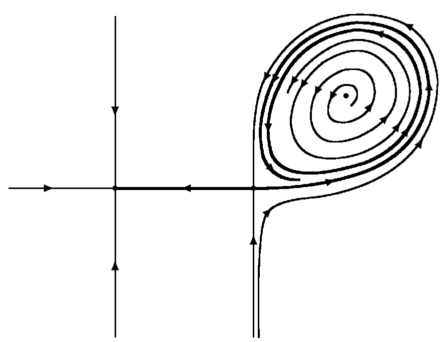


Figura 02

Este atrator contém uma órbita periódica e portanto não é a união dos conjuntos instáveis de seus pontos de equilíbrio. Notemos também que a perturbação não alterou o comportamento dos atratores do ponto de vista de semicontinuidade superior e inferior, mas alterou sua estrutura. Em Carvalho-Langa-Robinson-Suárez [15] os autores provam que uma perturbação de um semigrupo gradiente tem atrator do tipo gradiente. Por outro lado, semigrupos que têm atratores do tipo gradiente não precisam ser gradientes.

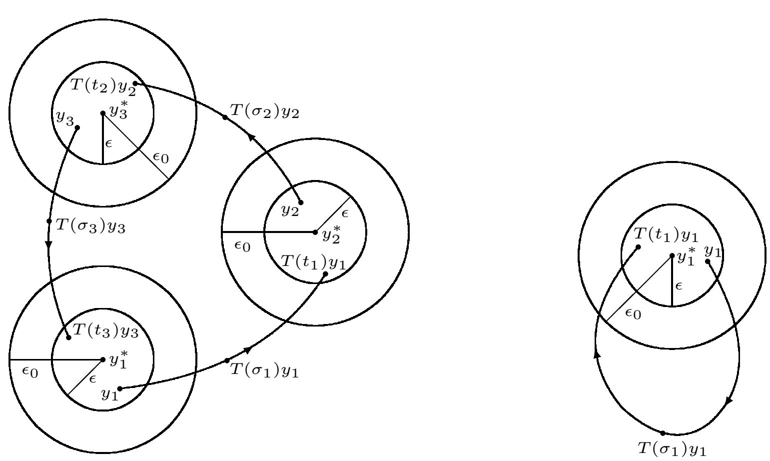
Isto nos leva à questão de quais propriedades dinâmicas dos semigrupos garantem que eles tenham atratores do tipo gradiente e que são estáveis por perturbações. É claro que estas propriedades devem ser satisfeitas por semigrupos gradientes e suas perturbações.

Com isto em mente (veja Carvalho-Langa [12]) introduzem o conceito de *semigrupos gradient-like* utilizando as propriedades dinâmicas essenciais dos semigrupos gradientes. Provaremos agora, adaptando os resultados de Carvalho-Langa [12], que as propriedades que definem os semigrupos gradient-like são estáveis por perturbações.

Definição 1.4.2 *Considere um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$. Seja*

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant \mathfrak{p} \\ i\neq j}} d(y_i^*, y_j^*) > 0$$

*Seja $\epsilon_0 < \delta_0$, $y^* \in \mathcal{E}$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Uma $\epsilon-$*cadeia *de y^* a y^* é um subconjunto $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_k}^*\}$ de $\mathcal{E}$, juntamente com conjuntos $\{y_1, \cdots, y_k\}$ em X e $\{t_1, \sigma_1, \dots, t_k, \sigma_k\}$ em $\mathbb{T}$ tais que, $0 < \sigma_i < t_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \leqslant \mathfrak{p}$, $d(y_i, y_{\ell_i}^*) < \epsilon$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $y^* = y_{\ell_1}^* = y_{\ell_{k+1}}^*$, $\mathrm{dist}(T(\sigma_i)y_i, \mathcal{E}) > \epsilon_0$ e $d(T(t_i)y_i, y_{\ell_{i+1}}^*) < \epsilon$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Diremos que $y^* \in \mathcal{E}$ é* recorrente por cadeias *se existe um $\epsilon_0 > 0$ fixo e uma $\epsilon-$cadeia de y^* a y^*, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*



Exemplos de $\epsilon-$cadeias

Definição 1.4.3 *Seja* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e suponha que ele tem um atrator global* $\mathcal{A}$. *Dizemos que* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um* semigrupo gradient-like *se as seguintes condições são satisfeitas:*

$(G1)$ *Dada uma solução global* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *em* $\mathcal{A}$, *existem* $i, j \in \{1, \cdots, \mathfrak{p}\}$ *tais que*

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), y_i^*) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{t\to\infty} d(\xi(t), y_j^*) = 0.$$

$(G2)$ $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.*

As hipóteses $(G1)$ e $(G2)$ carregam importantes propriedades dinâmicas de um semigrupo com uma função de Lyapunov (veja também os Lemas 1.4.5 e 1.4.6 abaixo). De $(G1)$, temos que $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_i^*)$, pois se $x \in \mathcal{A}$ então existe uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$ em $\mathcal{A}$ e assim $x \in W^u(y_i^*)$, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$ e reciprocamente, se $x \in W^u(y_i^*)$ para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$ então, como $\mathcal{A}$ atrai pontos, existe uma órbita global limitada por x, assim $x \in \mathcal{A}$. Também, a hipótese $(G2)$ diz que nenhum número finito de órbitas pode produzir um contorno fechado.

Os resultados a seguir são de fundamental importância para o futuro desenvolvimento da teoria de atratores para semigrupos gradient-like.

O primeiro deles é um resultado fundamental que será utilizado em diversas ocasiões para obter propriedades de semigrupos.

Proposição 1.4.4 *Suponha que* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo assintoticamente compacto. Sejam* $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathbb{T}^+$ *com* $\sigma_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* X *e, para* $\mathbb{J}_k = \{s \in \mathbb{T} : -\sigma_k \leqslant s < \infty\}$, *defina* $\xi^k : \mathbb{J}_k \to X$ *por* $\xi^k(s) = T(s + \sigma_k)u_k$, $s \in \mathbb{J}_k$. *Se* $\{T(s)u_k : k \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{T}^+\}$ *é limitada, existe uma solução global* $y : \mathbb{T} \to X$ *de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *e uma subsequência de* $\{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *(que novamente denotamos por* $\{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$*) tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi^k(s) \to y(s), \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

A demonstração da Proposição 1.4.4 é imediata do Lema 1.4.13 (que será demonstrado ainda nesta seção) no caso particular quando a família de semigrupos é independente do parâmetro.

O segundo deles garante que, para um semigrupo gradient-like $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, dado um subconjunto limitado B de X e uma vizinhança $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ do conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}$, existe $t_0 = t_0(B, \mathcal{N}(\mathcal{E})) \in \mathbb{T}^+$ tal que todas as soluções começando em pontos de B, visitam $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ antes do instante t_0.

Lema 1.4.5 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ e suponha que ele tem um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz $(G1)$, dado $\delta < \delta_0 = \frac{1}{2} \min\limits_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant \mathfrak{p} \\ i \neq j}} d(y_i^*, y_j^*)$ e $B \subset X$ limitado, existe um $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$ tal que $\{T(t)u_0 : 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) \neq \varnothing$ para todo $u_0 \in B$.*

Prova: Podemos assumir, sem perda de generalidade, que B tem órbita limitada. Provaremos o resultado por contradição. Suponha que existe uma sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B e uma sequência $\{t_k\}$ em $\mathbb{T}^+$ (com $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) tais que $\{T(s)u_k : 0 \leqslant s \leqslant 2t_k\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) = \varnothing$. Usando a Proposição 1.4.4, temos que existe uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$ tal que $T(s + t_k)u_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi(s)$ para $s \in \mathbb{T}$. Claramente $\xi(s) \in \mathcal{A}$, para todo $s \in \mathbb{T}$ e como para $-t_k \leqslant s \leqslant t_k$, $T(s + t_k)u_k \notin \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*)$, $\xi(s) \notin \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*)$ para todo $s \in \mathbb{T}$, o que contradiz $(G1)$. ∎

Finalmente, no terceiro deles estabeleceremos que, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradient-like, dada uma vizinhaça $\mathcal{N}_2(y^*)$ de um ponto de equilíbrio y^*, existe outra vizinhança $\mathcal{N}_1(y^*)$ de y^* tal que se uma solução começa em $\mathcal{N}_1(y^*)$ e deixa $\mathcal{N}_2(y^*)$, então ela nunca volta para $\mathcal{N}_1(y^*)$.

Lema 1.4.6 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradient-like. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ denota o conjunto de suas soluções estacionárias e $\mathcal{A}$ o seu atrator global, dado $0 < \delta < \delta_0$,* *existe um $\delta' > 0$ tal que, se para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, $d(u_0, y_i^*) < \delta'$ e, para algum $t_1 > 0$, $d(T(t_1)u_0, y_i^*) \geqslant \delta$, então $d(T(t)u_0, y_i^*) > \delta'$ para todo $t \geqslant t_1$.*

Prova: Suponha que, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$ e $\delta > 0$, existe uma sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X com $d(u_k, z_i^*) < \frac{1}{k}$ e sequências $\sigma_k < t_k$ em $\mathbb{T}^+$ tais que $d(T(\sigma_k)u_k, z_i^*) \geqslant \delta$ e $d(T(t_k)u_k, z_i^*) < \frac{1}{k}$. Isto contradiz $(G2)$ e prova o resultado. ∎

Agora provaremos que, para um semigrupo gradient-like, o $\omega-$limite de um ponto consiste exatamente de um ponto de equilíbrio. Notemos que a condição (G_1) é imposta apenas para soluções no atrator.

Lema 1.4.7 *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like com um conjunto de equilíbrios $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Dado $u \in X$ existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que*

$$T(t)u \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*.$$

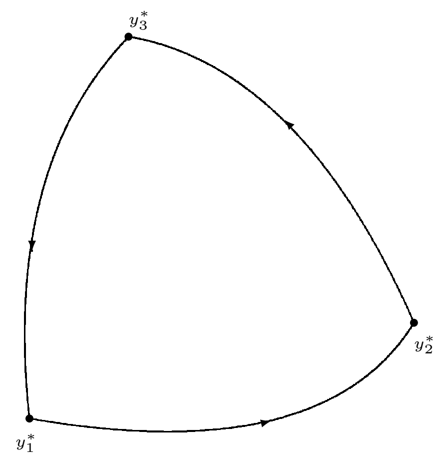
Prova: Segue do Lema 1.4.6 que, dado $\delta \in (0, \delta_0)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $d(v, y_i^*) < \delta'$ e para algum $t_{v,\delta} > 0$, $d(T(t_{v,\delta})v, y_i^*) \geqslant \delta$, então $d(T(t)v, y_i^*) > \delta'$ para todo $t \geqslant t_{v,\delta}$. Por outro lado, como $\gamma^+(u)$ é limitada, segue do Lema 1.4.5 que, dado δ' existe um $t_{\delta'} = t_{\delta'}(\gamma^+(u)) \in \mathbb{T}$ tal que, para cada $v \in \gamma^+(u)$,

$$\{T(t)v : 0 \leqslant t \leqslant t_{\delta'}\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_{\delta'}(y_i^*) \neq \varnothing.$$

Do fato de que $\mathcal{E}$ é finito que existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ e, para cada $\delta \in (0, \delta_0)$, um $s_\delta \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(s)u \in B_\delta(y_j^*)$ para todo $s \geqslant s_\delta$. Isto completa a prova do resultado. ∎

Definição 1.4.8 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Uma* estrutura homoclínica *em $\mathcal{A}$ é um conjunto $\{y_{\ell_1}^*, \cdots, y_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e um conjunto de soluções globais $\{\xi^{(i)} : \mathbb{T} \to X,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ em $\mathcal{A}$ tal que, fazendo $y_{\ell_{k+1}}^* := y_{\ell_1}^*$,*

$$\lim_{t\to-\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_i}^*, \quad \lim_{t\to+\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_{i+1}}^*, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$



Estrutura homoclínica (1.4.1)

Agora podemos provar o seguinte resultado relacionando $(G1)$ e $(G2)$ à não-existência de estruturas homoclínicas.

Lema 1.4.9 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ uma semigrupo que possui um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz $(G1)$, então $(G2)$ é satisfeita se, e somente se, $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.*

Prova: Se $\mathcal{A}$ tem uma estrutura homoclínica e y^* é um equilíbrio nesta estrutura é fácil ver que y^* é recorrente por cadeias.

Por outro lado, se $y^* \in \mathcal{E}$ é recorrente por cadeia, existem $\delta < \delta_0$, $\{y_{\ell_1}^*, \cdots, y_{\ell_{r+1}}^*\} \subset \mathcal{E}$ e para cada $\mathbb{N} \ni k > \frac{1}{\delta}$, pontos $y_1^k, \cdots, y_{r+1}^k$, $t_1^k > \tau_1^k, \cdots, t_r^k > \tau_r^k$ tais que

$$d(y_i^k, y_{\ell_i}^*) < \frac{1}{k},\ d(T(\tau_i^k)y_i^k, \mathcal{E}) > \delta,\ d(T(t_i^k)y_i^k, y_{\ell_{i+1}}^*) < \frac{1}{k},\ 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Escolha $\sigma_i^k > 0$ tal que $d(T(\sigma_i^k)y_i^k, y_{\ell_i}^*) \geqslant \delta$ e $d(T(t)y_i^k, y_{\ell_i}^*) < \delta$, para todo $0 \leqslant t < \sigma_i^k$. Do Lema 1.3.4 segue que $\sigma_i^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Para $t \in [-\sigma_i^k, \infty)$ seja $\xi^{i,k}(t) = T(\sigma_i^k + t)y_i^k$.

Segue da Proposição 1.4.4 que existe solução global $\xi_i : \mathbb{T} \to X$. Como cada $\xi^{(i)}$ deve convergir para um equilíbrio quando $t \to +\infty$ e quando $t \to -\infty$ e como $\xi^{(i)}(t) \in B_\delta(y_{\ell_i}^*)$

para todo $t < 0$ temos que $\xi^{(i)}(t) \to y^*_{\ell_i}$ quando $t \to -\infty$. Podemos assumir que, entre $-\sigma^i_k$ e $t^i_k - \sigma^i_k$, a solução $\xi^{k,i}$ permanece longe de $\mathcal{E}\backslash\{y^*_{\ell_i}, y^*_{\ell_{i+1}}\}$ pois caso contrário poderíamos inserir novos pontos nas $\epsilon-$cadeias até que este fosse o caso. Segue do Lema 1.4.6 que $\xi^{(i)}(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y^*_{\ell_{i+1}}$.

O conjunto $\{y^*_{\ell_1}, \cdots, y^*_{\ell_k}\} \subset \mathcal{E}$ e o conjunto de soluções globais $\{\xi_i : \mathbb{T} \to X,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ são tais que,

$$\lim_{t\to-\infty} \xi^{(i)}_n = y^*_{\ell_i}, \quad \lim_{t\to+\infty} \xi^{(i)}_n = y^*_{\ell_{i+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

com $y^*_{\ell_{k+1}} := y^*_{\ell_1}$. Portanto $\mathcal{A}$ tem uma estrutura homoclínica. ∎

<u>Corolário</u> 1.4.10 *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like e $\mathcal{A}$ seu atrator, existem pontos de equilíbrio y^*_α e y^*_ω tais que y^*_α tem conjunto estável trivial em $\mathcal{A}$; isto é, $W^s_{\mathcal{A}}(y^*_\alpha) = \{y^*_\alpha\}$ onde*

$$W^s_{\mathcal{A}}(y^*_\alpha) := \{y \in \mathcal{A} :\ \textit{tal que}\ \ T(t)y \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y^*_\alpha\}$$

e y^*_ω tem conjunto instável trivial; isto é, $W^u(y^*_\omega) = \{y^*_\omega\}$.

Prova: Vamos provar a existência de um ponto de equilíbrio y^*_ω com um conjunto instável trivial. A existência de y^*_α é similar. Se $\mathcal{E} = \{y^*_1, \cdots y^*_{\mathfrak{p}}\}$ é o conjunto dos equilíbrios para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e para cada y^*_i existe uma solução global $\xi^{(i)} : \mathbb{T} \to X$ tal que $\xi^{(i)}(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*_i$, é fácil ver que existe um $1 \leqslant \ell \leqslant \mathfrak{p}$ tal que $\{y^*_1, \cdots, y^*_\ell\}$ e $\{\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(\ell)}\}$ constituem uma estrutura homoclínica e que contradiz $(G2)$ e prova a existência de y^*_ω. ∎

A seguir consideremos uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$. Começamos com um resultado que estende o Lema 1.3.4 para a família $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$. Denotaremos por $\mathcal{E}_\eta$ o conjunto dos pontos de equilíbrios de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ para cada $\eta \in [0, 1]$.

<u>Lema</u> 1.4.11 *Se $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é contínua em $\eta = 0$, $y^{*,\eta} \in \mathcal{E}_\eta$, $\eta \in [0, 1]$, e $y^{*,\eta} \stackrel{\eta\to0}{\longrightarrow} y^{*,0}$, dado $t \in \mathbb{T}^+$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que $\{T_\eta(s)y : 0 \leqslant s \leqslant t,\ y \in B_\delta(y^{*,\eta})\} \subset B_\epsilon(y^{*,\eta})$ para todo $\eta \leqslant \eta_0$.*

Prova: Se este não é o caso existe uma sequência $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\epsilon_0 > 0$, $y_k \in B_{\frac{1}{k}}(y^{*,\eta_k})$ e $t_0 \in \mathbb{T}$ e seqüência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $[0,t_0]$ tal que $d(T_{\eta_k}(s_k)y_k, y^{*,\eta_k}) \geqslant \epsilon_0$. Podemos assumir que $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} s_0$ para algum $s_0 \in [0,t_0]$. Portanto $d(T_0(s_0)y^{*,0}, y^{*,0}) \geqslant \epsilon_0$, o que é uma contradição. ∎

<u>Definição</u> 1.4.12 *Diremos que a família de semigrupos* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *se, dadas uma sequência* $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *com* $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, uma sequência limitada* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* X *e uma sequência* $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{T}^+$ *com* $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k : k \in \mathbb{N}\}$ *limitada, então* $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k : k \in \mathbb{N}\}$ *é relativamente compacta.*

<u>Lema</u> 1.4.13 *Seja* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, $\eta \in [0,1]$*, uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$*. Seja* η_k *uma sequência em* $[0,1]$ *tal que* $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{T}^+$ *com* $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\mathbb{J}_k := \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -s_k\}$ *e* $\mathbb{J}_k^- = \{s \in \mathbb{J}_k : s \leqslant 0\}$*. Se, para cada* $k \in \mathbb{N}$*, existe uma solução* $\xi_{\eta_k} : \mathbb{J}_k \to X$ *de* $\{T_{\eta_k}(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *e* $B_0 := \cup_{k\in\mathbb{N}}\xi_{\eta_k}(-s_k)$ *é limitado, existe uma subsequência (que novamente denotaremos por* ξ_{η_k}*) e uma solução global* $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ *de* $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{\eta_k}(s) \to \xi_0(s)$$

para todo $s \in \mathbb{T}$ *e, se* $B_1 := \cup_{k\in\mathbb{N}}\xi_{\eta_k}(\mathbb{J}_k^-)$ *é limitado,* $\xi_0(s) \in \bar{B}_1$ *para todo* $s \leqslant 0$*.*

Prova: Como $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é coletivamente assintoticamente compacto e B_0 é limitado, existe uma subsequência que novamente denotamos por η_k e $x_0 \in X$ tal que $\xi_{\eta_k}(0) = T_{\eta_k}(s_k)\xi_{\eta_k}(-s_k) \to x_0$. Seja $\xi_0(\cdot) : \mathbb{T}^+ \to X$ a solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ definida por $\xi_0(t) := T_0(t)x_0$, $t \in \mathbb{T}^+$. Também

$$\xi_{\eta_k}(s) = T_{\eta_k}(s)\xi_{\eta_k}(0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T_0(s)x_0 = \xi_0(s), \quad \forall s \in \mathbb{T}^+.$$

Procedendo de maneira análoga, $\{\xi_{\eta_k}(-1)\}$ tem uma subsequência convergente $\xi_{\eta_k^1}(-1)$ com limite x_{-1}. Definindo $\xi_0(s) := T_0(s+1)x_{-1}$, $s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -1\}$, temos que

$T_0(1)x_{-1} = \lim_{k\to\infty} T_{\eta_k^1}(1)\xi_{\eta_k^1}(-1) = \lim_{k\to\infty} \xi_{\eta_k^1}(0) = x_0$ e $\xi_0 : \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -1\} \to X$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-1) = x_{-1}$, $\xi_0(0) = x_0$ e

$$\xi_{\eta_k^1}(s) = T_{\eta_k^1}(s+1)\xi_{\eta_k^1}(-1) \to T_0(s+1)x_{-1} = \xi_0(s), \quad s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -1\}.$$

Suponha que tenhamos obtido subsequências $\{\xi_{\eta_k^i}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, tais que $\{\eta_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{\eta_k^{i-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\xi_{\eta_k^i}(-i) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_{-i}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$ e $T_0(1)x_{-i} = x_{-i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$. É claro que $\xi_{\eta_k^i} = T_{\eta_k^i}(s+i)x_{-1}$ converge para uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ definida em $\{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -i\}$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Agora construímos $\{\eta_k^m\}_{n=1}^\infty$ uma subsequência de $\{\eta_k^{m-1}\}_{n=1}^\infty$ tal que $\xi_{\eta_k^m}(-m)$ é convergente e x_{-m} seu limite. É claro que $T_0(1)x_{-m} = x_{-m+1}$ e, se nós definirmos $\xi_0(s) = T(s+m)x_{-m}$ para $s \geqslant -m$, $\xi_0 : \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -m\} \to X$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-i) = x_{-i}$, $0 \leqslant i \leqslant m$ e $\xi_{\eta_k^m}(s)$ converge para $\xi_0(s)$ para todo $s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -m\}$.

Com isto construímos uma sequência $\{\xi_{\eta_k^k}\}_{k=1}^\infty$ e uma solução $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-i) = x_{-i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e tal que $\xi_{\eta_k^k}(s) \to \xi_0(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. A prova da última afirmativa do lema é imediata. ■

Corolário 1.4.14 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$, uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Seja $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(0,1]$ tal que $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\xi_{\eta_k} : \mathbb{T} \to X$ uma solução global de $\{T_{\eta_k}(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $\cup_{k\in\mathbb{N}}\xi_{\eta_k}(\mathbb{T})$ é limitado, para qualquer sequência $\mathbf{s} = \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}^+$, $\{\xi_{\eta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que denotaremos por $\{\xi_{\eta_k^{\mathbf{s}}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma solução global $\xi_0^{\mathbf{s}} : \mathbb{T} \to X$ de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{\eta_k^{\mathbf{s}}}(t+s_k) \to \xi_0^{\mathbf{s}}(t)$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

<u>Lema</u> 1.4.15 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, $\eta \in [0,1]$, uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradient-like, $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_p^*\}$ é o conjunto de seus pontos de equilíbrio, $\delta < \delta_0$ e $B \subset X$ é limitado, existem $\eta_0 = \eta_0(B) \in (0,1]$ e $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$, independente de $\eta \in [0, \eta_0]$, tal que $\{T_\eta(t)u_0 : 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) \neq \varnothing$ para todo $u_0 \in B$.*

Se, além das hipóteses anteriores, supomos que o conjunto dos pontos de equilíbrio de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$ e $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_1^*) \xrightarrow{\eta \to 0} 0$, podemos substituir y_i^* na conclusão acima por $y_i^{*,\eta}$.

Prova: Vamos fazer uma argumentação por contradição. Suponha que existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B, $0 < \delta < \delta_0$, uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0,1]$ com $\eta_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$, uma sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}^+$ com $t_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty$ tais que $\{T_{\eta_k}(s)x_k : 0 \leqslant s \leqslant 2t_k\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) = \varnothing$.

Como $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$, passando a uma subseqüência se necessário, existe $y \in X$ tal que $T_{\eta_k}(t_k)x_k \xrightarrow{k \to \infty} y$. Como $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é contínua em $\eta = 0$, $T_{\eta_k}(t + t_k)x_k \xrightarrow{k \to \infty} T_0(t)y$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Do Lema 1.4.7, existe um $t_\delta \in \mathbb{T}^+$ e $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que $d(T_0(t)y, y_j^*) < \delta$ para todo $t \geqslant t_\delta$ a assim chegamos a uma contradição. ∎

<u>Lema</u> 1.4.16 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ de semigrupos. Denote por $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$ o conjunto das soluções estacionárias de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ e suponha que $\max_{1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta \to 0} 0$. Se $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradient-like, dado $0 < \delta < \delta_0$, existe $\eta_0 > 0$ e $\delta' > 0$ (independente de $\eta \in [0, \eta_0]$) de maneira que, se $\eta \in [0, \eta_0]$, $d(u_0, y_i^{*,\eta}) < \delta'$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, e para algum $t_1 \in \mathbb{T}^+$ $d(T_\eta(t_1)u_0, y_i^{*,\eta}) \geqslant \delta$, então $d(T_\eta(t)u_0, y_i^{*,\eta}) > \delta'$ para todo $t \geqslant t_1$.*

Prova: Suponha que, para algum $0 < \delta < \delta_0$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, existe uma sequência u_k em X, $\{\eta_k\}_{k \in N}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$, $d(u_k, y_i^{*,\eta_k}) < \frac{1}{k}$ e sequências $\sigma_k < \tau_k$ em $\mathbb{T}^+$ tais que $d(T_{\eta_k}(\sigma_k)u_k, y_i^{*,\eta_k}) \geqslant \delta$ e $d(T_{\eta_k}(\tau_k)u_k, y_i^{*,\eta_k}) < \frac{1}{k}$. Mostremos que isto contradiz a propriedade $(G2)$ de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Note primeiramente que σ_k podem ser escolhidos de forma que $T_{\eta_k}(s)u_k \in B_\delta(y_i^{*,\eta_k})$ para todo $s < \sigma_k$ e, do Lema 1.4.11, $\sigma_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Tomando subseqüências construímos uma solução global $\xi_0 : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi_0(\tau) \overset{\tau\to-\infty}{\longrightarrow} y_i^*$. Do fato de que $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradient-like temos que existe $j \neq i$ tal que $\xi_0(\tau) \overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*$.

Do fato de que $\xi_0(\tau) \overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*$ e da construção de ξ_0, existe subseqüência $\{\eta_{k_m}\}$ de $\{\eta_k\}$ e seqüências $\{\sigma_{k_m}\}$, $\{t_{k_m}\}$ em $\mathbb{T}^+$, $\sigma_{k_m} < t_{k_m} < \tau_{k_m}$, tais que $d(T_{\eta_{k_m}}(\sigma_{k_m})u_{k_m}, y_j^{*,\eta_{k_m}}) < \frac{1}{m}$ e $d(T_{\eta_{k_m}}(t_{k_m})u_k, y_j^{*,\eta_{k_m}}) \geqslant \delta$. Procedendo exatamente como no passo anterior obtemos uma solução $\xi_1 : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi_1(s) \overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} y_j^*$. Do fato de que $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradient-like temos que existe $y_\ell^* \in \mathcal{E}$, $y_\ell^* \notin \{y_i^*, y_j^*\}$, tal que $\xi_1(s) \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} y_\ell^*$. Continuando com este procedimento chegamos em uma contradição em um número finito de passos. ∎

A seguir provamos a estabilidade por perturbação dos semigrupos gradient-like. Isto possibilitará a caracterização de atratores de semigrupos que são pequenas perturbações de semigrupos gradient-like, perturbar tais semigrupos novamente e ainda seremos capazes de dar uma caracterização dos atratores deste novo semigrupo perturbado.

Agora estamos prontos para provar que $(G1)$ e $(G2)$ são estáveis por perturbações; isto é, o conceito de semigrupo gradient-like é robusto sob perturbações.

Teorema 1.4.17 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ tal que*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado.

b) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0,1]$, e $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \overset{\eta\to0}{\longrightarrow} 0$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$. Além disso, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que a única solução global de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ contida em $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ é $y_i^{*,\eta}$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like.

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradient-like.

Prova: Vamos provar por redução ao absurto que, para η suficientemente pequeno, toda global $\xi^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ em $\mathcal{A}_\eta$ satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0, \text{ para algum } 1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}.$$

Note que $y_i^{*,\eta} \to y_i^{*,0} =: y_i^*$ e que existe um $\delta > 0$ tal que, para η suficientemente pequeno, se uma solução $\xi^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ satisfaz $d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^*) \leqslant \delta$ para todo $t \geqslant t_0$ e para algum $t_0 \in \mathbb{T}$, então $\xi^{(\eta)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^{*,\eta}$. Suponha que existe uma sequência $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e soluções globais correspondentes $\xi^{(k)}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ tais que

$$\sup_{s\geqslant t} \operatorname{dist}(\xi^{(k)}(s), \mathcal{E}) > \delta, \ \forall t \in \mathbb{T}^+ \tag{1.4.2}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 1.4.14, tomando subsequências, $\xi^{(k)}(t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi^{(0)}(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$ onde $\xi^{(0)}$ é uma solução global em $\mathcal{A}_0$. Como $\xi^{(0)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^*$, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, temos que, dado $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ existem $t_r \in \mathbb{T}$ e $k_r \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi^{(k)}(t_r), y_i^*) < \frac{1}{r}$, para cada $k \geqslant k_r$. De (1.4.2), existe $t_r' > t_r$ tal que $d(\xi^{(k_r)}(t), y_i^*) < \delta$ para todo $t \in [t_r, t_r')$ e $d(\xi^{(k_r)}(t_r'), y_i^*) \geqslant \delta$.

Tomando subsequências se necessário, seja $\xi^{(1)}(t) = \lim_{r\to\infty} \xi^{(k_r)}(t + t_r')$. Então, como $t_r' - t_r \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $d(\xi^{(1)}(t), y_i^*) \leqslant \delta$ para todo $t < 0$ e consequentemente $\xi^{(1)}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_i^*$. Além disso $\xi^{(1)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*$ com $i \neq j$ por $(G1)$ e $(G2)$ para $\eta = 0$. Do fato de que $\xi^{(k_r)}(t + t_r') \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \xi^{(1)}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$ temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um instante $t_m > 0$ e índices $k_m \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi^{(k_r)}(t_m), y_j^*) < \frac{1}{m}$ para todo $k_r \geqslant k_m$. Novamente, de (1.4.2), existem $t_m' > t_m$ tais que $d(\xi^{k_m}(t), y_j^*) < \delta$ para todo $t \in [t_m, t_m')$ e $d(\xi^{k_m}(t_m'), y_j^*) \geqslant \delta$. Procedendo exatamente como antes obtemos uma solução global $\xi^{(2)} : \mathbb{T} \to X$ tal que $\xi^{(2)}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_j^*$ e $\xi_n^{(2)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_\ell^*$ com $\ell \notin \{i, j\}$. Em um número finito de passos chegamos a uma contradição. Isto prova que existe um $\eta_0 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$ com $\eta \leqslant \eta_0$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0.$$

Para provar que existe um $\eta_1 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$ com $\eta \leqslant \eta_1$, temos que

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_j^{*,\eta}) = 0,$$

procedemos exatamente da mesma maneira. Isto completa a prova de que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz $(G1)$.

Vamos provar que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ também satisfaz $(G2)$. Novamente argumentaremos por contradição. Usando o Lemma 1.4.9, suponha que existe uma seqüência $\eta_k \to 0$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, pontos de equilíbrio $y_1^{*,\eta_k}, \cdots, y_q^{*,\eta_k}$ em $\mathcal{E}_{\eta_k}$ e soluções globais $\xi^{k,i}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ com

$$\lim_{t\to-\infty} \xi^{k,i}(t) = y_i^{*,\eta} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} \xi^{k,i}(t) = y_{i+1}^{*,\eta}$$

where $y_1^{*,\eta} = y_{q+1}^{*,\eta}$ (o número ou ordem dos pontos de equilíbrios nas seqüências acima poderia variar com k mas é sempre possível uma uniformização por passagem a uma subseqüência). Procedendo como na prova de $(G1)$ construímos uma estrutura homoclínica para $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ e chegamos a uma contradição. ■

Como consequência imediata deste teorema obtemos o seguinte resultado de caracterização.

<u>Corolário</u> 1.4.18 *Sob as hipóteses do Teorema 1.4.17, existe um $\eta_0 > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_i^{*,\eta}),\ \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Agora vamos substituir os equilíbrios por conjuntos invariantes isolados e definiremos os semigrupos gradient-like relativos a uma família disjunta de invariantes isolados. Os resultados provados para semigrupos gradient-like possuem análogos para o caso em que os semigrupos são gradient-like relativos a uma família disjunta de invariantes isolados. As provas desses resultados são semelhantes àquelas dos semigrupos gradient-like.

Definição 1.4.19 *Dizemos* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *é uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados se existe* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \varnothing$, $1 \leqslant i < j \leqslant \mathfrak{p}$, *e* Ξ_i *é o subconjunto invariante maximal de* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) := \{z \in X : \mathrm{dist}(z, \Xi_i) < \delta\}$.

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}\}$. Definimos

Definição 1.4.20 *Seja* δ *como na Definição 1.4.19 e fixe* $\epsilon_0 \in (0, \delta)$. *Para* $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ *e* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, *uma* $\epsilon-$*cadeia e* Ξ *a* Ξ *é uma sequência* $\{\Xi_{\ell_i}, \cdots, \Xi_{\ell_k}\} \subset \mathbf{\Xi}$, *uma seqüência* $t_1, \sigma_1, \cdots, t_k, \sigma_k$, *com* $t_i > \sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \leqslant \mathfrak{p}$, *e uma sequência de vetores* u_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, *tais que* $u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_i})$, $T(\sigma_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\cup_{i=1}^k(\Xi_{\ell_i}))$ *e* $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_{i+1}})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *com* $\Xi = \Xi_{\ell_{k+1}} = \Xi_{\ell_1}$. *Diremos que* $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ *é recorrente por cadeias se existe um* $\epsilon_0 \in (0, \delta)$ *e* $\epsilon-$*cadeias de* Ξ *a* Ξ *para cada* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.

Definição 1.4.21 *Seja* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo que possui um atrator global* $\mathcal{A}$. *Diremos que* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo gradient-like relativo a uma família disjunta de invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *se,*

$(GG1)$ *Para cada solução global* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *em* $\mathcal{A}$ *existem* $1 \leqslant i, j \leqslant \mathfrak{p}$ *tais que*

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(\xi(t), \Xi_i) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\xi(t), \Xi_j) = 0.$$

$(GG2)$ *Nenhum elemento de* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *é recorrente por cadeias.*

Como anteriormente introduzimos as definições de conjuntos instáveis e estáveis.

Definição 1.4.22 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo. O* conjunto instável *de um conjunto invariante isolado Ξ é dada por*

$$W^{\mathrm{u}}(\Xi) = \{\, \zeta \in X : \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{T} \to X$$
$$\text{tal que } \xi_0 = \zeta \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(\xi(t), \Xi) = 0\}.$$

O conjunto estável *de um conjunto invariante isolado Ξ para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dada por*

$$W^{\mathrm{s}}(\Xi_\eta) = \{\zeta \in X : \lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(T(t)\zeta, \Xi) = 0\}.$$

Dada uma vizinhança V de Ξ, o conjunto dos pontos y de V pelos quais existe solução global $\phi_y : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_y(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi$ e $\phi_y(t) \in V$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ é chamado um conjunto instável local *de Ξ e é denotado por $W^u_{\mathrm{loc}}(\Xi)$. De maneira semelhante, define-se um conjunto estável local.*

A demonstração do seguinte resultado é completamente análoga à do Teorema 1.4.17.

Teorema 1.4.23 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$, uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado.

b) Existe $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_\eta$ tem $\mathfrak{p}$ conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi}_\eta = \{\Xi_{1,\eta}, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p},\eta}\}$ para todo $\eta \in [0,1]$ e $\sup_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}}[\operatorname{dist}_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) + \operatorname{dist}_H(\Xi_{i,0}, \Xi_{i,\eta})] \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like relativo a uma família disjunta de invariantes isolados.

Então existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \leqslant \eta_0$, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradient-like relativo a uma família disjunta de invariantes isolados. Consequentemente, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(\Xi_{i,\eta}), \ \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Este resultado nos permite caracterizar atratores de semigrupos que são perturbações de semigrupos gradient-like relativamente a uma família de invariantes isolatos constituída por órbitas periódicas. De fato, para cada $1 \leqslant m \in \mathbb{N}$, a *aplicação no tempo um* para o problema

$$\begin{aligned} &\dot{r} = \begin{cases} \pi^{-1}(1 - \frac{1}{2m+1} - r)^3 \mathrm{sen}\frac{\pi}{1-r}, & r < 1 - \frac{1}{2m+1} \\ -(1 - \frac{1}{2m+1} - r)^2, & r \geqslant 1 - \frac{1}{2m+1} \end{cases} \\ &\dot{\theta} = \pi \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

tem atrator $\mathcal{A}_m = \{|r| \leq 1 - \frac{1}{2m+1}\}$, que é a união das variedades instáveis de Ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant 2m+1$, onde Ξ_j é a solução $2-$periódica correspondente à $r = 1 - \frac{1}{j}$, $1 \leqslant j \leqslant 2m+2$. Estas soluções periódicas são normalmente soluções hiperbólicas (se k é par, a órbita é instável, e se k é ímpar, a órbita é estável). Neste caso, é fácil ver que o atrator $\mathcal{A}_m$ é a união das variedades instáveis das soluções periódicas $\{\Xi_j : \ 1 \leqslant j \leqslant 2m+1\}$. O Teorema 1.4.23 implica que qualquer perturbação pequena da semigrupo dado pela aplicação no tempo um associado à (1.4.3) nos levará a um semigrupo gradient-like relativo a uma família disjunta de invariantes isolados e o atrator perturbado é caracterizado.

1.5 Equi-atração, continuidade e taxa de convergência de atratores

A continuidade de atratores está fortemente relacionada à uniformidade (relativamente ao parâmetro) da taxa de atração de conjuntos limitados para o atrator. Em alguns casos em que a taxa de atração é exponencial, uniformemente com respeito ao parâmetro, a continuidade de atratores é obtida em [5].

Sob certas hipóteses de continuidade dos semigrupos, a equivalência entre atração uniforme e continuidade de atratores foi estabelecida recentemente em um contexto mais geral em [26]. Nesta seção apresentamos resultados que relacionam a continuidade de atratores às propriedades de atração uniforme e mostramos que, em certas circunstâncias (com alguma uniformidade adicional) é possível obter estimativas explicitas da distância entre atratores para valores distintos do parâmetro (de maneira semelhante ao que é feito em [5] para semigrupos taxa de atração exponencial uniforme relativamente ao parâmetro). Nossas hipóteses são mais fracas que aquelas em [26, 27] substituindo a hipótese de compacidade pela de compacidade assintótica.

Definição 1.5.1 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$, diremos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai subconjuntos limitados de X se*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\eta\in[0,1]} \mathrm{dist}_H(T_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta) = 0,$$

para cada subconjunto limitado B de X.

1.5.1 Equi-atração implica continuidade de atratores

A seguir mostraremos que equi-atração implica continuidade de atratores.

Teorema 1.5.2 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e que $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ seja limitado. Se $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai limitados, então*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Prova: Seja B_0 um subconjunto limitado de X tal que

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta \subset B_0. \tag{1.5.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, segue da equi-atração que existe $t_0 = t_0(\varepsilon, B_0)$ tal que

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \mathrm{dist}_H(T_\eta(t)B_0, \mathcal{A}_\eta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } t \geqslant t_0. \tag{1.5.2}$$

Em particular, para todo $\eta \in [0,1]$,

$$\mathrm{dist}_H(T_0(t_0)\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, da continuidade da família $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\eta = 0$, do fato que $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado e da compacidade coletiva de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ em $\eta = 0$, existe $\eta_0 \in (0,1]$ tal que

$$\operatorname{dist}_H(T_\eta(t_0)\mathcal{A}_\eta, T_0(t_0)\mathcal{A}_\eta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, \eta \leqslant \eta_0.$$

Disto e da invariância dos atratores obtemos que, para todo $\eta \leqslant \eta_0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) &\leqslant \operatorname{dist}_H(T_\eta(t_0)\mathcal{A}_\eta, T_0(t_0)\mathcal{A}_\eta)\\ &\quad + \operatorname{dist}_H(T_0(t_0)\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \leqslant \varepsilon.\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Semelhantemente, obtemos de (1.5.2) que

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) &\leqslant \operatorname{dist}_H(T_0(t_0)\mathcal{A}_0, T_\eta(t_0)\mathcal{A}_0)\\ &\quad + \operatorname{dist}_H(T_\eta(t_0)\mathcal{A}_0, T_\eta(t_0)\mathcal{A}_\eta) \leqslant \varepsilon.\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Isto completa a prova. ∎

1.5.2 Continuidade de atratores implica equi-atração

A seguir damos uma recíproca do Teorema 1.5.2 que estende o Teorema 2.3 de [26] pedindo compacidade assintótica e limitação uniforme em lugar de compacidade assintótica.

<u>Definição</u> 1.5.3 *Diremos que uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é uniformemente limitada se*

$$\bigcup_{\eta\in[0,1]} \bigcup_{t\geq 0} T_\eta(t)B \text{ é limitada}$$

sempre B é um subconjunto limitado de X.

<u>Teorema</u> 1.5.4 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tenha um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$, que $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ seja uniformemente limitada e que*

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \xrightarrow{\eta\to 0} 0. \tag{1.5.5}$$

Então, para cada seqüência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*,* $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\eta_n}}$ *é compacto e* $\{\mathcal{A}_{\eta_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *equi-atrai limitados. Consequentemente, existe* $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $\bigcup_{\eta\in[0,\eta_0]} \mathcal{A}_\eta$ *é limitado e* $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,\eta_0]}$ *equi-atrai limitados.*

Prova: A compacidade de $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\eta_n}}$ segue imediatamente de (1.5.5). Provamos a equi-atração por contradição. Suponha que existam $\epsilon > 0$, seqüência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e seqüência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que,

$$\operatorname{dist}(T_{\eta_n}(t_n)x_n, \mathcal{A}_{\eta_n}) \geqslant 2\epsilon.$$

Usando (1.5.5) podemos assumir que,

$$\operatorname{dist}(T_{\eta_n}(t_n)x_n, \mathcal{A}_0) \geqslant \epsilon.$$

Segue da limitação uniforme de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\geqslant 0} T_{\eta_n}(t)x_n$$

é limitado e da continuidade e compacidade coletiva em $\eta = 0$ que, para cada $t \in \mathbb{T}^+$ existe $b \in B$ tal que

$$\operatorname{dist}(T_0(t)b, \mathcal{A}_0) \geqslant \epsilon$$

o que contradiz o fato de $\mathcal{A}_0$ atrair limitados de X sob a ação de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Isto completa a demonstração da equi-atração para a família $\{\mathcal{A}_{\eta_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

A existência de η_0 segue facilmente do que foi feito acima e é deixada como exercício.■

1.5.3 Taxa de convergência de atratores

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que a equi-atração pode ser usada para dar limitantes superiores explícitos para a taxa de convergência de atratores na métrica de Hausdorff. Isto generaliza os resultados do Teorema 8.2.1 em [5], que trata somente do caso em que a equi-atração é exponencial.

Teorema 1.5.5 *Seja* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família de semigrupos. Suponha que* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$ *para cada* $\eta \in [0,1]$ *e seja* $D = \cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$*. Se existe uma função contínua e estritamente decrescente* $\gamma : \mathbb{T}^+ \to [0,\infty)$ *tal que*

$$\sup_{\eta\in[0,1]} \mathrm{dist}_H(T_\eta(t)D, \mathcal{A}_\eta) \leqslant \gamma(t),\ \ t \in \mathbb{T}^+ \quad e \tag{1.5.6}$$

$$\sup_{x\in D} \mathrm{dist}(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \leqslant E_\eta(t) \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{T}^+, \tag{1.5.7}$$

onde $E_\eta(t) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ *para cada* $t \in \mathbb{T}^+$*. Então*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leqslant \inf_{\epsilon\in\gamma(\mathbb{T}^+)} 2\left\{E_\eta(\gamma^{-1}(\epsilon)) + \epsilon\right\}. \tag{1.5.8}$$

Observação 1.5.6 *Note que, se* $\gamma(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, o lado direito de* (1.5.8) *converge para zero quanto* η *tende a zero pois, dado* $\epsilon > 0$ *podemos escolher* $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $E_\eta(\gamma^{-1}(\epsilon/4)) < \epsilon/4$ *para cada* $\eta \leqslant \eta_0$*. Assim, para* $\eta \leqslant \eta_0$ *temos que* $\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) < \epsilon$*. Isto dá uma prova alternativa do nosso Teorema 1.5.2 para famílias de semigrupos que satisfazem* (1.5.7).

Prova: Note que, para $t \in \mathbb{T}^+$,

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \leqslant \mathrm{dist}_H(T_\eta(t)\mathcal{A}_\eta, T_0(t)\mathcal{A}_\eta) + \mathrm{dist}_H(T_0(t)\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \tag{1.5.9}$$

Agora, de (1.5.7),

$$\mathrm{dist}_H(T_\eta(t)\mathcal{A}_\eta, T_0(t)\mathcal{A}_\eta) \leqslant \sup_{x\in\mathcal{A}_\eta} \mathrm{d}(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \leqslant E_\eta(t)$$

Disto, de (1.5.9) e de (1.5.6) obtemos que

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \leqslant E_\eta(t) + \gamma(t).$$

Segue que, para $\epsilon \in \gamma([0,\infty))$ e $t = \gamma^{-1}(\epsilon)$,

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \leqslant E_\eta(\gamma^{-1}(\epsilon)) + \epsilon. \tag{1.5.10}$$

Procedendo de maneira semelhante obtemos que

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leqslant E_\eta(\gamma^{-1}(\epsilon)) + \epsilon,$$

e (1.5.8) segue. ■

Quando a atração uniforme da família $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é exponencial podemos dar uma informação mais precisa sobre a taxa de convergência dos atratores.

Corolário 1.5.7 *Suponha que as condições do Teorema 1.5.5 estão satisfeitas com*

- $\gamma(t) = ce^{-\nu t}$ *para algum* $c \geqslant 1$, $\nu > 0$ *e para todo* $t \in \mathbb{T}^+$ *e*
- $E_\eta(t) = \rho(\eta)e^{Lt}$, $t \in \mathbb{T}^+$, *onde* $L > 0$ *e* $\rho : [0,1] \to [0,\infty)$ *é contínua com* $\rho(0) = 0$.

Então existe uma constante $\bar{c} > 0$ *tal que*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leqslant \bar{c}\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}.$$

Prova: No Teorema 1.5.5 tomamos $\gamma^{-1}(\epsilon) = \log\left(\frac{c}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, de maneira que (1.5.8) torna-se

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leqslant 2 \inf_{\epsilon \in (0,c]} \left[\rho(\eta)\left(\frac{c}{\epsilon}\right)^{L/\nu} + \epsilon\right].$$

No caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, a função do lado direito da expressão acima atinge seu mínimo para $\epsilon = c^{\frac{L}{L+\nu}}\left(\frac{L}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+L}}\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}$. Assim,

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leqslant 2c^{\frac{L}{L+\nu}}\left(\left(\frac{L}{\nu}\right)^{-\frac{L}{\nu+L}} + \left(\frac{L}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+L}}\right)\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}$$

e isto conclui a demonstração. O caso $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ tem prova semelhante e é deixado como exercício e neste caso temos que

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leqslant 2c\left(\left(\frac{L}{\nu e^\nu}\right)^{\frac{-L}{\nu+L}} + \left(\frac{Le^L}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+L}}\right)\rho(\eta)^{\frac{\nu}{\nu+L}}$$

e a prova está completa. ■

1.6 Um semigrupo gradient-like é gradiente

O *Teorema Fundamental dos Sistemas Dinâmicos*, sugerido em [51] dos resultados de [22], estabelece que em qualquer espaço métrico compacto um atrator pode ser descrito por conjuntos invariantes isolados e as conexões entre eles. Na terminologia de [22], esta decomposição é chamada uma Decomposição de Morse (veja Definição 1.6.8), e foi considerada em diferentes contextos, no caso de grupos por ([22]) e no caso de semigrupos por ([57]), ou mesmo em um espaço topológico, compacto ou não, em ([39, 52, 53]).

Por outro lado, recentemente foram introduzidos em [12] os *semigrupos gradient-like relativamente a uma família disjunta de invariantes isolatos* (veja Definição 1.4.21) em espaços de Banach como um conceito intermediário entre os semigrupos gradientes relativos a uma família disjunta de invariantes isolados (aqueles que possuem uma função de Lyapunov que só é constante nos conjuntos invariantes isolados) e os semigrupos com atratores gradient-like; isto é, aqueles com atratores que são caracterizados como a união dos conjuntos instáveis de conjuntos invariantes isolados.

No que se segue, construímos uma função de Lyapunov diferenciável para um semigrupo gradient-like relativo a uma família disjunta de invariantes isolados em um espaço métrico geral, mostrando que os semigrupos gradient-like relativos a uma família disjunta de invariantes isolados são de fato semigrupos gradientes relativos a uma família disjunta de invariantes isolados. As provas apresentadas aqui, embora inspiradas nos resultados clássicos (veja [22, 57]), são diferentes e seguem as idéias introduzidas por [12] sobre semigrupos gradient-like. A recorrência por cadeias é introduzida apenas para conexões entre invariantes isolados e a noção de par atrator-repulsor é apresentada de forma bastante mais simples que nos textos clássicos.

Para construir a Função de Lyapunov, primeiramente provaremos que uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados de um semigrupo gradient-like relativo a uma família disjunta de invariantes isolados em um espaço métrico geral pode ser reordenada de maneira a tornar-se uma Decomposição de Morse do atrator global. Um refinamento dos resultados de [22] nos levariam a definir uma função de Lyapunov generalizada, não somente no atrator mas em todo o espaço de fase. De fato, diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ com um atrator global $\mathcal{A}$ e uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ é um *semigrupo gradiente* relativamente a $\boldsymbol{\Xi}$ se existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ tal que $[0, \infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $x \in X$, V é constante em Ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, e $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \geqslant 0$ se, e somente se, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \Xi_i$.

O resultado principal desta seçã diz que, *um semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é gradiente relativamente a família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi}$ se, e somente se, é gradiente-like relativamente a $\boldsymbol{\Xi}$.*

Uma das conseqüências imediatas deste resultado é que, se a família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{E} = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ é constituída de soluções estacionárias, então um semigrupo é gradiente no sentido de [34] (veja Definição 3.8.1) se, e somente se, é gradient-like (veja Definição 1.4.3). Então, como semigrupos gradient-like são estáveis por perturbação (veja Teorema 1.4.17), concluímos que semigrupos gradientes são estáveis sob perturbação; isto é, a existência de funções de Lyapunov contínuas é robusta por perturbações.

Observe que, qualquer decomposição de Morse $\boldsymbol{\Xi} = (\Xi_1, \cdots, \Xi_n)$ de um conjunto compacto e invariante $\mathcal{A}$ nos leva a uma ordenação partial entre os conjuntos invariantes isolados Ξ_i; isto é, dados dois conjuntos invariantes isolados Ξ_i e Ξ_{i+r}, dizemos que $\Xi_i \geqslant \Xi_{i+r}$ se existe uma cadeia de soluções globais $\{\xi_\ell,\ 1 \leqslant \ell \leqslant r\}$, com $\lim_{t\to-\infty} d(\xi_\ell(t), \Xi_{i+\ell-1}) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \xi_\ell(t) = \Xi_{i+\ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant r$. Isto define uma odenação parcial e alguns dos invariantes isolados em $\boldsymbol{\Xi}$ podem não ser comparáveis.

1.6.1 Decomposição de Morse de semigrupos gradient-like

Seja X um espaço métrico com métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$. A seguir apresentamos a noção de decomposição de Morse para um atrator $\mathcal{A}$ de um semigrupo gradient-like $\{T(t) : t \geqslant 0\}$. Começamos com a noção de par atrator-repulsor.

Definição 1.6.1 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que um subconjunto não vazio Ξ de $\mathcal{A}$ é um atrator local se existe um $\epsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)) = \Xi$. O repulsor Ξ^* associado ao atrator local Ξ é o conjunto definido por*

$$\Xi^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap \Xi = \varnothing\}.$$

O par (Ξ, Ξ^*) é chamado um par atrator repulsor para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$.

Exercício 1.6.2 *Mostre que, se Ξ é um atrator local, então Ξ^* é fechado e invariante e $\Xi \cap \Xi^* = \varnothing$.*

Observe que Ξ é um atrator local se, e somente se, é compacto invariante e atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)$ para algum $\epsilon > 0$. Observamos que as definições acima diferem um pouco da definição usual pois pedimos que o atrator local atraia uma vizinhança de Ξ em X e não em $\mathcal{A}$ como em [22, 57]. Provaremos a seguir que ambas as definições coincidem.

Lema 1.6.3 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo em X com atrator global $\mathcal{A}$. Se Ξ é um conjunto invariante compacto para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ e existe um $\epsilon > 0$ tal que Ξ atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ então, dado $\delta > 0$ existe um $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, onde $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)} \bigcup_{t \geqslant 0} T(t)x$.*

Prova: Dado $0 < \delta < \epsilon$ se não existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, existem $x \in \Xi$, $X \ni x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\mathbb{R} \ni t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \Xi) = \delta$ e $T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, $t \in [0, t_n]$. Como $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ tem um atrator global, não é difícil ver que existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\xi_n : [-t_n, \infty) \to X$ dada por $\xi_n(t) = T(t_n + t)x_n$ satisfaz

$\xi_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Claramente $\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi)} \bigcap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \bigcap \mathcal{A}$ para todo $t \leqslant 0$, $d(\xi(0), \Xi) = \delta$, e consequentemente Ξ não pode atrair $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$. ■

Lema 1.6.4 *Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo em X com um atrator global $\mathcal{A}$ e $S(t) := T(t)|_{\mathcal{A}}$, claramente $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo no espaço métrico $\mathcal{A}$. Se Ξ é um atrator local para $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ no espaço métrico $\mathcal{A}$ e K é um subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ tal que $K \cap \Xi^* = \varnothing$, então Ξ atrai K. Além disso Ξ é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ em X.*

Prova: Seja K um subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ tal que $K \cap \Xi^* = \varnothing$. Se $\Xi = \omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A})$ não atrai K e $0 < \delta < \epsilon$, existe $\delta' \in (0, \delta)$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $x \in K$ e $K \ni x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ tais que $d(T(t)x_n, \Xi) \geqslant \delta'$, $0 \leqslant t \leqslant t_n$. Isto implica que $d(T(t)x, \Xi) \geqslant \delta'$ para todo $t \geqslant 0$ e, consequentemente, $\omega(x) \cap \Xi = \varnothing$ e portanto $x \in \Xi^*$ o que é uma contradição.

Para a parte restante do resultado note que, do Lema 1.6.3, existe $\delta' \in (0, \epsilon)$ tal que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ e portanto $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \cap \Xi^* = \varnothing$. Da invariância de $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ e da propriedade que Ξ atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$, devemos ter que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \Xi$. Como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$ o resultado segue. ■

Lema 1.6.5 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo em X com um atrator global $\mathcal{A}$ e um par atrator-repulsor (Ξ, Ξ^*).*

1) *Uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ com a propriedade que $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$ deve satisfazer $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.*

2) *Uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ com a propriedade que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$ para todo $t \leqslant 0$ e algum $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*) \cap \Xi = \varnothing$ deve satisfazer $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Prova: Se a conclusão de 1) é falsa, existe $\delta' > 0$ e seqüência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $d(\xi(-t_n), \Xi^*) \geqslant \delta'$ e, para algum $t \in [-t_n - 1, -t_n)$, $d(\xi(t), \Xi^*) < \delta'$. Isto nos leva a uma contradição com o fato que Ξ deve atrair o subconjunto compacto $K = \{z \in \mathcal{A} : d(z, \Xi^*) \geqslant \delta'\}$ de $\mathcal{A}$.

Para provar 2) observamos que se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* = \varnothing$, do Lema 1.6.4 temos que $\overline{\xi(\mathbb{R})} \subset \Xi$ o que nos dá uma contradição. Por outro lado, se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, segue de *1)* que $d(\xi(t), \Xi^*) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Isto completa a demonstração. ∎

<u>Lema</u> 1.6.6 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo em X com atrator global $\mathcal{A}$ e um par atrator-repulsor (Ξ, Ξ^*). Se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ por $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, então $\xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$ e $\xi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$. Além disso, se $x \in X\backslash\mathcal{A}$ então, $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$.*

Prova: Como $x \notin \Xi^*$ temos que $\omega(x) \cap \Xi$ é não vazio e, do fato que Ξ é um atrator local, temos que $\xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$. Por outro lado, se $\xi(t)$ não converge para Ξ^* quando $t \to -\infty$ dividimos a prova do resultado em dois casos: Se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* = \varnothing$, então $\xi(\mathbb{R})$ é invariante e, do Lema 1.6.4, é atraído por Ξ o que é uma contradição. Logo, $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^*$ é não vazio e do Lema 1.6.5 temos que $d(\xi(t), \Xi^*) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Para $x \in X\backslash\mathcal{A}$ provemos que $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$. Se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \varnothing$ temos que $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$. Por outro lado, se existe $\delta > 0$ com $\gamma^+(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \varnothing$, e neste caso afirmamos que $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$. Se a afirmativa é falsa, existe $\nu > 0$ e uma seqüência $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $d(T(t_n)x, \Xi^*) \geqslant \nu$. Considerando a seqüência de funções $\xi_n : [-t_n, \infty) \to X$ definida por $\xi_n(t) = T(t + t_n)x$, $t \geqslant -t_n$, construímos uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $d(\xi(0), \Xi^*) \geqslant \nu$ e $d(\xi(t), \Xi) \geqslant \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim $\omega(\xi(0)) \cap \Xi = \varnothing$ e $\xi(0) \in \Xi^*$ o que é uma contradição. ∎

<u>Corolário</u> 1.6.7 *Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo em X com um atrator global $\mathcal{A}$ e (Ξ, Ξ^*) é um par atrator-repulsor para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, então $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like relativo à família disjunta de invariantes isolados $\{\Xi, \Xi^*\}$.*

Com isto podemos começar a estudar a decomposição de Morse do atrator de um semigrupo gradient-like relativo a a família disjunta de conjuntos invariantes isolados. Começamos fixando a definição de decomposição de Morse que utilizaremos.

Definição 1.6.8 *Dada uma família crescente* $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$, *de* $n+1$ *atratores locais, para* $j = 1, \cdots, n$, *defina* $\Xi_j := A_j \cap A_{j-1}^*$. *A n-upla ordenada* $\boldsymbol{\Xi} := (\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_n)$ *é chamada uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$.

No que se segue, nosso objetivo é mostrar que, se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like relativo à família disjunta de invariantes isolatos $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$, então uma reordenação de $\boldsymbol{\Xi}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. O resultado a seguir desempenha um papel fundamental neste processo.

Exercício 1.6.9 *Seja* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\Xi \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante isolado. Mostre que* Ξ *é um atrator local se, e somente se,* $W^{\mathrm{u}}(\Xi) = \Xi$.

Lema 1.6.10 *Seja* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrup gradient-like relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados* $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. *Então, existe um* $1 \leqslant k \leqslant n$ *tal que* Ξ_k *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* X.

Prova: Do Exercício 1.6.9, se não existe um atrator local em $\boldsymbol{\Xi}$ temos que, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, existe uma solução global $\xi_i : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi_i(t) \xrightarrow{t \to -\infty} \Xi_i$ e $\xi_i(t) \xrightarrow{t \to +\infty} \Xi_{j(i)}$ com $j(i) \neq i$. Isto produz uma estrutura homoclínica e nos dá uma contradição. ∎

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo gradient-like relativo à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Se (após uma possível reordenação) Ξ_1 é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ e

$$\Xi_1^* = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a) \cap \Xi_1 = \varnothing\}$$

cada Ξ_i, $i > 1$ está contido em Ξ_1^* e para qualquer $a \in \mathcal{A} \backslash \{\Xi_1 \cup \Xi_1^*\}$ e solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ com $\phi(0) = a$ temos que

$$\Xi_1^* \xleftarrow{t \to -\infty} \phi_j(t) \xrightarrow{t \to \infty} \Xi_1.$$

Considerando a restrição $T_1(t)$ de $T(t)$ a $\Xi_1^* =: \Xi_{1,0}^*$ temos que $T_1(t)$ é um semigrupo gradient-like em Ξ_1^* relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\{\Xi_2, \cdots, \Xi_n\}$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que Ξ_2 é um atrator local para $\{T_1(t) : t \geqslant 0\}$ em Ξ_1^*. Se $\Xi_{2,1}^*$ é o repulsor associado ao conjunto invariante isolado Ξ_2 de $\{T_1(t) : t \geqslant 0\}$ em Ξ_1^* podemos prosseguir e considerar a restrição $\{T_2(t) : t \geqslant 0\}$ do semigrupo $\{T_1(t) : t \geqslant 0\}$ a $\Xi_{2,1}^*$ e $\{T_2(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like em $\Xi_{2,1}^*$ relativo à família disjunta de invariantes isolados $\{\Xi_3, \cdots, \Xi_n\}$.

Prosseguindo com estre processo, após um número finito de passos, obtemos uma reordenação de $\{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ de modo que Ξ_j é um atrator local para a restrição de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ a $\Xi_{j,j-1}^*$ ($\Xi_{0,-1}^* := \mathcal{A}$).

Com esta construção, se uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ satisfaz

$$\Xi_\ell \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_k \tag{1.6.1}$$

então $\ell \geqslant k$. Para ver isto, primeiro observamos que se (Ξ, Ξ^*) é um par atrator repulsor, qualquer solução global $\zeta : \mathbb{R} \to X$ com $\zeta(0) \in \Xi^*$ satisfaz $\zeta\,(t) \in \Xi^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Da convergência de $\xi(\cdot)$ para Ξ_k, necessariamente $\xi(0) \in \Xi_{k-1,k-2}^*$. Mas $\Xi_{k-1,k-2}^*$ é invariante e contém somente os invariantes isolados $\{\Xi_k, \Xi_{k+1}, \ldots, \Xi_n\}$. Disto segue imediatamente que $\ell \geqslant k$.

Provaremos agora que esta reordenação dos $\{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ (que denotamos da mesma forma) é uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$ com uma seqüência oportunamente escolhida $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n$ de atratores locais.

Defina $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \Xi_1$ e para $j = 2, 3, \cdots, n$

$$A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\Xi_j) = \cup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(\Xi_j). \tag{1.6.2}$$

É claro que $A_n = \mathcal{A}$.

Exercício **1.6.11** *Mostre que A_j é compacto.*

Teorema 1.6.12 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ reordenada de maneira que Ξ_j é um atrator para a restrição de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ a $\Xi^*_{j-1,j-2}$. Então A_j definido em (1.6.2) é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ em X,*

$$\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}.$$

e $\boldsymbol{\Xi}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$.

Prova: Do Lema 1.6.4, é suficiente provar que $A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\Xi_j)$ é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ restrito ao atrator global $\mathcal{A}$.

Escolha $d > 0$ tal que $\mathcal{O}_d(\bigcup_{i=1}^{j} W^u(\Xi_i)) \cap (\bigcup_{i=j+1}^{n} \Xi_i) = \varnothing$. Se existem $\delta < d$ e $\delta' < \delta$ tais que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j) \cap \mathcal{A}$, então $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}$ e (como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ é invariante) está contido em A_j provando que A_j é um atrator local em $\mathcal{A}$. Se este não é o caso, existe uma seqüência $\{x_k\}$ em $\mathcal{A} \backslash A_j$ com $d(x_k, A_j) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para cada x_k uma solução global $\xi_k : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ por x_k e uma seqüência $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tal que $d(\xi_k(t), A_j) \leqslant \delta$ para todo $t \in [0, t_k]$ e $d(\xi_k(t_k), A_j) = \delta$. Desta maneira, construímos uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $d(\xi(t), A_j) \leqslant \delta$ para todo $t \leqslant 0$ e $d(\xi(0), A_j) = \delta$. Isto nos dá uma contradição.

Para provar que $\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ note que $A_j \supset \bigcup_{i=1}^{j} \Xi_i$ (veja (1.6.2)) e $A^*_{j-1} = \{z \in \mathcal{A} : \omega(z) \cap A_{j-1} = \varnothing\} \supset \bigcup_{i=j}^{n} \Xi_i$. Portanto, dado $z \in A_j \cap A^*_{j-1}$ temos que uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ por z deve satisfazer

$$\Xi_\ell \stackrel{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_k.$$

com $k \leqslant \ell \leqslant j$ (do fato que $z \in A_j$) e $j \leqslant k \leqslant \ell$ (do fato que $z \in A^*_{j-1}$). Disto e do fato que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$, obtemos que $z \in \Xi_j$. Logo $A_j \cap A^*_{j-1} \subset \Xi_j$. A outra inclusão é imediata da definição de A_j e A^*_{j-1}. ∎

Proposição 1.6.13 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ reordenados de maneira que constituam uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. Então,*

$$\bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j.$$

Prova: Claramente $\bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j \subset \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$. Agora, seja $z \in \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$, $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $z \in A_j$, $k \leqslant j \leqslant n$, e $z \in A_j^*$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Segue do Teorema 1.6.12 que $z \in A_k \cap A_{k-1}^* = \Xi_k$. Isto completa a prova. ■

1.6.2 Funções de Lyapunov para semigrupos gradient-like

Inspirados no trabalho de Conley (see [22, 57]) provaremos a seguir a equivalência entre os semigrupos gradientes e os semigrupos gradient-like relativos uma família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Os semigrupos gradient-like relativos a $\mathbf{\Xi}$ foram apresentados na Definição 1.4.21 e agora apresentaremos os semigrupos gradientes relativos a $\mathbf{\Xi}$.

Definição 1.6.14 *Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ que tem um atrator global $\mathcal{A}$ e uma família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ é um semigrupo gradiente relativamente a $\mathbf{\Xi}$ se existir uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ tal que $[0, \infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $x \in X$, V é constante em Ξ_i para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, e $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \geqslant 0$ se, e somente se, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \Xi_i$. Uma função V com tais propriedades é chamada uma função de Lyapunov para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$.*

Os lemas a seguir vão desempenhar um papel fundamental na prova desta equivalência.

Lema 1.6.15 *Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$, a função $h : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) := \sup_{t \geqslant 0} d(T(t)x, \mathcal{A}), x \in X,$$

está bem definida, é contínua, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $x \in X$ e $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$.

Prova: De fato, pelo Lema 1.6.4, dado $\varepsilon > 0$ seja $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$. Isto mostra a continuidade de h em $\mathcal{A}$. Se $z_0 \in X\backslash\mathcal{A}$, então $h(z_0) > 0$. Considere $\mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para algum $0 < \mu < h(z_0)$. Seja V uma vizinhança limitada de z_0 tal que $d(z, \mathcal{A}) > \mu$ se $z \in V$. Finalmente, seja $\tau > 0$ tal que $\gamma^+(T(t)V) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$ para todo $t \geq \tau$. Para $z \in V$ vale que $h(z) = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau} d(T(s)z, \mathcal{A})$ e, da continuidade do semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, segue que $h\,|_V : V \to \mathbb{R}$ é contínua. Para ver que dado $z \in X$, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)z) \in \mathbb{R}$ é decrescente note que, se $t_1 \geqslant t_2$, então

$$\begin{aligned} h(T(t_1)z) &= \sup_{t\geqslant 0} d(T(t)T(t_1)z, \mathcal{A}) = \sup_{t\geqslant 0} d(T(t+t_1)z, \mathcal{A}) \\ &= \sup_{t\geqslant t_1} d(T(t)z, \mathcal{A}) \leqslant \sup_{t\geqslant t_2} d(T(t)z, \mathcal{A}) = \sup_{t\geqslant 0} d(T(t)T(t_2)z, \mathcal{A}) = h(T(t_2)z). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 1.6.16 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ e (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor em $\mathcal{A}$. Então, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

(i) $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto f(T(t)z) \in \mathbb{R}$ *é decrescente para cada* $z \in X$.

(ii) $f^{-1}(0) = \Xi$ *e* $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

(iii) *Dado* $z \in X$, *se* $f(T(t)z) = f(z)$ *para todo* $t \geqslant 0$, *então* $z \in (\Xi \cup \Xi^*)$.

Prova: Primeiramente note que Ξ e Ξ^* são subconjuntos fechados e disjuntos do conjunto compacto $\mathcal{A}$. Com a convenção que $d(z, \varnothing) = 1$ para cada $z \in X$, definimos a função (a função de canônica de Urysohn se Ξ e Ξ^* são não vazios) $l : X \to [0, 1]$ associada a (Ξ, Ξ^*) por

$$l(z) := \frac{d(z, \Xi)}{d(z, \Xi) + d(z, \Xi^*)}, \ z \in X.$$

Claramente l está bem definida, é uniformemente contínua em X (pois, para $d_0 := d(\Xi, \Xi^*) > 0$, vale que $|l(z) - l(w)| \leqslant \frac{1}{d_0} d(z, w)$, para todo z e w em X). Além disso, $l^{-1}(0) = \Xi$ e $l^{-1}(1) = \Xi^*$.

Se $k : X \to \mathbb{R}$ é dada por

$$k(z) := \sup_{t\geqslant 0} \ l(T(t)z),$$

mostremos que $k : X \to \mathbb{R}$ é contínua, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto k(T(t)z$ é decrescente para cada $z \in X$, $k^{-1}(0) = \Xi$ e que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Para provar que $[0, \infty) \ni t \mapsto k(T(t)z) \in [0, 1]$ é decrescente para cada $z \in X$ note que, se $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ temos

$$\begin{aligned} k(T(t_1)z) &= \sup_{t \geqslant 0} \ l(T(t)T(t_1)z) = \sup_{t \geqslant 0} \ l(T(t + t_1)z) = \sup_{t \geqslant t_1} \ l(T(t)z) \\ &\geqslant \sup_{t \geqslant t_2} \ l(T(t)z) = \sup_{t \geqslant 0} \ l(T(t + t_2)z) = k(T(t_2)z). \end{aligned}$$

É claro da definição de k e da invariância de Ξ e Ξ^* que $k(\Xi) = \{0\}$ e $k(\Xi^*) = \{1\}$. Agora, se $z \in X$ é tal que $k(z) = 0$, então $l(T(t)z) = 0$ para todo $t \geqslant 0$. Em particular, $0 = l(T(0)z) = l(z)$, e assim, $z \in \Xi$; isto é, $k^{-1}(0) \subset \Xi$ mostrando que $k^{-1}(0) = \Xi$. Por outro lado, se $z \in \mathcal{A}$ é tal que $k(z) = 1$ e $z \notin \Xi^*$, então $\omega(z) \subset \Xi$. Da continuidade de l e do fato que $\omega(z)$ atrai z, obtemos que $\lim_{t \to \infty} l(T(t)z) = 0$. Logo, existe um $t_0 > 0$ tal que $1 = k(z) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} l(T(t)z)$. Isto implica a existência de um $t' \in [0, t_0]$ tal que $l(T(t')z) = 1$; isto é, $T(t')z \in \Xi^*$. Consequentemente $\omega(z) = \omega(T(t')z) \subset \Xi^*$, o que contradiz o fato que $\omega(z) \subset \Xi$ e assim, se $k(z) = 1$ para algum $z \in \mathcal{A}$ devemos ter que $z \in \Xi^*$. Disto concluímos que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} \subset \Xi^*$ e portanto $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Agora provamos que, se $z \in \mathcal{A}$ e $k(T(t)z) = k(z)$ para todo $t \geqslant 0$ então $z \in \Xi \cup \Xi^*$. Se $z \notin \Xi \cup \Xi^*$, $\omega(z) \subset \Xi$ (note que $z \in \mathcal{A}$) e da definição de k e do fato que $\omega(z)$ atrai z temos que $k(z) = \lim_{t \to \infty} k(T(t)z) = 0$. Como $k^{-1}(0) = \Xi$, z deve pertencer a Ξ o que é uma contradição.

A seguir provamos a continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$. Separamos a prova em três casos:

Caso 1) Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em Ξ^*. Como $l(z) \leqslant k(z) \leqslant 1$, para todo $z \in X$, dado $z_0 \in \Xi^*$ e $z \in X$ temos que

$$|k(z) - k(z_0)| = 1 - k(z) \leqslant 1 - l(z).$$

Isto e a continuidade de $l : X \to \mathbb{R}$ em z_0 implicam a continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em z_0.

Caso 2) Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em Ξ. Da definição de $l : X \to \mathbb{R}$ é fácil ver que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0,\varepsilon)$. Do Lema 1.6.3, existe $\delta' \in (0,\delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, do que concluímos que $k(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset [0,\varepsilon]$.

Caso 3) Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$. Dado $z_0 \in X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$, do Lema 1.6.6 temos que, ou $\lim\limits_{t\to\infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$, ou $\lim\limits_{t\to\infty} d(T(t)z_0, \Xi^*) = 0$.

Se $\lim\limits_{t\to\infty} d(T(t)z_0, \Xi^*) = 0$ provemos a continuidade de k em z_0. Primeiramente note que $k(z_0) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de $l : X \to \mathbb{R}$ em Ξ^* existe uma vizinhança aberta V de Ξ^* em X tal que $l(V) \subset (1-\varepsilon, 1]$. Se $t_0 > 0$ é tal que $T(t_0)z_0 \in V$, da continuidade de $T(t_0) : X \to X$, existe uma vizinhança U de z_0 tal que $T(t_0)U \subset V$. Disto segue que $k(z) > 1-\varepsilon$ para todo $z \in U$ (pois $T(t_0)z \in V$ e portanto $1-\varepsilon < l(T(t_0)z) \leqslant k(z)$). Isto prova a continuidade de k em pontos z_0 of $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ para os quais $\lim\limits_{t\to\infty} d(T(t)z_0, \Xi^*) = 0$.

Se $z_0 \in X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ e $\lim\limits_{t\to\infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$, temos que $l(z_0) > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \frac{l(z_0)}{2})$ e, do Lema 1.6.3, existe um $\delta' \in (0,\delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Seja $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)z_0 \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Da continuidade de $T(t_0) : X \to X$, existe uma vizinhança U_1 de z_0 in X tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Então, para todo $z \in U_1$ e $t \geqslant t_0$ temos que $T(t)z \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Finalmente, da continuidade de l, seja U_2 uma vizinhança de z_0 em X tal que $l(z) > \frac{l(z_0)}{2}$ para todo $z \in U_2$ e escreva $U := U_1 \cap U_2$. Desta forma, para todo $z \in U$ vale que $k(z) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0} l(T(t)z)$. Argumentando como antes, obtemos a continuidade de k em pontos z_0 de $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ para os quais $\lim\limits_{t\to\infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$.

Seja $h : X \to \mathbb{R}$ a função definida no Lema 1.6.15, isto é, $h(z) = \sup\limits_{t\geqslant 0} d(T(t)z, \mathcal{A})$, $z \in X$, e defina $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(z) := k(z) + h(z), \;\; z \in X.$$

A continuidade de $f : X \to \mathbb{R}$ segue da continuidade de k (provada acima) e de h (provada no Lema 1.6.15). Como $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto k(T(t)z)$ e $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)z)$ são decrescentes para cada $z \in X$ (do que foi feito acima e do Lema 1.6.15), f também possui esta propriedade.

Claramente $f(\Xi) = \{0\}$. Por outro lado, se $f(z) = 0$ para algum $z \in X$, então

$h(z) = k(z) = 0$ e devemos ter que $z \in \Xi$. Isto mostra que $f^{-1}(0) = \Xi$.

Além disso, como $f\mid_{\mathcal{A}} = k\mid_{\mathcal{A}}$ temos que $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Finalmente, (iii) é provado da seguinte maneira. Se $z \in X$ tal que $f(T(t)z) = f(z)$ para todo $t \geqslant 0$, então $h(T(t)z) = h(z)$ para todo $t \geqslant 0$ e portanto $h(z) = 0$. Segue que $z \in \mathcal{A}$ e neste caso, temos que $k(T(t)z) = k(z)$. Assim $z \in \Xi \cup \Xi^*$ completando a prova.∎

<u>**Teorema**</u> **1.6.17** *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ e uma família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Então, $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradiente relativamente $\mathbf{\Xi}$ se, e somente se é um semigrupo gradient-like relativamente à $\mathbf{\Xi}$. Além disso, a função de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$ de um semigrupo gradient-like relativo à $\mathbf{\Xi}$ pode ser escolhida de modo que $V(\Xi_m) = m - 1$, $m = 1, \cdots, n$.*

Prova: É claro que um semigrupo gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi}$ é um semigrupo gradient-like relativamente à $\mathbf{\Xi}$.

Suponha que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi}$ reordenada de modo que seja uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$. Seja $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$ a seqüência de atratores locais definida em (1.6.2) e $\varnothing = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \cdots \subset A_0^* = \mathcal{A}$ os repulsores associados de forma que, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$, temos $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

Seja $h : X \to \mathbb{R}$ a função definida no Lema 1.6.15 e $k_j : X \to \mathbb{R}$ a função construída na Proposition 1.6.16 para o par atrator-repulsor A_j, A_j^*, $j = 1, \cdots, n$.

Defina a função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ por

$$V(z) := h(z) + \sum_{j=1}^{n} k_j(z), \ z \in X.$$

Então, $V : X \to \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov e $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradiente relativamente à $\mathbf{\Xi}$.

De fato que, dado $z \in X$, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)z) \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto k_j(T(t)z) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, são decrescentes, segue que $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)z) \in \mathbb{R}$ é também decrescente.

Agora, se $z \in X$ é tal que $V(T(t)z) = V(z)$ para todo $t \geqslant 0$, como $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)z) \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto k_j(T(t)z) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, são decrescentes, concluímos que $f_j(T(t)z) = k_j(T(t)z) + h(T(t)z) = k_j(z) + h(z) = f_j(z)$ para todo $t \geqslant 0$, e para cada $j = 1, \cdots, n$. Da parte (iii) da Proposição 1.6.16, temos que $z \in (A_j \cup A_j^*)$, para cada $j = 0, 1, \cdots, n$; isto é, $z \in \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$. Do Lema 1.6.13 temos que

$$\bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j,$$

e assim, $z \in \bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j$.

Se $m \in \{1, \cdots, n\}$ e $z \in \Xi_m = A_m \cap A_{m-1}^*$, segue que $z \in A_m \subset A_{m+1} \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$ e $z \in A_{m-1}^* \subset A_{m-2}^* \subset \cdots \subset A_0^* = \mathcal{A}$. Logo $k_j(z) = 0$ se $m \leqslant j \leqslant n$ e $k_j(z) = 1$ se $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Assim,

$$V(z) = \sum_{j=1}^{n} k_j(z) = \sum_{j=0}^{m-1} k_j(z) + \sum_{j=m}^{n} k_j(z) = \sum_{j=0}^{m-1} 1 + \sum_{j=m}^{n} 0 = m - 1. \blacksquare$$

É possível construir uma função de Lyapunov que é estritamente decrescente fora dos conjuntos invariantes isolados e que é diferenciável. A seguir daremos condições suficientes para assegurar que um semigrupo gradient-like relativamente a uma família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ tenha uma função de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$, com as mesmas propriedades que aquela do Teorema 1.6.17 e com a propriedade adicional que $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)z \in \mathbb{R}$ é diferenciável para cada $z \in X$ e que é estritamente decrescente sempre que $z \notin \cup_{i=1}^{n} \Xi_i$. De fato provamos o seguinte resultado

Proposição 1.6.18 *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ seja um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Então, existe uma função $W : X \to \mathbb{R}$ que é uma função de Lyapunov para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ e é tal que*

(i) $[0, \infty) \ni t \mapsto W(T(t)z)$ é diferenciável para todo $z \in X$ e

(ii) $[0,\infty) \ni t \mapsto W(T(t)z)$ *é estritamente decrescente sempre que* $z \notin \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$.

Prova: Seja $V : X \to \mathbb{R}$ a função dada no Teorema 1.6.17 e $W : X \to \mathbb{R}$ a função

$$W(z) := \int_0^\infty e^{-t} V(T(t)z)dt.$$

Claramente W está bem definida. Provemos que W tem as propriedades desejadas.

Começamos pela continuidade de W. Note que $W(z) \leqslant V(z)$ para todo $z \in X$. Agora, do fato que o semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é localmente limitado, é fácil ver que, para cada $z \in X$, existe $\epsilon_z > 0$ e $t_1 > 0$ tais que $V(\gamma^+(T(t_1)\mathcal{O}_{\epsilon_z}))$ é limitado. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ e $z' \in X$ escolhemos $\bar{t} > t_1$ e uma vizinhança B de z' tal que,

$$\int_{\bar{t}}^\infty e^{-t} dt < \frac{\varepsilon}{4(M_B + 1)}, \tag{1.6.3}$$

onde $M_B := \sup\{V(T(t)w) : w \in B,\ t \geqslant t_1\} = \sup\{V(T(t_1)w) : w \in B\} \geqslant 0$.

Da continuidade de V e da função $[0,\infty) \times X \mapsto T(t)x \in X$, é fácil ver que existe $\delta > 0$ tal que, se $z \in X$ satisfaz $d(z, z') < \delta$ então,

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-t} \left| V(T(t)z) - V(T(t)z') \right| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto e (1.6.3) mostram que, para $z \in X$ com $d(z, z') < \delta$,

$$|W(z) - W(z')| \leqslant \int_0^{\bar{t}} e^{-t} |V(T(t)z) - V(T(t)z')|\, dt + 2M_B \int_{\bar{t}}^\infty e^{-t} dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Claramente, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto W(T(t)z) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $z \in X$. Agora, se $z \in \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$, temos que $T(t)z \in \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$ para todo $t \geqslant 0$, e $V(T(t)z)$ é constante para todo $t \geqslant 0$, resultando que $W(T(t)z)$ é constante.

Reciprocamente, se $z \in X$ é tal que $W(T(t)z) = \int_0^\infty e^{-s} V(T(t+s)z) ds$ é constante, então $[0,\infty) \ni\mapsto V(T(t)z) \in \mathbb{R}$ é constante e $z \in \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$ das propriedades de V.

Em seguida, dado $z \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$ provemos que $[0,\infty) \ni t \mapsto W(T(t)z)$ é estritamente decrescente para cada $z \in X$. De fato, dado $t > 0$, temos que

$$W(T(t)z) - W(z) = \int_0^\infty e^{-s} [V(T(s+t)z) - V(T(s)z)] ds.$$

Disto vemos que, se para algum $t > 0$ temos que $W(T(t)z) - W(z) = 0$ e $z \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Xi_i$, então $V(T(s+t)z) - V(T(s)z) = 0$ para todo $s \geqslant 0$. Em particular, $V(T(t)z) = V(z)$ e, como uma conseqüência disto, $V(T(t)z) = V(T(s)z) = V(z)$ para todo $s \in [0,t]$. Repetindo este raciocínio concluímos que $V(T(s)z) = V(z)$ para todo $s \geqslant 0$, o que contradiz a escolha de z.

Agora, dado $z \in X$, $t \geqslant 0$ e $h \in \mathbb{R}$ temos que

$$\frac{W(T(t+h)z) - W(T(t)z)}{h} = \frac{e^t}{h}\left[(e^h - 1)\int_{t+h}^{\infty} e^{-s}V(T(s)z)ds - \int_t^{t+h} e^{-s}V(T(s)z)ds\right],$$

que converge para

$$e^t \int_t^{\infty} e^{-s}V(T(s)z)ds - V(T(t)z) \leqslant 0,$$

provando a diferenciabilidade de $[0,\infty) \ni t \mapsto V(T(t)z) \in \mathbb{R}$. ■

1.6.3 Semigrupos gradientes são estáveis por perturbação

A equivalência entre os semigrupos gradientes e os semigrupos gradient-like , mostrada na seção precedente relativos a uma família disjunta de invariantes isolados, juntamente com o Teorema 1.4.23, provam que os semigrupos gradientes relativos a uma família disjunta de invariantes isolados são estáveis por perturbação. Isto é,

Teorema 1.6.19 *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$, uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado.

b) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_\eta$ tem n conjuntos invariantes isolados $\mathbf{\Xi}_\eta = \{\Xi^*_{1,\eta}, \cdots, \Xi^*_{n,\eta}\}$ para todo $\eta \in [0,1]$ e $\sup_{1\leqslant i\leqslant n}[\mathrm{dist}_H(\Xi^*_{i,\eta}, \Xi^*_{i,0}) + \mathrm{dist}_H(\Xi^*_{i,0}, \Xi^*_{i,\eta})] \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente relativamente à $\mathbf{\Xi}_0$.

Então existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \leqslant \eta_0$, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente relativamente à $\mathbf{\Xi}_\eta$.

1.7 Perturbações de semigrupos e funções de Lyapunov

Let X be a metric space and $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta\in[0,1]}$ be a family of semigroups in X that is continuous and collectively asymptotically compact at $\eta = 0$ and satisfies $(a), (b)$ e (c) of Theorem 1.4.17. Assume that $\mathcal{E}_0 = \{y^*_{1,0}, \cdots, y^*_{n,0}\}$ is reordered so that it is a Morse-Decomposition of $\mathscr{A}_0$, as in Theorem 1.6.12 and, for $\eta \in [0,1]$, reorder $\mathcal{E}_\eta = \{y^*_{1,\eta}, \cdots, y^*_{n,\eta}\}$ so that $\sup\limits_{1\leq i\leq n} \mathbf{d}(y^*_{i,\eta}, y^*_{i,0}) \xrightarrow{\eta\to 0^+} 0$. Let $A_{0,\eta} := \varnothing$, $A_{1,\eta} := \{y^*_{1,\eta}\}$ and

$$A_{j,\eta} := A_{j-1,\eta} \cup W^u(y^*_{j,\eta}), \quad j = 2, \cdots, n. \tag{1.7.1}$$

Also, for each $\eta \in [0,1]$, $1 \leq j \leq n$, let

$$A^*_{j,\eta} := \{z \in \mathscr{A}_\eta : \mathbf{dist}(T_\eta(r)z, A_{j,\eta}) \not\to 0 \text{ as } r \to \infty\}. \tag{1.7.2}$$

If we assume these constructions, we can prove the following results:

<u>Lema</u> 1.7.1 *The families, $\{A_{j,\eta}\}_{\eta\in[0,1]}$ and $\{A^*_{j,\eta}\}_{\eta\in[0,1]}$, $1 \leq j \leq n$, defined by* (1.7.1) *and* (1.7.2)*are upper semicontinuous at $\eta = 0$, that is,*

$$\lim_{\eta\to 0^+} \sup_{1\leq j\leq n} \mathbf{dist}(A_{j,\eta}, A_{j,0}) = 0 \quad \textit{and} \tag{1.7.3}$$

$$\lim_{\eta\to 0^+} \sup_{1\leq j\leq n} \mathbf{dist}(A^*_{j,\eta}, A^*_{j,0}) = 0. \tag{1.7.4}$$

Proof: Indeed, thanks to the fact that $A_{j,0}$ and $A^*_{j,0}$ are disjoint compact sets (see Exercício 1.6.2) for all j, we can pick $\varepsilon > 0$ such that, for all $j = 1, 2, \cdots, n$

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A_{j,0}) \cap \mathcal{O}_\varepsilon\left(A^*_{j,0}\right) = \varnothing. \tag{1.7.5}$$

First, we will prove that $\lim\limits_{\eta\to 0^+} \max\limits_{1\leq j\leq n} \mathbf{dist}(A_{j,\eta}, A_{j,0}) = 0$. If this is not true, there exists $\delta \in (0, \varepsilon)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, a sequence $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(0,1]$ with $\eta_k \xrightarrow{k\to\infty} 0^+$ and a sequence $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in X such that, for each $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in A_{j,\eta_k}$ and

$$\mathbf{dist}(x_k, A_{j,0}) \geq \delta. \tag{1.7.6}$$

Now, by the definition of $A_{j,\eta}$, we can assume that there is $i \leq j$, fixed, such that for each natural k, there is a global solution $\xi_k : \mathbb{R} \to X$ for $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ with $\xi_k(0) = x_k$ and

$$\lim_{t \to -\infty} \mathbf{d}(\xi_k(t), y^*_{i,\eta_k}) = 0. \tag{1.7.7}$$

By hypothesis (b), it follows that there exists $\eta_\delta > 0$ such that, for all $\eta \leq \eta_\delta$,

$$\mathbf{dist}(y^*_{i,\eta}, A_{j,0}) < \frac{\delta}{2}.$$

Consequently, by (1.7.6) and (1.7.7), for each k there exists $t_k \in \mathbb{R}$ such that

$$\mathbf{dist}(\xi_k(t), A_{j,0}) < \delta \text{ for all } t < t_k, \quad \text{and} \tag{1.7.8}$$

$$\mathbf{dist}(\xi_k(t_k), A_{j,0}) = \delta. \tag{1.7.9}$$

Thus, we define $\widetilde{\xi}_k : \mathbb{R} \to X$ by $\widetilde{\xi}_k(t) := \xi_k(t + t_k)$, $t \in \mathbb{R}$, and, by Corollary 1.4.14, there is a global solution $\xi : \mathbb{R} \to X$ for $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ such that, for each $R > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{|t| \leq R} \mathbf{d}(\widetilde{\xi}_k(t), \xi(t)) = 0.$$

By (1.7.8), we have that $\mathbf{dist}(\xi(t), A_{j,0}) \leq \delta$ for all $t \leq 0$ so, by (1.7.5), we must have $\xi(0) \in A_{j,0}$, but (1.7.9) means that $\mathbf{dist}(\xi(0), A_{j,0}) = \delta$. This contradiction proves (1.7.3).

Now, we prove that $\lim_{\eta \to 0^+} \max_{1 \leq j \leq n} \mathbf{dist}(A^*_{j,\eta}, A^*_{j,0}) = 0$. If it does not hold, there exist $\delta \in (0, \varepsilon)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, a sequence $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $(0, 1]$ with $\eta_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ and a sequence $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in X such that, for each $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in A^*_{j,\eta_k}$ and

$$\mathbf{dist}(x_k, A^*_{j,0}) \geq \delta. \tag{1.7.10}$$

Now, by the definition of $A^*_{j,\eta}$ (and Theorem 1.4.17), we can assume that there is $i \geq j + 1$, fixed, such that for each $k \in \mathbb{N}$, there is a global solution $\xi_k : \mathbb{R} \to X$ for $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ with $\xi_k(0) = x_k$ and

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{d}(\xi_k(t), y^*_{i,\eta_k}) = 0. \tag{1.7.11}$$

On the other hand, (b) implies the existence of $\eta_\delta^* > 0$ such that, for all $\eta \le \eta_\delta^*$,

$$\mathbf{dist}(y_{i,\eta}^*, A_{j,0}^*) < \frac{\delta}{2},$$

whence, by (1.7.10) and (1.7.11), for each $k \in \mathbb{N}$, there exists $t_k \in \mathbb{R}$ such that

$$\mathbf{dist}(\xi_k(t), A_{j,0}^*) < \delta \text{ for all } t > t_k, \tag{1.7.12}$$

$$\mathbf{dist}(\xi_k(t_k), A_{j,0}^*) = \delta. \tag{1.7.13}$$

Thus, we define $\widetilde{\xi}_k : \mathbb{R} \to X$ by $\widetilde{\xi}_k(t) := \xi_k(t + t_k)$, $t \in \mathbb{R}$, and, by Corollary 1.4.14, we can assume that there is a global solution $\xi : \mathbb{R} \to X$ for the semigroup $\{T_0(t) : t \ge 0\}$ such that, for each $R > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|t|\le R} \mathbf{d}(\widetilde{\xi}_k(t), \xi(t)) = 0.$$

By (1.7.12) we have that $\mathbf{dist}(\xi(t), A_{j,0}^*) \le \delta$ for all $t > 0$ and, as a consequence of (1.7.5), we must have $\xi(0) \in A_{j,0}^*$. But (1.7.13) implies that, and $\mathbf{dist}(\xi(0), A_{j,0}^*) = \delta$. This contradiction proves (1.7.4) and completes the proof of the lemma. ■

Lema 1.7.2 *If the families of local unstable sets $\{W_{\eta,\rho}^u(\xi_j^*)\}_{\eta\in[0,1]}$ behave lower semicontinuously, then the families of $A_{j,\eta}$ behave lower semicontinuously as $\eta \to 0^+$, that is,*

$$\lim_{\eta\to 0^+} \mathbf{dist}(A_{j,0}, A_{j,\eta}) = 0.$$

If the families of local stable sets $\{W_{\eta,\rho}^s(\xi_j^*) \cap \mathscr{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ behave lower semicontinuously and $T_\eta(t) : \mathscr{A}_\eta \to \mathscr{A}_\eta$ is injective for each $t \ge 0$, $\eta \in [0,1]$, then

$$\lim_{\eta\to 0^+} \mathbf{dist}(A_{j,0}^*, A_{j,\eta}^*) = 0.$$

Proof: It follows analogously to the proof of Theorem 1.2.6. ■

Next we exhibit an example (pictorial) for which we have lower semicontinuity of repellers but for which we do not have structural stability. The purpose of this example is to show that the systems which satisfy the hypothesis imposed in the last part of Lemma 1.7.2 are a larger class than that of the structurally stable systems.

Below, the figure labelled 0i.a corresponds to the perturbed attractor-repeller pair $(A_{i,\eta}, A^*_{i,\eta})$ with $A_{i,\eta}$ pictured in black and $A^*_{i,\eta}$ pictured in red, $0 \leq i \leq 5$. The figure labelled 0i.b corresponds to the limiting attractor-repeller (A_i, A^*_i) pair with A_i pictured in black and A^*_i pictured in red, $1 \leq i \leq 5$. Of course $A_{5,\eta}$ $(A^*_{0,\eta})$ and A_5 (A^*_0) correspond to the global attractor whereas $A^*_{5,\eta}$ $(A_{0,\eta})$ and A^*_5 (A_0) correspond to the empty set.

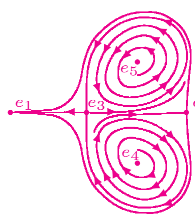


Figure 00.a

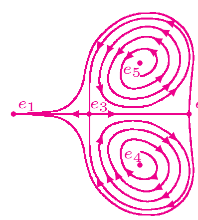


Figure 00.b

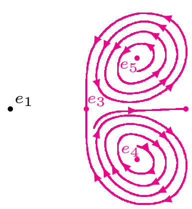


Figure 01.a

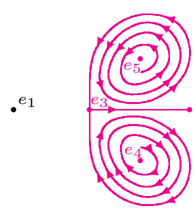


Figure 01.b

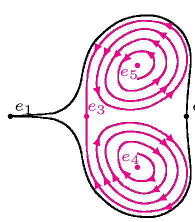


Figure 02.a

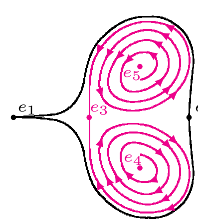


Figure 02.b

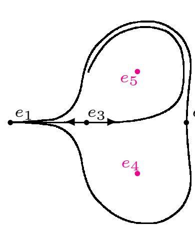


Figure 03.a

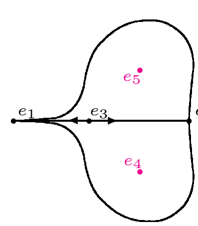


Figure 03.b

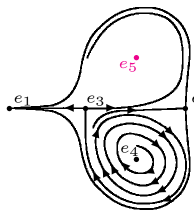


Figure 04.a

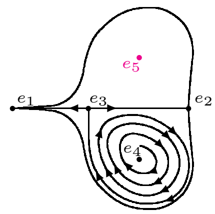


Figure 04.b

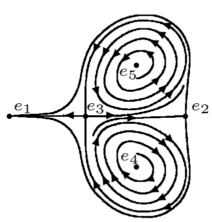


Figure 05.a

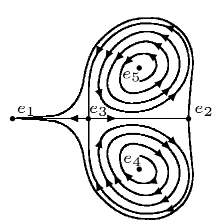


Figure 05.b

Proposição 1.7.3 *There exists $\varepsilon > 0$ and $\eta_0 > 0$ such that*

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A_{j,\eta}) \cap \mathcal{O}_\varepsilon\left(\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,\eta}\}\right) = \varnothing$$

for each $j = 1, 2, \cdots, n-1$ and $\eta \in [0, \eta_0]$.

Proof: Indeed, as in the proof of Theorem 1.6.12, we can take $\varepsilon > 0$ such that, for each $j = 1, 2, \cdots, n-1$ and $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{O}_{2\varepsilon}(A_{j,0}) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon}\left(\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,0}\}\right) = \varnothing. \tag{1.7.14}$$

We note that the proposition will be accomplished if we show the following stronger conditions:

For each $\delta \in (0, \varepsilon]$ there is $\eta_\delta > 0$ such that

$$A_{j,\eta} \subset \mathcal{O}_\delta(A_{j,0}) \tag{1.7.15}$$

and

$$\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,\eta}\} \subset \mathcal{O}_\delta\left(\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,0}\}\right) \tag{1.7.16}$$

for all $j = 1, 2, \cdots, n-1$ and $\eta \in [0, \eta_\delta]$.

Clearly (1.7.16) follows from hyphotesis (b), and (1.7.15) is a direct consequence from (1.7.3) in Lemma 1.7.1. This completes the proof of the proposition. ■

Using Proposition 1.7.3 we can show that the sets $A_{j,\eta}$, defined above, are all local attractors for all suitably η. This is proved in the following proposition.

Proposição 1.7.4 *There exists $\eta_0 > 0$ such that the invariant family $A_{j,\eta}$ is a local attractor for the evolution process $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$, for each $j = 1, 2, \cdots, n$ and $\eta \in (0, \eta_0]$.*

Proof: Indeed, by Lemma 1.7.1 and the proof of Proposition 1.7.3, we can choose $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \varepsilon]$ and $\eta_0 > 0$ such that

$$A_{j,\eta} \subset \mathcal{O}_\delta(A_{j,0})$$

and

$$\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,\eta}\} \subset \mathcal{O}_\delta \left(\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,0}\} \right)$$

for each $j = 1, 2, \cdots, n-1$ and $\eta \in [0, \eta_0]$, where $\varepsilon > 0$ satisfies

$$\mathcal{O}_{2\varepsilon}(A_{j,0}) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon} \left(\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,0}\} \right) = \varnothing.$$

It follows that $A_{j,\eta} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A_{j,0})$ for $j = 1, 2, \cdots, n-1$ and $\eta \in [0, \eta_0]$, and therefore

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A_{j,\eta}) \cap \mathcal{O}_\varepsilon \left(\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,\eta}\} \right) = \varnothing \tag{1.7.17}$$

for each $j = 1, 2, \cdots, n-1$ and $\eta \in [0, \eta_0]$.

Now, for a fixed $\eta \in [0, \eta_0]$, let $\xi_\eta : \mathbb{R} \to X$ be a global solution for $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ with $\xi_\eta(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(A_{j,\eta})$ for all $t \in \mathbb{R}$ and, recalling that $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ is a gradient-like semigroup with respect to $\mathcal{E}_\eta = \{y^*_{1,\eta}, \cdots, y^*_{n,\eta}\}$ for $\eta \in [0, \eta_0]$ (by Theorem 1.4.17), let $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ such that

$$\lim_{t \to -\infty} \mathbf{d}(\xi_\eta(t), y^*_{i,\eta}) = 0.$$

By (1.7.17), we must have $i \leq j$, so $\xi_\eta(t) \in W^u(y^*_{i,\eta}) \subset A_{j,\eta}$ which tells us that the family $A_{j,\eta}$ is invariant and isolated for each $j = 1, 2, \cdots, n$ and $\eta \in [0, \eta_0]$.

On the other hand, let $\xi_\eta : \mathbb{R} \to X$ be a global solution for $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ with $\eta \in [0, \eta_0]$ and $\lim_{t \to -\infty} \mathbf{dist}(\xi_\eta(t), A_{j,\eta}) = 0$. If t_0 is such that $\mathbf{dist}(\xi_\eta(t), A_{j,\eta}) < \varepsilon$ for $t \leq t_0$, as $\mathcal{O}_\varepsilon(A_{j,\eta}) \cap \mathcal{O}_\varepsilon \left(\bigcup_{i=j+1}^{n} \{y^*_{i,\eta}\} \right) = \varnothing$, using the above reasoning, we must have $\xi_\eta(t) \in A_{j,\eta}$ for all $t \in \mathbb{R}$, which shows that $W^u(A_{j,\eta}) \subset A_{j,\eta}$. Now, the inclusion $A_{j,\eta} \subset W^u(A_{j,\eta})$, holds thanks to the invariance of the family $A_{j,\eta}$, showing that $W^u(A_{j,\eta}) = A_{j,\eta}$ and completing the proof of the proposition. ∎

The separation property between the local attractor and its repeller is satisfied uniformly for the perturbations of a gradient-like semigroup, this is what we will show in the next proposition.

Proposição 1.7.5 *There are $\varepsilon > 0$ and $\eta_0 > 0$ such that, for all $j = 1, 2, \cdots, n$ and $\eta \in [0, \eta_0]$, we have*

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A_{j,\eta}) \cap \mathcal{O}_\varepsilon\left(A^*_{j,\eta}\right) = \varnothing.$$

Proof: Indeed, thanks to the fact that $A_{j,0}$ and $A^*_{j,0}$ are disjoint compact sets (see Exercício 1.6.2) for all j, we can choose $\varepsilon > 0$ such that, for all $j = 1, 2, \cdots, n$

$$\mathcal{O}_{2\varepsilon}(A_{j,0}) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon}\left(A^*_{j,0}\right) = \varnothing. \tag{1.7.18}$$

By Lemma 1.7.3, for each $\delta \in (0, \varepsilon]$, there is $\eta_\delta > 0$ such that

$$A_{j,\eta} \subset \mathcal{O}_\delta(A_{j,0})$$

and

$$A^*_{j,\eta} \subset \mathcal{O}_\delta(A^*_{j,0}), \tag{1.7.19}$$

for every $\eta \in [0, \eta^*_\delta]$, and $j = 1, 2, \cdots, n$ and the result follows. ■

Teorema 1.7.6 *There exists $\eta_0 > 0$ such that for all $\eta \in (0, \eta_0]$ and $j = 1, 2, \cdots, n$*

$$A_{j,\eta} \cap A^*_{j-1,\eta} = \{y^*_{j,\eta}\},$$

that is, the set $\mathcal{E}_\eta = \{y^*_{1,\eta}, \cdots, y^*_{n,\eta}\}$ determines a Morse decomposition of the global attractor $\{\mathscr{A}_\eta\}$ for $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ for each $\eta \in (0, \eta_0]$. In particular, such Morse-Decomposition behaves continuously.

Proof: Indeed, it is clear that $y^*_{j,\eta} y \in W^u(\xi^*_{j,\eta}) y \subset A_{j,\eta} y$ for each $1 \leq j \leq n$ and $\eta \in [0, 1]$. Now, using Proposition 1.7.3, let $\varepsilon > 0$ and $\eta_0 > 0$ be such that, for all $2 \leq j \leq n$ and $\eta \in [0, \eta_0]$, we have

$$\mathcal{O}_{2\varepsilon}(A_{j-1,\eta}) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon}\left(\bigcup_{i=j}^{n} \{y^*_{i,\eta}\}\right) = \varnothing. \tag{1.7.20}$$

From (1.7.20) $\mathbf{dist}(T_\eta(r) y^*_{j,\eta}, A_{j-1,\eta}) = \mathbf{dist}(y^*_{j,\eta}, A_{j-1,\eta}) \geq \varepsilon$ for all $r \geq 0$. Hence $y^*_{j,\eta} \in A^*_{j-1,\eta}$. Therefore, $\{y^*_{j,\eta}\} \subset A_{j,\eta} \cap A^*_{j-1,\eta}$ for every $\eta \in (0, \eta_0]$ and $1 \leq j \leq n$.

Conversely, we note that, by Lemma 1.7.1, given $\delta \in (0,\varepsilon]$ there exists $\eta_\delta > 0$ such that for all $\eta \in (0,\eta_\delta]$ and $1 \leq j \leq n$ we have that

$$A_{j,\eta} \cap A^*_{j-1,\eta} \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_{j,0}) \cap \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}\left(A^*_{j-1,0}\right).$$

Now, if the statement

$$A_{j,\eta} \cap A^*_{j-1,\eta} \subset \{\xi^*_{j,\eta}\}\ 1 \leq j \leq n \text{ and for all } \eta > 0 \text{ suitably small}$$

does not hold, there are $1 \leq j \leq n$, a sequence $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(0,1]$ with $\eta_k \to 0^+$, a sequence $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in X with $z_k \in A_{j,\eta_k} \cap A^*_{j-1,\eta_k}$ but $z_k \neq y^*_{j,\eta_k}$ for all $k \in \mathbb{N}$. Hence, for each $k \in \mathbb{N}$, there exists a global solution $\xi_k : \mathbb{R} \to X$ for $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ with $\xi_k(0) = z_k$ and, we can assume that, there are $i \leq j$ and $l \geq j$, fixed, with

$$\lim_{t\to-\infty} \mathbf{d}(\xi_k(t), y^*_{i,\eta_k}) = 0 \text{ and } \lim_{t\to\infty} \mathbf{d}(\xi_k(t), y^*_{l,\eta_k}) = 0.$$

Moreover, $\xi_k \in \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_{j,0}) \cap \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}\left(A^*_{j-1,0}\right)$ for each $k \in \mathbb{N}$. Therefore, if we choose, for suitably large k and σ_k with

$$\mathbf{d}(\xi_k, y^*_{i,0}) < \frac{\delta}{2} \text{ for } t \leq \tau_k \text{ and } \mathbf{d}(\xi_k(t), y^*_{l,0}) < \frac{\delta}{2} \text{ for } t \geq \sigma_k,$$

we must have $y^*_{i,0},\ y^*_{l,0} \in \mathcal{O}_\delta(A_{j,0}) \cap \mathcal{O}_\delta\left(A^*_{j-1,0}\right)$. Then, by (1.7.20), $i = l = j$, that is, $y^*_{i,0} = y^*_{l,0} = y^*_{j,0}$, thus $y^*_{i,\eta_k} = y^*_{l,\eta_k} = y^*_{j,\eta_k}$, which means that the solution $\xi_k : \mathbb{R} \to X$ is a homoclinic solution (because $z_k \neq y^*_{j,\eta_k}$ for every k), contradicting the fact that $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ is gradient-like with respect to $\mathcal{E}_{\eta_k} = \{y^*_{1,\eta_k}, \cdots, y^*_{n,\eta_k}\}$, completing the proof. ■

Lema 1.7.7 *Let $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta\in[0,1]}$ be a family of semigroups in a metric space X, which is continuous and collectively compact at $\eta = 0$ and satisfies condition (a) of Theorem 1.4.17. Let $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ such that $A_\eta \subset \mathscr{A}_\eta$ with A_0 a local attractor for the semigroup $\{T_0(t) : t \geq 0\}$.*

If $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ is continuous at $\eta = 0$, that is,

$$\lim_{\eta\to 0^+} \mathbf{d}_H(A_\eta(t), A_0) = 0,$$

given $\delta \in (0,\varepsilon)$ there exist $\delta' \in (0,\delta)$ and $\eta_\delta > 0$ such that

$$T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A_\eta)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_\eta), \quad \textit{for all} \;\; t \geq 0, \;\; \eta \in [0,\eta_\delta]\,.$$

Proof: If not, there are $\delta > 0$ and sequences $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in X, $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $(0,1]$, $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ such that $\eta_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0^+$, $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\mathbf{dist}(z_j, A_{\eta_j}) < \frac{1}{j}$ for all j,

$$\mathbf{dist}(T_{\eta_j}(t)z_j, A_{\eta_j}) < \delta \text{ for all } t \in [0,t_j) \text{ and all } j \in \mathbb{N}$$

and

$$\mathbf{dist}(T_{\eta_j}(t_j)z_j, A_{\eta_j}) = \delta \text{ for all } j \in \mathbb{N}.$$

If, for each j, we now define $\xi_j : [-t_j,\infty) \to X$ by $\xi_j(t) := T_{\eta_j}(t+t_j)z_j$, from the continuity and collective asymptotic compactness at $\eta = 0$, it is not difficult to see that there exists a bounded global solution $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ for $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ and a subsequence of $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, denoted the same, such that, $\xi_0(t) = \lim_{j\to\infty} \xi_j(t)$, for all $t \in \mathbb{R}$.

On the other hand, given $t < 0$, for all j big enough it holds

$$\mathbf{dist}(\xi_j(t), A_0) \leq \mathbf{dist}(\xi_j(t), A_{\eta_j}) + \mathbf{dist}(A_{\eta_j}, A_0),$$

from where, by the upper-semicontinuity of $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, we obtain that for all $t < 0$

$$\mathbf{dist}(\xi_0(t), A_0) \leq \delta,$$

and from $\delta = \mathbf{dist}(\xi_j(0), A_{\eta_j}) \leq \mathbf{dist}(\xi_j(0), A_0) + \mathbf{dist}(A_0, A_{\eta_j})$, by the lower semicontinuity of $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, it follows that $\mathbf{dist}(\xi_0(0), A_0) = \delta$.

But, as $\delta < \varepsilon$, then A_0 attracts $K = \{\xi_0(t) : t \leq 0\}$, which contradicts the fact that $\mathbf{dist}(\xi_0(0), A_0) = \delta$. ∎

Proposição 1.7.8 *Assume that the families of local unstable sets* $\{W^u_{\eta,\rho}(\xi^*_j)(t)\}_{\eta\in[0,1]}$ *is lower semicontinuous at* $\eta = 0$.

Then, there exists $\eta_0 > 0$ *such that for every* $\eta \in [0, \eta_0]$ *and every* $j = 1, 2, \cdots, n$ *the local atractor* $A_{j,\eta}$ *satisfies that, for each* $\delta \in (0, \varepsilon)$ *there is* $\delta' \in (0, \delta)$ *such that*

$$T(t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A_{j,\eta})) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A_{j,\eta}), \text{ whenever } t \geq 0.$$

with the neighborhoods of $A_{j,\eta}$ *are taken in* X.

Proof: Indeed, we fix $\delta_1 \in (0, \varepsilon)$, $\eta_1 > 0$ and $\delta'_1 \in (0, \delta_1)$ such that the conclusion of Lemma 1.7.7 holds, that is, for every $\eta \in [0, \eta_1]$ and each $j = 1, 2, \cdots, n$, we have

$$T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\delta'_1}(A_{j,\eta})) \subset \mathcal{O}_{\delta_1}(A_{j,\eta}) \text{ whenever } t \geq 0. \tag{1.7.21}$$

On the other hand, from Lemma 1.7.2, there are $0 < \delta'_3 < \delta'_2 < \delta'_1$ and $\eta_2 \in (0, \eta_1]$ such that $\mathcal{O}_{\delta'_3}(A_{j,\eta}) \subset \mathcal{O}_{\delta'_2}(A_{j,0}) \subset \mathcal{O}_{\delta'_1}(A_{j,\eta})$ for each $\eta \in [0, \eta_2]$, $j = 1, 2, \cdots, n$. Hence, by (1.7.21), $\omega_\eta(\mathcal{O}_{\delta'_2}(A_{j,0}))$[1] $\subset \mathcal{O}_{\delta_1}(A_{j,\eta})$ for all $\eta \in [0, \eta_2]$ and $j = 1, 2, \cdots, n$.

It is clear that $\omega_\eta(\mathcal{O}_{\delta'_2}(A_{j,0}))$ is contained in $A_{j,\eta}$, otherwise, there would be a global solution $\xi : \mathbb{R} \to X$ with $\xi(t) \in \mathcal{O}_{\delta_1}(A_{j,\eta})$ and such that $\xi(t_0) \notin A_{j,\eta}$ for some $t_0 \in \mathbb{R}$, but that contradicts the result of Proposition 1.7.5.

Now $\omega_\eta(\mathcal{O}_{\delta'_2}(A_{j,0}))$ attracts pullback $\mathcal{O}_{\delta'_2}(A_{j,0})$ and, given $\delta > 0$ there exists $\tau_0 > 0$ such that

$$T_\eta(\tau)\mathcal{O}_{\delta'_3}(A_{j,\eta}) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A_{j,\eta})$$

for all $\tau \geq \tau_0$.

From the continuity of semigroup, choose $\delta' \in (0, \min\{\delta, \delta'_3\})$ such that

$$T_\eta(\tau)\mathcal{O}_{\delta'}(A_{j,\eta}) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A_{j,\eta})$$

for all $\tau \in [0, \tau_0]$.

[1] $\omega_\eta(\mathcal{O}_{\delta'_2}(A_{j,0}))$ indicates the ω-limit set of $\mathcal{O}_{\delta'_2}(A_{j,0})$ with respect to the semigroup $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$.

This completes the proof of the proposition. ■

We now conclude that the class of perturbations of a gradient-like semigroups satisfiy all the hypothesis that we have used to develop the abstract framework in the previous section. We can therefore state the following:

Teorema 1.7.9 *There exists $\eta_0 > 0$ such that for all $\eta \in [0, \eta_0]$ the n-upla $(y^*_{1,\eta}, \cdots, y^*_{n,\eta})$, determines a Morse-Decomposition for the global attractor of $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$. Furthermore, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ is a gradient evolution process with respect to the set $\mathcal{E}_\eta = \{y^*_{1,\eta}, \cdots, y^*_{n,\eta}\}$, of isolated equilibria, in the sense of Definition 1.4.19, with Lyapunov function $V_\eta : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ continuous in both variables and satisfying $V_\eta(y^*_{i,\eta}) = i - 1$ and $i = 1, \cdots, n$.*

1.7.1 Convergência de Funções de Lyapunov

Now, we study the continuity of the Lyapunov functions V_η as η tends to zero.

Teorema 1.7.10 *Suppose that $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, $\{A^*_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, and $\{\mathscr{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ are continuous at $\eta = 0$, that is,*

$$\lim_{\eta\to 0^+} \mathbf{d}_H(A_\eta, A_0) = 0$$

$$\lim_{\eta\to 0^+} \mathbf{d}_H(A^*_\eta, A^*_0) = 0$$

$$\lim_{\eta\to 0^+} \mathbf{d}_H(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) = 0.$$

For each $\eta \in [0, 1]$, let $f_\eta : X \to \mathbb{R}$ be the Lyapunov function associated to the attractor repeller pair (A_η, A^*_η) defined by

$$f_\eta(z) := k_\eta(z) + h_\eta(z),\ z \in X,$$

where

$$h_\eta(z) := \sup_{r\geq 0} \mathbf{dist}(T_\eta(r)z, \mathscr{A}_\eta),\ z \in X,$$

$$k_\eta(z) := \sup_{r\geq 0} \frac{\mathbf{dist}(z, A_\eta)}{\mathbf{dist}(z, A_\eta) + \mathbf{dist}(z, A^*_\eta)},\ z \in X.$$

Then, for each compact subset K of X we have

$$\lim_{\eta\to 0^+}\sup_{z\in K}|f_\eta(z)-f_0(z)|=0.$$

Proof: We split the proof into three steps:

Step 1: We have the following convergence

$$\lim_{\eta\to 0^+}\sup_{z\in X}|l_\eta(z)-l_0(z)|=0.$$

Note that, for each $\eta\in[0,1]$ and $z\in X$

$$|\mathbf{dist}(z,A_\eta)-\mathbf{dist}(z,A_0)|\leq \mathbf{d}_H(A_\eta,A_0) \tag{1.7.22}$$

and

$$\left|\mathbf{dist}(z,A_\eta^*)-\mathbf{dist}(z,A_0^*)\right|\leq \mathbf{d}_H(A_\eta^*,A_0^*). \tag{1.7.23}$$

Now, given $\eta\in[0,1]$ and $z\in X$, we have

$$l_\eta(z)-l_0(z)=\frac{[\mathbf{dist}(z,A_\eta)-\mathbf{dist}(z,A_0)]\mathbf{dist}(z,A_0^*)+\mathbf{dist}(z,A_0)[\mathbf{dist}(z,A_0^*)-\mathbf{dist}(z,A_\eta^*)]}{[\mathbf{dist}(z,A_\eta)+\mathbf{dist}(z,A_\eta^*)][\mathbf{dist}(z,A_0)+\mathbf{dist}(z,A_0^*)]}.$$

Since $\mathbf{d}(A_0,A_0^*)>\mu$ for some $\mu>0$, using that the families of local attractors and their corresponding repellers are continuous, there exists $\tilde\eta\in(0,1]$ such that $\mathbf{d}(A_\eta,A_\eta^*)\geq\mu$, for all $\eta\in[0,\tilde\eta]$. From (1.7.22) and (1.7.23)

$$\begin{aligned}|l_\eta(t,z)-l_0(z)|&\leq\frac{1}{\mathbf{dist}(z,A_\eta)+\mathbf{dist}(z,A_\eta^*)}[\mathbf{d}_H(A_\eta(t),A_0)+\mathbf{d}_{\mathrm{H}}(A_\eta^*,A_0^*)]\\&\leq\frac{1}{\mu}[\mathbf{d}_H(A_\eta,A_0)+\mathbf{d}_H(A_\eta^*,A_0^*)],\end{aligned}$$

for each $z\in X$ and $\eta\in[0,\tilde\eta]$. Hence

$$|l_\eta(z)-l_0(z)|\leq\frac{1}{\mu}[\mathbf{d}_H(A_\eta,A_0)+\mathbf{d}_H(A_\eta^*,A_0^*)],$$

for all $z\in X$ and $\eta\in[0,\tilde\eta]$. From the continuity assumptions (on the local attractors and corresponding repellers) the uniform convergence (in X) of l_η to l_0 follows.

Step 2: For every compact $K \subset X$ we have

$$\lim_{\eta\to 0^+} \sup_{z\in K} |k_\eta(z) - k_0(z)| = 0.$$

Indeed, given $z \in X$ we know, by Lemma 1.6.6, that $S(t)z \to A_0 \cup A_0^*$, then, consider the following three cases:

Case 1: $S(t)z \stackrel{t\to\infty}{\to} A_0$ with $l_0(z) > 0$.

Choose $0 < \theta < l_0(z)$. Since $l_0 : X \to \mathbb{R}$ is continuous, there is a $\sigma_1 > 0$ such that $l_0(\mathcal{O}_{\sigma_1}(z)) \subset (\frac{\theta}{2}, 1]$. From Step 1, there is a $\eta_0 \in (0, 1]$ such that $l_\eta(\mathcal{O}_{\sigma_1}(z)) \subset (\theta, 1]$ for all $\eta \in [0, \eta_0]$ and $t \in \mathbb{R}$.

Using again the continuity of $l_0 : X \to \mathbb{R}$, given $0 < \alpha < \frac{\theta}{2}$, there is a $\delta > 0$ such that $l_0(\mathcal{O}_\delta(A_0)) \subset [0, \alpha)$. Now, from Lemma 1.7.7, there is a $\delta' \in (0, \frac{\delta}{2})$ and $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ such that

$$T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A_\eta)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta) \text{ whenever } t \geq 0,\ \forall \eta \in [0, \eta_1]. \tag{1.7.24}$$

From the lower semicontinuity of $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ at $\eta = 0$, there is $\eta_2 \in (0, \eta_1]$ such that

$$A_0 \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta'}{2}}(A_\eta),\ \forall \eta \in [0, \eta_2]. \tag{1.7.25}$$

From the fact that $T_0(t)z \stackrel{t\to\infty}{\to} A_0$, choose $t_0 > 0$ such that $T_0(t_0)z \in \mathcal{O}_{\frac{\delta'}{4}}(A_0)$, and from the continuity of $T_0(t_0) : X \to X$ choose $\sigma_2 \in (0, \sigma_1]$ such that $T_0(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(z)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta'}{4}}(A_0)$. From the continuity of the family of semigroups at $\eta = 0$ we can find $\sigma_3 \in (0, \sigma_2]$ and $\eta_3 \in (0, \eta_2]$ such that for all $\eta \in [0, \eta_3]$ we have $T_\eta(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_3}(z)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta'}{2}}(A_0)$. From this and (1.7.25), we obtain that $T_\eta(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_3}(z)) \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A_\eta)$ when $\eta \in [0, \eta_3]$, and from (1.7.24), in particular, we conclude that

$$T_\eta(t)((\mathcal{O}_{\sigma_3}(z)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta) \text{ for all } t \geq t_0,\ \eta \in [0, \eta_3]. \tag{1.7.26}$$

On the other hand, observe that, from the uniform convergence of $l_\eta \stackrel{\eta\to 0^+}{\to} l_0$ in X, we obtain $\eta_4 \in (0, \eta_3]$ so that, for each $\eta \in [0, \eta_4]$, it holds $l_\eta(\mathcal{O}_\delta(A_0)) \subset [0, 2\alpha)$. From the upper semicontinuity of $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ at $\eta = 0$, there exists $\eta_5 \in (0, \eta_4]$ such that, if

$\eta \in [0, \eta_5]$, then $A_\eta \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_0)$. Therefore, $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta) \subset \mathcal{O}_\delta(A_0)$ for all $\eta \in [0, \eta_5]$. So $l_\eta(\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta)) \subset [0, 2\alpha)$ for all $\eta \in [0, \eta_5]$. From (1.7.26), we have that

$$\sup_{t \geq t_0} l_\eta(T_\eta(t)w) \leq 2\alpha < \theta < l_\eta(w) \leq k_\eta(w),$$

for each $\eta \in [0, \eta_5]$, and $w \in \mathcal{O}_{\sigma_3}(z) \subset \mathcal{O}_{\sigma_1}(z)$. Consequently $k_\eta(w) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l_\eta(T_\eta(t)w)$ for all $\eta \in [0, \eta_5]$ and $w \in \mathcal{O}_{\sigma_3}(z)$.

Finally, given $\varepsilon > 0$, from Step 1, there exists $\eta_6 \in (0, \eta_5]$ such that

$$|l_\eta(x) - l_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for all } \eta \in [0, \eta_6],\ x \in X \text{ and } t \in \mathbb{R}.$$

From the uniform continuity of the function $l_0 : X \to \mathbb{R}$, consider $\beta > 0$ such that if $x, x' \in X$ satisfy $\mathbf{d}(x, x') < \beta$ then $|l_0(x) - l_0(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ so that, by the continuity of the family of semigroups at $\eta = 0$, we can choose $\eta_7 \in (0, \eta_6]$ and $\sigma_4 \in (0, \sigma_3]$ such that

$$\sup_{w \in \mathcal{O}_{\sigma_4}(z)} \sup_{0 \leq t \leq t_0} \mathbf{d}(T_\eta(t)w, T_0(t)w) < \beta \text{ for all } \eta \in [0, \eta_7].$$

Thus

$$|l_\eta(T_\eta(t)w) - l_0(T_0(t)w)| \leq$$

$$|l_\eta(T_\eta(t)w) - l_0(T_\eta(t)w)| + |l_0(T_\eta(t)w) - l_0(T_0(t)w)| < \varepsilon,$$

for all $w \in \mathcal{O}_{\sigma_4}(z)$, $t \in [0, t_0]$ and $\eta \in [0, \eta_7]$. This implies that

$$\sup_{w \in \mathcal{O}_{\sigma_4}(z)} |k_\eta(w) - k_0(w)| \leq \varepsilon \text{ for all } \eta \in [0, \eta_7], \tag{1.7.27}$$

where $\sigma_4 > 0$ and η_7 only depends on $z \in X$ and $\varepsilon > 0$.

Case 2: $l_0(z) = 0$.

Under these conditions, note that $z \in A_0$ and, consequently, $k_0(z) = 0$.

Given $\varepsilon > 0$, by the continuity of $l_0 : X \to \mathbb{R}$, take $\delta > 0$ such that $l_0(\mathcal{O}_\delta(A_0)) \subset [0, \frac{\varepsilon}{4})$.

Now, the uniform convergence of $(l_\eta)_{\eta \in [0,1]}$ to l_0 in $\mathbb{R} \times X$ implies the existence of $\eta_0 \in (0, 1]$ such that

$$l_\eta(\mathcal{O}_\delta(A_0)) \subset [0, \frac{\varepsilon}{2}) \text{ for each } \eta \in [0, \eta_0]. \tag{1.7.28}$$

By the upper semicontinuity of $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ at $\eta=0$, we have the existence of $\eta_1\in(0,\eta_0]$ such that for all $\eta\in[0,\eta_1]$ we have $A_\eta\subset\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_0)$, from which $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta)\subset\mathcal{O}_\delta(A_0)$ if $\eta\in[0,\eta_1]$. And from (1.7.28) we conclude that for all $\eta\in[0,\eta_1]$

$$l_\eta(\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta))\subset[0,\frac{\varepsilon}{2}). \tag{1.7.29}$$

Choose $\eta_2\in(0,\eta_1]$ and $\delta'\in(0,\frac{\delta}{2})$, by Lemma 1.7.7, such that

$$T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A_\eta))\subset\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta) \text{ for all } t\geq 0 \text{ and } \eta\in[0,\eta_2]. \tag{1.7.30}$$

Finally, from the lower semicontinuity of $\{A_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ at $\eta=0$, there is a $\eta_3\in(0,\eta_2]$ such that

$$A_0\subset\mathcal{O}_{\frac{\delta'}{2}}(A_\eta) \text{ for all } \eta\in[0,\eta_3]. \tag{1.7.31}$$

Thus, from (1.7.31) and (1.7.30), for $\eta\in[0,\eta_3]$, for $s\in\mathbb{R}$ and $w\in\mathcal{O}_{\frac{\delta'}{2}}(A_0)\subset\mathcal{O}_{\delta'}(A_\eta)$, we have that $T_\eta(t)w\in\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_\eta)$ for all $t\geq 0$. From (1.7.29) it follows that

$$k_\eta(w)=\sup_{t\geq 0} l_\eta(T_\eta(t)w)\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

for all $\eta\in[0,\eta_3]$ and $w\in\mathcal{O}_{\frac{\delta'}{2}}(A_0)$. In particular,

$$\sup_{w\in\mathcal{O}_{\frac{\delta'}{2}}(A_0)}|k_\eta(w)-k_0(w)|\leq\varepsilon \text{ for all } \eta\in[0,\eta_3], \tag{1.7.32}$$

where $\delta'>0$ and η_3 only depend on $\varepsilon>0$ and A_0.

Case 3: $T_0(t)z\overset{t\to\infty}{\to}A_0^*$.

In this case $k_0(z)=1$. By the continuity of $l_0:X\to\mathbb{R}$, given $\varepsilon>0$, let $\delta>0$ such that

$$l_0(\mathcal{O}_\delta(A_0^*))\subset(1-\frac{\varepsilon}{4},1]$$

and, by the uniform convergence $l_\eta\overset{\eta\to 0^+}{\to}l_0$ in $\mathbb{R}\times X$, take $\eta_0\in(0,1]$ such that

$$l_\eta(\mathcal{O}_\delta(A_0^*))\subset(1-\frac{\varepsilon}{2},1] \text{ for all } \eta\in[0,\eta_0]. \tag{1.7.33}$$

On the other hand, consider $t_0 > 0$ such that $T_0(t_0)z \in \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_0^*)$ and, from the continuity of $T_0(t_0) : X \to X$, take $\sigma_1 > 0$ such that $T_0(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_1}(z)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A_0^*)$. By the continuity of the family of semigroups at $\eta = 0$, let $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ and $\sigma_2 \in (0, \sigma_1]$ such that $T_\eta(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(z)) \subset \mathcal{O}_\delta(A_0^*)$ for all $\eta \in [0, \eta_1]$.

Finally, from (1.7.33) we deduce that $l_\eta(T_\eta(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(z))) \subset (1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1]$ for all $\eta \in [0, \eta_1]$. Thus, $1 - \frac{\varepsilon}{2} < l_\eta(T_\eta(t_0)w) \le k_\eta(w) \le 1$ for all $w \in \mathcal{O}_{\sigma_2}(z)$ and $\eta \in [0, \eta_1]$. This implies that $|k_\eta(w) - k_0(w)| \le \varepsilon$ for $\eta \in [0, \eta_1]$ and $w \in \mathcal{O}_{\sigma_2}(z)$ and

$$\sup_{w \in \mathcal{O}_{\sigma_2}(z)} |k_\eta(w) - k_0(w)| \le \varepsilon \text{ for } \eta \in [0, \eta_1], \tag{1.7.34}$$

where $\sigma_2 > 0$ and η_1 only depends on A_0^* and $\varepsilon > 0$.

Now, joining the cases 1, 2 and 3, we have that:

Given a compact subset $K \subset X$ and $\varepsilon > 0$, by (1.7.27), (1.7.32) and (1.7.34), there exist an open subset $U = U(\varepsilon, K) \subset X$ with $K \subset U$, and an index $\eta' = \eta'(\varepsilon, K) > 0$ such that

$$\sup_{w \in U} |k_\eta(w) - k_0(w)| \le \varepsilon \text{ for all } \eta \in [0, \eta'],$$

from which we can conclude that $\lim\limits_{\eta \to 0^+} \sup\limits_{w \in K} |k_\eta(w) - k_0(w)| = 0$.

Step 3: for every compact $K \subset X$ we have

$$\lim_{\eta \to 0^+} \sup_{z \in K} |h_\eta(z) - h_0(z)| = 0.$$

Indeed, given $z \in X$ consider now two cases:

Case 1: $\mathbf{dist}(z, \mathscr{A}_0) > 0$.

Given $\alpha > 0$ with $0 < \alpha < \mathbf{dist}(z, \mathscr{A}_0)$, let, by Lemma 1.7.7, $\alpha' \in (0, \alpha)$ and $\eta_0 \in (0, 1]$ such that

$$T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\alpha'}(\mathscr{A}_\eta)) \subset \mathcal{O}_\alpha(\mathscr{A}_\eta) \text{ whenever } t \ge 0, \text{ for all } \eta \in [0, \eta_0]. \tag{1.7.35}$$

Choose $t_0 > 0$ such that $T_0(t_0)z \in \mathcal{O}_{\frac{\alpha'}{4}}(\mathscr{A}_0)$ and, by the continuity of $T_0(t_0) : X \to X$, let $\sigma_1 > 0$ such that $T_0(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_1}(z)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\alpha'}{4}}(\mathscr{A}_0)$.

Now, from the continuity of the family of semigroups at $\eta = 0$, let $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ and $\sigma_2 \in (0, \sigma_1]$ such that $T_\eta(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(z)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\alpha'}{2}}(\mathscr{A}_0)$ for each $\eta \in [0, \eta_1]$ and, by the lower semicontinuity of $\{\mathscr{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ at $\eta = 0$, choose $\eta_2 \in (0, \eta_1]$ such that $\mathscr{A}_0 \subset \mathcal{O}_{\frac{\alpha'}{2}}(\mathscr{A}_\eta)$ for all $\eta \in [0, \eta_2]$. Hence, $\mathcal{O}_{\frac{\alpha'}{2}}(\mathscr{A}_0) \subset \mathcal{O}_{\alpha'}(\mathscr{A}_\eta)$ for $\eta \in [0, \eta_2]$. In particular, $T_\eta(t_0)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(z)) \subset \mathcal{O}_{\alpha'}(\mathscr{A}_\eta)$ for all $\eta \in [0, \eta_2]$. From (1.7.35) we obtain that $T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(z)) \subset \mathcal{O}_\alpha(\mathscr{A}_\eta)$ for all $\eta \in [0, \eta_2]$ and $t \geq t_0$. Consequently,

$$\sup_{t\geq t_0} \mathbf{dist}(T_\eta(t)w, \mathscr{A}_\eta) \leq \alpha \text{ for all } \eta \in [0, \eta_2],\ w \in \mathcal{O}_{\sigma_2}(z). \tag{1.7.36}$$

On the other hand, for all $w \in X$ and all $\eta \in [0, 1]$ we have

$$|\mathbf{dist}(w, \mathscr{A}_\eta) - \mathbf{dist}(w, \mathscr{A}_0)| \leq \mathbf{d}_H(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0). \tag{1.7.37}$$

Then, we can choose $\eta_3 \in (0, \eta_2]$ and $\sigma_3 \in (0, \sigma_2]$ such that $\mathbf{dist}(w, \mathscr{A}_\eta) > \alpha$ for all $\eta \in [0, \eta_3]$ and $w \in \mathcal{O}_{\sigma_3}(z)$. This and (1.7.36) implies that

$$\sup_{t\geq t_0} \mathbf{dist}(T_\eta(t)w, \mathscr{A}_\eta) \leq \alpha < \mathbf{dist}(w, \mathscr{A}_\eta),$$

for all $\eta \in [0, \eta_3]$ and $w \in \mathcal{O}_{\sigma_3}(z)$. So, $h_\eta(w) = \sup_{0\leq t\leq t_0} \mathbf{dist}(T_\eta(t)w, \mathscr{A}_\eta)$ for $\eta \in [0, \eta_3]$ and $w \in \mathcal{O}_{\sigma_3}(z)$.

Note that, for all $w \in X$, $\eta \in [0, 1]$ and $t \geq 0$ we have that

$$|\mathbf{dist}(T_\eta(t)w, \mathscr{A}_\eta) - \mathbf{dist}(T_0(t)w, \mathscr{A}_0)| \leq \mathbf{d}_H(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) + \mathbf{d}(T_\eta(t)w, T_0(t)w),$$

so that, for all $\eta \in [0, \eta_3]$

$$\sup_{w\in\mathcal{O}_{\sigma_3}(z)} |h_\eta(w) - h_0(w)| \leq \mathbf{d}_H(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_0) + \sup_{w\in\mathcal{O}_{\sigma_3}(z)} \sup_{0\leq t\leq t_0} \mathbf{d}(T_\eta(t)w, T_0(t)w),$$

and so, it is easy to see that, given $\varepsilon > 0$ there exist $\sigma \in (0, \sigma_3]$ and $\eta_4 \in (0, \eta_3]$ such that

$$\sup_{w\in\mathcal{O}_\sigma(z)} |h_\eta(w) - h_0(w)| \leq \varepsilon \text{ for all } \eta \in [0, \eta_4].$$

Case 2: $\mathbf{dist}(z, \mathscr{A}_0) = 0$; that is, $z \in \mathscr{A}_0$.

From Lemma 1.7.7, given $\varepsilon > 0$, there are $\varepsilon' \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ and $\eta_0 \in (0, 1]$ such that

$$T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathscr{A}_\eta)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathscr{A}_\eta) \text{ for each } t \geq 0 \text{ and } \eta \in [0, \eta_0]. \tag{1.7.38}$$

Also, since $\{\mathscr{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ is lower semicontinuous at $\eta = 0$, we can choose $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ such that $\mathscr{A}_0 \subset \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon'}{2}}(\mathscr{A}_\eta)$ whenever $\eta \in [0, \eta_1]$. It follows that $\mathcal{O}_{\frac{\varepsilon'}{2}}(\mathscr{A}_0) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathscr{A}_\eta)$ for all $\eta \in [0, \eta_1]$. From this and (1.7.38) we have that

$$T_\eta(t)(\mathcal{O}_{\frac{\varepsilon'}{2}}(\mathscr{A}_0)) \subset \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathscr{A}_\eta) \text{ if } \ \eta \in [0, \eta_1] \text{ and } t \geq s.$$

Consequently, $h_\eta(w) = \sup\limits_{t\geq 0} \mathbf{dist}(T_\eta(t)w, \mathscr{A}_\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for all $\eta \in [0, \eta_1]$ and $w \in \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon'}{2}}(\mathscr{A}_0)$, so that

$$\sup_{w\in\mathcal{O}_{\frac{\varepsilon'}{2}}(\mathscr{A}_0)} |h_\eta(w) - h_0(w)| \leq \varepsilon \text{ for all } \eta \in [0, \eta_1].$$

In these conditions, given $\varepsilon > 0$ and $z \in X$, there are $\sigma = \sigma(\varepsilon, z) > 0$ and $\eta' = \eta'(\varepsilon, z) > 0$ such that

$$\sup_{w\in\mathcal{O}_\sigma(z)} |h_\eta(w) - h_0(w)| \leq \varepsilon \text{ for all } \eta \in [0, \eta'].$$

We now conclude the convergence $\lim\limits_{\eta\to 0^+} \sup\limits_{z\in K} |h_\eta(z) - h_0(z)| = 0$ by an argument similar to that of Step 2. This completes the proof. ■

1.8 Applications

In this section we consider some applications of the abstract results in the previous sections, and conclude that some non-autonomous evolutions processes possess a Morse-Decomposition and, therefore, a Lyapunov function.

Exemplo 1.8.1 *Consider the the initial boundary value problem*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda f_\eta(u), \ x \in (0, \pi), \ t > \tau \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \ t > \tau \\ u(\cdot, \tau) = \phi_0 \in H^1_0(0, \pi) \end{cases} \tag{1.8.1}$$

Where $\lambda \in [0, \infty)$, $\eta \in [0, 1]$, $f_\eta \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *with* f_η *satisfying:*

1) There exists $M > 0$ such that $f_\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is such that $f_\eta(u)u < 0$ for all $u \in \mathbb{R}$ with $|u| > M$. Suppose also that $f_0(u) = f_0(u)$.

2) For each $r > 0$

$$\lim_{\eta\to 0+} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{|u|\leq r} \{|f_\eta(u) - f_0(u)| + |(f_\eta)_u(u) - f_0'(u)| + |(f_\eta)_{uu}(u) - f_0''(u)|\} = 0.$$

It is not difficult to see that, under these assumptions, problem (1.8.1) *possesses a global attractor $\mathscr{A}_\eta$.*

If (1.8.1) *with $\eta = 0$ has a finite number of equilibria, all of them hyperbolic. The hypotheses of Theorem 1.7.9 are clearly satisfied and there exists $\eta_0 > 0$ such that $\mathscr{A}_\eta$ has a Morse-Decomposition, and a continuous (uniformly in K for each compact subset K of $H_0^1(0,\pi)$) Lyapunov function $V_\eta : H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$ (in the sense of Definition 1.3.1).*

Exemplo 1.8.2 Consider a general cascade system of the form

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= & f_1(u_1) \\ \dot{u}_2 &= & f_2(u_1,u_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{u}_n &= & f_n(u_1,\cdots,u_n), \end{cases} \tag{1.8.2}$$

where $f_j : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, are C^1 functions. Assume that there is $\xi > 0$ such that $f_j(u_1,\cdots,u_j)u_j < 0$ for all $(u_1,\cdots,u_j) \in \mathbb{R}^j$ such that $|u_j| \geq \xi$ and for all $1 \leq j \leq n$. Assume that all equilibria of (1.8.2) are hyperbolic. It follows from the results in [2] that the semigroup associated to (1.8.2) is gradient-like (therefore gradient). Now we consider a small non-autonomous perturbation of the above problem, that is,

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= & f_1(u_1) + g_1(u_1,\cdots,u_n) \\ \dot{u}_2 &= & f_2(u_1,u_2) + g_2(u_1,\cdots,u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{u}_n &= & f_n(u_1,\cdots,u_n) + g_n(u_1,\cdots,u_n). \end{cases} \tag{1.8.3}$$

If $g_j(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a $C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ function with the property that

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbb{R}^n} \left\{ |g_j(u_1,\cdots,u_n)| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial u_i}(u_1,\cdots,u_n) \right| \right\}$$

is suitably small, it follows from the results in [11] that the evolution process $\{T_g(t) : t \geq s\}$ associated to (1.8.3) is gradient-like and, as a consequence of the results in Section 1.6 that the pullback attractor of $\{T_g(t) : t \geq s\}$ has a Morse-Decomposition and that there is a Lyapunov function for it.

One can easily see that, cascade systems of semilinear parabolic problems can also be considered.

1.9 Atratores globais exponenciais

Nesta seção, consideramos semigrupos $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ que possuem um atrator global $\mathcal{A}$ e para os quais existe uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Se os conjuntos instáveis locais desses invariantes isolados possuem a propriedade de atração exponencial local e uma condição de Lipschitz (uniform em limitados e com crescimento exponencial em t), então o atrator global $\mathcal{A}$ atrai subconjuntos limitados de X exponencialmente. Os resultados apresentados aqui estendemos resultados apresentados em [5] para semigrupos gradientes e podem ser encontrados em [10].

Em [5] os autores consideram $C^{1+\mu}$ semigrupos gradientes com um atrator global $\mathcal{A}$ para os quais o conjunto dos pontos de equilíbrios $\mathcal{E}$ é composto somente de pontos de equilíbrios hiperbólicos (portanto é finito). Para este semigrupo, eles provam que $\mathcal{A}$ atrai exponencialmente subconjuntos compactos (veja Seção 5.7 e Observação 7.11 em [5]).

No que se segue, estendemos os resultados de [5] em uma perspectiva ampla pois não assumimos que o semigrupo seja gradiente nem mesmo que os invariantes isolados sejam equilíbrios ou hiperbolicidade. De fato, em alguns exemplos, mostramos que a hiperbolicidade de cada equilíbrio não é uma condição necessária para garantir a atração exponencial de limitados para o atrator global.

Também revelamos um comportamento ainda mais interessante de um sistema com atração exponencial apresentando situações com duas possibilidades de bifurcações em uma mesma equação diferencial; em uma delas, a taxa de atração muda quando ocorre a bifurcação e na outra a taxa de atração permanece a mesma quando ocorre a bifurcação. A mudança na taxa de atração está relacionada à direção na qual a bifurcação ocorre. Se a direção de bifurcação é uma direção *do atrator*, nenhuma alteração na taxa de atração é observada e, se a direção de bifurcação é *transversal ao atrator*, observa-se uma alteração na taxa de atração.

1.9.1 Semigrupos gradient-like com atratores globais exponenciais

O resultado a seguir é uma conseqüência simples da definição se semigrupos gradientes relativos a uma família disjunta de invariantes isolados.

Lema 1.9.1 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Se $V : X \to \mathbb{R}$ é a função de Lyapunov associada, $\Xi \in \boldsymbol{\Xi}$ e $V(\Xi)$ não é um valor mínimo para V em nenhuma vizinhança de Ξ. Então, existe uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$ tal que $\xi(\mathbb{T}) \not\subset \Xi$ e $\xi(t) \in W^u(\Xi)$ para todo $t \in \mathbb{T}$.*

Exercício 1.9.2 *Prove o Lemma 1.9.1.*

Os dois lemas seguintes são uma extensão natural do Lema 1.4.5 e Lemma 1.4.6 para semigrupos gradient-like relativos a uma família disjunta de invariantes isolados.

Lema 1.9.3 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$.*

Dado $\Xi \in \boldsymbol{\Xi}$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $v \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$ e para algum $t_1 > 0$, $T(t_1)v \notin \mathcal{O}_\epsilon(\Xi)$, então $T(t)v \notin \mathcal{O}_\delta(\Xi)$ para todo $t \geqslant t_1$.

Prova: Suponha que existe $\epsilon > 0$, seqüência $\{v_k\}$ em X com $v_k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$, seqüências $\{\tau_k\}$ e $\{t_k\}$ em $\mathbb{T}^+$ com $\tau_k > t_k > 0$, $\mathrm{dist}(T(\tau_k)v_k, \Xi) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\mathrm{dist}(T(t_k)v_k, \Xi) \geqslant \epsilon$. Então, Ξ recorrente por cadeias relativamente a $\boldsymbol{\Xi}$, o que é um absurdo. ■

Lema 1.9.4 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Se B é um subconjunto limitado de X, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que*

$$\{T(t)x : t \in 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cap \mathcal{O}_\epsilon\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^n \Xi_i\big) \neq \varnothing, \quad \forall\, x \in B.$$

Prova: A prova é feita por contradição. Suponha que existem seqüências $\{x_k\} \subset B$, $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\{T(s)x_k : 0 \leqslant s \leqslant t_k\} \cap \mathcal{O}_\epsilon(\bigcup_{i=1}^n \Xi) = \varnothing$.

Escolha $\tau_k :=$ o maior inteiro menor ou igual a $\frac{t_k}{2}$. Então, existe subseqüência de $\{T(\tau_k)x_k\}$ (que ainda denotaremos da mesma forma) convergente para um certo $x_0 \in X$. É fácil ver que $\{T(t)x_0 : t \in \mathbb{T}^+\} \cap \mathcal{O}_\epsilon(\bigcup_{i=1}^n \Xi) = \varnothing$ e isto é uma contradição com o fato que $\bigcup_{i=1}^n \Xi$ atrai pontos. ■

Definição 1.9.5 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Diremos um conjunto instável local de $\Xi \in \boldsymbol{\Xi}$ é exponencialmente atrator se existirem constantes positivas C_0, ϱ_0 e δ_0 tais que*

$$\mathrm{dist}(T(t)u_0, W^u_{\mathrm{loc}}(\Xi)) \leqslant C_0 e^{-\varrho_0 t}, \tag{1.9.1}$$

sempre que $\{T(s)u_0 : 0 \leqslant s \leqslant t\} \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi)$.

Teorema 1.9.6 *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradient-like relativamente à família de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_p\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Seja V uma vizinhança fechada, limitada e positivamente invariante de $\mathcal{A}$ e suponha que a restrição $T(t)_{|V}$ de $T(t)$ a V é uma função Lipschitiz contínua com constante de Lipschitz ce^{Lt} ($L > 0$), para cada $t \in \mathbb{T}^+$. Suponha que cada conjunto $\Xi \in \boldsymbol{\Xi}$ tenha um conjunto instável local exponencialmente atrator.*

Então, existem constantes $\tilde{\gamma} > 0$ e, para cada $v \in V$, uma função $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto \tilde{u}(t) \in \mathcal{A}$ e uma constant $\tilde{c} > 0$, tais que

$$\mathrm{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant \tilde{c}\, e^{-\tilde{\gamma} t},\ \ t \in \mathbb{T}^+. \tag{1.9.2}$$

Além disso, a constante $\tilde{c}$ pode ser escolhida independentemente de v em subconjuntos limitados de X e, consequentemente, para cada $B \subset X$ limitado existe $c(B) > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \leqslant \tilde{c}(B)\, e^{-\tilde{\gamma} t},\ t \in \mathbb{T}^+. \tag{1.9.3}$$

Prova: Sabemos que

$$\operatorname{dist}(T(t)w_1, T(t)w_2) \leqslant ce^{Lt}\operatorname{dist}(w_1, w_2), \quad \forall w_1, w_2 \in V,\ t \in \mathbb{T}^+. \tag{1.9.4}$$

Escolha $\delta, \gamma > 0$ e $c > 0$, tais que

$$\operatorname{dist}(T(t)w, W^u_{loc}(\Xi_j)) \leqslant ce^{-\gamma t} \text{ para todo } j = 1, \ldots, p, \tag{1.9.5}$$

sempre que $t \in \mathbb{T}^+$ e $\{T(s)w : 0 \leqslant s \leqslant t\} \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi_j)$.

Do Lema 1.9.3, escolha $\delta' < \delta$ tal que, se $v \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j)$, e para algum $t_1 \in \mathbb{T}^+$

$$T(t_1)v \notin \mathcal{O}_\delta(\Xi_j),$$

então

$$T(t)v \notin \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j), \text{ para todo } t \geqslant t_1.$$

Agora, do Lema 1.9.4, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que, para todo $v \in V$

$$\{T(t)v : 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cap \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j) \neq \varnothing.$$

Portanto, dado $v \in V$, existem seqüências $\{t^-_{i(j)}\}_{j=1}^m$, $\{t^+_{i(j)}\}_{j=1}^m$ e $\{\Xi_{i(j)}\}_{j=1}^m$ tais que $i(j) \in \{1, \ldots, p\}$, $1 \leqslant j \leqslant m \leqslant p$,

$$t^-_{i(1)} \leqslant t_0, \qquad 0 < t^-_{i(j)} - t^+_{i(j-1)} \leqslant t_0,\ \ 2 \leqslant j \leqslant m, \qquad t^+_{i(m)} = +\infty,$$

para os quais $T(t)v \in \mathcal{O}_\delta(\Xi_{i(j)})$ para todo $t^-_{i(j)} \leqslant t < t^+_{i(j)}$, $T(t^+_{i(j)})v \notin \mathcal{O}_\delta(\Xi_{i(j)})$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Dado $v \in V$, a órbita positiva de v visita vizinhanças de alguns dos conjuntos invariantes pertencentes a $\boldsymbol{\Xi}$. Reordenamos e re-enumeramos estes conjuntos $\Xi_1, \ldots, \Xi_m$, $m \leqslant p$, usando a ordem na qual a δ'-vizinhança dos mesmos é visitada pela órbita de v.

Agora escolhemos um ponto $y_1 \in \Xi_1$ e para cada $t_j^- \leqslant t \leqslant t_j^+$ escolha $\psi(t)$ tal que

$$\mathrm{dist}(T(t)v, \overline{W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(\Xi_j)}) = \mathrm{dist}(T(t)v, \psi(t)), \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Defina $\tilde{u} : \mathbb{T}^+ \to \mathcal{A}$ por

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} y_1, \ 0 \leqslant t < t_1^-, \\ \psi(t), \ t_1^- \leqslant t \leqslant t_1^+, \\ T(t - t_{j-1}^+)\tilde{u}(t_{j-1}^+), \ t_{j-1}^+ \leqslant t \leqslant \kappa_j^0, \ 2 \leqslant j \leqslant n, \\ \psi(t), \ \kappa_j^0 < t \leqslant t_j^+, \ 2 \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

onde $k_j^0 \in (t_j^-, t_j^+]$ é dado por

$$\gamma_1 := \gamma, \quad \gamma_j = \frac{\gamma_{j-1}^2}{L + 2\gamma_{j-1}} \quad \text{e} \quad \kappa_j^0 = \min\left\{\frac{L + 2\gamma_{j-1}}{L + \gamma_{j-1}} t_j^-, t_j^+\right\}, \quad j = 2, \ldots, m. \tag{1.9.6}$$

Por hipótese temos que

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant \sup_{v \in V} \mathrm{dist}(v, y_1) e^{\gamma t_0} e^{-\gamma t} =: \tilde{c}_1 e^{-\gamma t}, \ 0 \leqslant t < t_1^-, \\ &\mathrm{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant c e^{-\gamma(t - t_1^-)} \leqslant c e^{\gamma t_0} e^{-\gamma t} =: \hat{c}_1 e^{-\gamma t}, \ t_1^- \leqslant t \leqslant t_1^+. \end{aligned}$$

Seja $c_1 = \max\{\tilde{c}_1, \hat{c}_1\}$. Mostraremos que, para cada $j = 2, \ldots, m$, a seguinte implicação é verdadeira

se (i) $\mathrm{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant c_{j-1} e^{-\gamma_{j-1} t}, \ t_{j-2}^+ \leqslant t < t_{j-1}^+$ com algum $c_{j-1} > 0$,

então (ii) $\mathrm{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant c_j e^{-\gamma_j t}, \ t_{j-1}^+ \leqslant t < t_j^+$ com algum $c_j > 0$.

Primeiramente note que, por hipótese, se $t_{j-1}^+ \leqslant t \leqslant \kappa_j^0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) &\leqslant c e^{L(t - t_{j-1}^+)} \mathrm{dist}(T(t_{j-1}^+)v, \tilde{u}(t_{j-1}^+)) \\ &\overset{\text{(i)}}{\leqslant} c c_{j-1} e^{L(t - t_{j-1}^+) - \gamma_{j-1} t_{j-1}^+}. \\ &\leqslant c c_{j-1} e^{(L+\gamma) t_0} e^{L(t - t_j^-) - \gamma_{j-1} t_j^-} \end{aligned} \tag{1.9.7}$$

e para $\kappa_j^0 \leqslant t \leqslant t_j^+$,

$$\mathrm{dist}(T(t)v, \psi(t)) \leqslant c e^{-\gamma(t - t_j^-)} \leqslant c e^{-\gamma_{j-1}(t - t_j^-)}. \tag{1.9.8}$$

Olhando de perto (1.9.7) e (1.9.8) podemos notar que, se $t_j^- < \kappa_j^0 < t_j^+$, temos[2]

$$L(\kappa_j^0 - t_j^-) - \gamma_{j-1}t_j^- = -\gamma_{j-1}(\kappa_j^0 - t_j^-) = -\gamma_j \kappa_j^0. \tag{1.9.9}$$

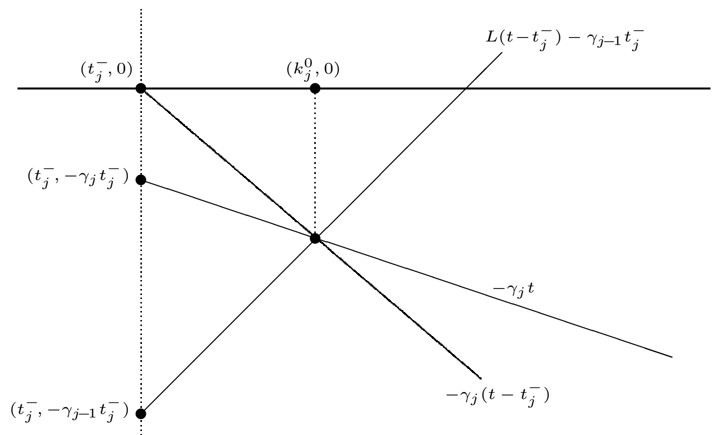


Figura: Determinação de k_j^0 e γ_j.

De fato, inferimos que

$$L(t - t_j^-) - \gamma_{j-1}t_j^- \leqslant -\gamma_j t, \quad t_j^- \leqslant t \leqslant \kappa_j^0. \tag{1.9.10}$$

$$-\gamma_{j-1}(t - t_j^-) \leqslant -\gamma_j t, \quad \kappa_j^0 < t \leqslant t_j^+. \tag{1.9.11}$$

Agora estamos prontos para completar a estimativa. De (1.9.7) e (1.9.10) obtemos que, para $t_j^- \leqslant t \leqslant \kappa_j^0$

$$\operatorname{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant cc_{j-1}e^{(L+\gamma)t_0}e^{-\gamma_j t},$$

enquanto que (1.9.8) e (1.9.11) assegura que, para $\kappa_j^0 < t \leqslant t_j^+$,

$$\operatorname{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant ce^{-\gamma_{j-1}(t-t_j^-)} \leqslant ce^{-\gamma_j t}.$$

[2]A primeira igualdade em (1.9.9) determina k_j^0 em função de γ_{j-1} e t_j^- e, uma vez determinado k_j^0, a segunda igualdade em (1.9.9) determina γ_j em função de γ_{j-1}. Como o resultado temos as expressões apresentadas em (1.9.6).

De (1.9.7), para $t_{j-1}^{+} \leqslant t \leqslant t_j^{-}$,

$$\operatorname{dist}(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leqslant cc_{j-1}e^{L(t-t_{j-1}^{+})-\gamma_{j-1}(t_{j-1}^{+}-t+t)} \leqslant cc_{j-1}e^{(L+\gamma)t_0}e^{-\gamma_j t}, \qquad (1.9.12)$$

e (ii) vale com

$$c_j = \max\{c, cc_{j-1}e^{(L+\gamma)t_0}\}$$

completando a prova. ■

Exercício 1.9.7 *Seja uma $\{T_\eta(t) : t \geqslant 0\}$ família de semigrupos que é contínua e coletivamente compacta em $\eta = 0$ e suponha que a família disjunta de invariantes isolados seja contínua em $\eta = 0$. Enuncie e demonstre um resultado que garanta atração exponencial uniforme em $[0, \eta_0]$ para algum $\eta_0 \in (0, 1]$. Aplique o Corolário 1.5.7 para obter a taxa de convergência de atratores. Sugestão: Inspire-se no roteiro da prova do teorema anterior e estenda os dois lemas que o precedem para as famílilas de semigrupos.*

1.9.2 Aplicações

Nesta seção consideramos diversas aplicações elementeares dos resultados abstratos descritdos na Seção 1.9. Iniciamos com o seguinte contra-exemplo.

Exemplo 1.9.8 Considere a equação diferencial ordinária

$$\dot{u} = -u^2. \qquad (1.9.13)$$

Defina o semigrupo $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ no espaço de fase $V = [0, \infty)$ por

$$S(t) = \frac{u_0}{1 + u_0 t} \quad \text{para} \quad t \geqslant 0, \; u_0 \geqslant 0, \qquad (1.9.14)$$

e considere a família $\boldsymbol{\Xi} = \{Y^*\}$ formada por um único conjunto invariante isolado com $Y^* = \{0\}$.

É evidente que, exceto por (1.9.1), todas as outras hipóteses do Teorema 1.9.6 estão satisfeitas. De (1.9.14) é também evidente que a convergencia para o atrator global $A = \{0\}$ não é exponencial.

Portanto, atração exponencial dos conjuntos instáveis locais de cada conjunto invariante isolado $Y^* \in \Xi$ é uma condição necessária para que um semigrupo possua um atrator global exponencial.

Agora mostramos que, em geral, hiperbolicidade de pontos de equilíbrio não é uma condição necessária para aplicar os resultados da Seção 1.9.

Exemplo 1.9.9 Considere a equação diferencial ordinária

$$\dot{u} = -(u-1)(u-\frac{1}{2})u^2(u+\frac{1}{2})(u+1)(u+2). \tag{1.9.15}$$

Note que, para este exemplo, podemos escolher como família disjunta de conjuntos invariantes isolados

$$\Xi = \{\{-2\}, \{-1\}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \{1\}\}$$

e então, todas as hipóteses do Teorema 1.9.6 estarão satisfeitas. Consequentemente, o Teorema 1.9.6 se aplica e o semigrupo associado a (1.9.15) em $V = \mathbb{R}$ tem um atrator global exponencial.

Note que, nem todos os equilíbrios de (1.9.15) são hiperbólicos, e isto mostra que a hiperbolicidade de pontos de equilíbrio não é uma condição necessária para que o semigrupo possua um atrator exponencial. Note ainda que a escolha de Ξ é decisiva para obter o resultado; de fato, escolhendo $\Xi = \mathcal{E}$ a hipótese (1.9.1) do Teorema 1.9.6 não estará satisfeita pois $\{0\}$ nao tem um conjunto instável exponencialmente atrator.

De fato, um semigrupo pode possuir um contínuo de equilíbrios, e ainda assim a teoria abstrata desenvilvida na Seção 1.9 ser aplicável para alguns exemplos com famílias de invariantes isolados oportunamente escolhidas.

Exemplo 1.9.10 *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias em* $\mathbb{R}^N$

$$\dot{u} = -(1-|u|^2)(2-|u|)u. \tag{1.9.16}$$

Note que $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\} \cup \{0\}$ *e, exceto pelo zero, nenhum dos pontos de equilíbrios é isolado. Note ainda que, na origem o lado direito da equação não é diferenciável.*

Multiplicando ambos os lados da equação (1.9.16) *por* u *e fazendo* $\rho = |u|$ *obtemos nas variáveis* (t,ρ) *a edo escalar*

$$\dot{\rho} = -(\rho^2 - 1)(\rho - 2)\rho,$$

da qual inferimos que, enquanto $\rho > 2$,

$$\frac{d}{dt}(\rho - 2) \leqslant -6(\rho - 2).$$

Portanto, fazendo $Y^* := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 2\}$, *obtemos que*

$$\mathrm{dist}(u(t), Y^*) \leqslant \max\{0, |u(t)| - 2\} \leqslant \max\{0, |u(0)| - 2\}e^{-6t}.$$

Consequentemente, escolhendo $\Xi = \{Y^*\}$, *todas as hipóteses do Teorema 1.9.6 estão satisfeitas.*

É esperado que o aparecimento de bifurcações podem originar mudança na taxa de atração dos conjuntos instáveis locais de um conjunto invariante isolado; em particular, de um atrator global. O exemplo a seguir mostra que, mesmo para sistemas de equações diferenciais ordinárias no plano, a direção em que a bifurcação ocorre é de fundamental importância. De fato, se a bifurcação ocorre 'em uma direção do 9843 atrator', o semigrupo poderá preservar suas propriedades de atração exponencial.

Exemplo 1.9.11 Para $\alpha \geqslant 0$ considere o sistema planar de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{u} = -(u+1)u(u-1) - \alpha(u-v) \\ \dot{v} = -(v+1)v(v-1) + \alpha(u-v), \end{cases} \tag{1.9.17}$$

(veja [9]). Este sistema possui uma função de Lyapunov

$$\mathcal{V}(u,v) = \frac{1}{4}(u^4+v^4) - \frac{1}{2}(1-\alpha)(u^2+v^2) - \alpha uv, \tag{1.9.18}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^2+v^2) \leqslant -(u^2+v^2)+2.$$

implica que óbitas de conjuntos limitados são limitadas.

Consequentemente, o Teorema 1.9.6 se aplica com $\Xi = \mathcal{E}$ sempre que $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ o conjunto instável local de cada ponto de equilíbrio for exponencialmente atrator. O Teorema [5, Theorem 7.1.] também se aplica se cada um dos pontos de equlíbrio for hiperbólico. A seguir discutimos como estas propriedades variam com o parâmetro. Em particular gostaríamos de estudar o que o que se passa quando, para um dado valor de α, ocorrem bifurcações.

Evidentemente, os três pontos de equíbrio,

$$y_1^* = (-1,-1),\ y_2^* = (0,0),\ y_3^* = (1,1)$$

permanecem para todos os valores de α. Como, fora da diagonal, temos

$$u^2+uv+v^2 = 1-2\alpha, \tag{1.9.19}$$

não existirão outros equilíbrios se $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

A situação para $\alpha > \frac{1}{2}$ é muito diferente daquela para $\alpha = \frac{1}{2}$ pois, no primeiro caso, todos os equilíbrios são hiperbólicos enquanto que, no segundo caso, o zero pertence ao espectro da linearização de (1.9.17) em torno de $(u,v) = (0,0)$.

Assim, para $\alpha = \frac{1}{2}$, o ponto de equilíbrio $(0,0)$ não é hiperbólico. Contudo, o atrator global ainda é o mesmo que aquele para $\alpha > \frac{1}{2}$ consistindo dos três equilíbrios na diagonal e das heteroclínicas que os conectam (veja Figura 1.1).

Na direção perpendicular; isto é, sobre a diagonal secundária, temos as soluções

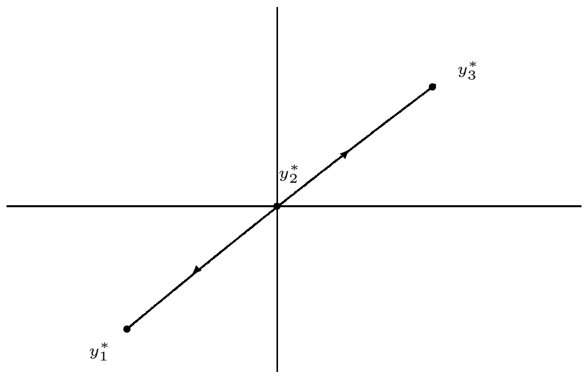


Figura 1.1: O atrator para $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

$(1.9.17)_{|\alpha=\frac{1}{2}}$ of the form

$$u(t)=\frac{\pm u(0)}{\sqrt{1+2u^2(0)t}},\quad v(t)=\frac{\mp v(0)}{\sqrt{1+2v^2(0)t}},\ t\geqslant 0, \tag{1.9.20}$$

que certamente convergem para $(0,0)$ a uma taxa que não é exponencial a menos que $u(0)=v(0)=0$.

Note que, uma bifurcação ocorre em $\alpha=\frac{1}{2}$ e que para $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ observamos fazendo $u=-v$ in (1.9.19) que dois equilíbrios adicionais,

$$y_4^*=(-\sqrt{1-2\alpha},\sqrt{1-2\alpha})\ \text{ e }\ y_5^*=(\sqrt{1-2\alpha},-\sqrt{1-2\alpha}), \tag{1.9.21}$$

aparecem exatamente na direção indicada pela solução que não converge exponencialmente (1.9.20). Esta direção não é uma direção do atrator.

Observamos que para $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ todos os equlíbrios são hiperbólicos e o atrator global será um atrator exponencial (veja Figura 1.2).

Para ter certeza que, com $\alpha\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$, temos exatamente estes cinco pontos de equlíbrio, observamos de (1.9.17) que as relações que determinam as coordenadas u e v dos pontos de equilíbrio são

$$u(v):=v-\frac{1}{\alpha}v+\frac{1}{\alpha}v^3 \tag{1.9.22}$$

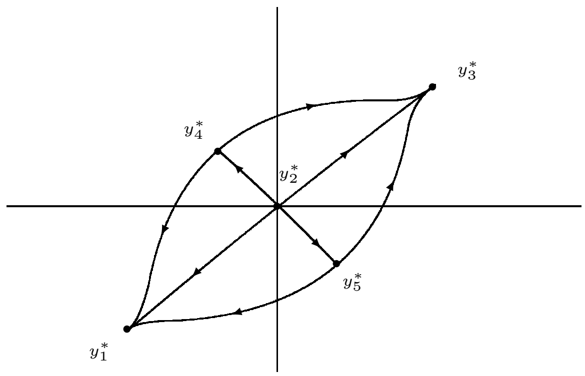


Figura 1.2: Representação do atrator para $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

e

$$vh(v) = 0,$$

onde

$$h(v) = 2 - \frac{1}{\alpha} + \left[\frac{1}{\alpha} - 1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^3\right] v^2 - \frac{3}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 v^4 - \frac{3}{\alpha^2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) v^6 - \frac{1}{\alpha^3} v^8.$$

Como já sabemos que o polinômio $h(v)$ tem quatro raízes dadas por v-coordinates of $y_1^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*$, então $h(v)$ pode ser dividido por $h_1(v) = (v^2 - 1)(v^2 - 1 + 2\alpha)$. Isto nos leva à igualdade

$$h(v) = h_1(v) h_2(v),$$

onde

$$h_2(v) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}(1 - \alpha)v^2 - \frac{1}{\alpha^3} v^4,$$

da qual inferimos que $h_2(v)$ não tem raízes reais para $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Para fechar a discussão vamos discutir o que ocorre em $\alpha = \frac{1}{3}$ quando uma bifurcação secundária ocorre.

De fato, para $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ temos que o discriminante de $h_2(v)$ é estritamente positivo e $h_2(v)$ tem quatro raízes. Portanto $h(v)$ tem quatro 'novas' raízes denotadas por $v_6, \ldots v_9$, que são da forma

$$\pm\sqrt{\frac{1-\alpha\pm\sqrt{1-2\alpha-3\alpha^2}}{2}}.$$

Por (1.9.22) isto dá origem a quatro novos equilíbrios

$$y_j^* = (u(v_j), v_j)\,,\ j=6,\dots 9,$$

(veja Figura 1.3).

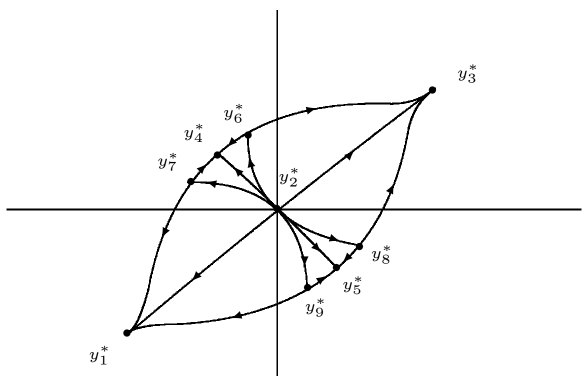


Figura 1.3: Representação do atrator para $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ is close to $\frac{1}{3}$.

Agora observamos que zero pertence ao espectro do operador associado à linearização de (1.9.17) em torno de $(u,v) = y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ ou de $(u,v) = y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$, respectivamente. Não obstante, mostraremos que esses pontos de equilíbrio possuem um conjunto instável local exponencialmente atrator e consequentemente o atrator global do semeigrupo $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ associado à $(1.9.17)_{|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ é exponencial.

Observação 1.9.12 *Note que, na direção $u+\frac{\sqrt{3}}{3} = v-\frac{\sqrt{3}}{3}$ por $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ obtemos de* (1.9.17) *que*

$$\dot{u} = \frac{2\sqrt{3}}{9} + u - u^3.$$

Como esta última equação diferencial ordinária pode ser re-escrita na forma

$$\frac{d}{dt}(u+\frac{\sqrt{3}}{3}) = -(u+\frac{\sqrt{3}}{3})^2(u-\frac{2\sqrt{3}}{3}),$$

isto da origem a alguma intuição de que esta pode ser uma 'direção lenta'. Na direção $u - \frac{\sqrt{3}}{3} = v + \frac{\sqrt{3}}{3}$ *por* $y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *podemos desenvolver uma intuição análoga de que o fluxo 'é lento' nesta direção. Esta intuição é relativa a uma 'direção do atrator', indicando que ainda podemos ter conjuntos instáveis* $W^u_{loc}(y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$ *e* $W^u_{loc}(y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$ *locais que atraem exponencialmente e portanto podemos ainda preservar a atração exponencial de limitados para o atrator global.*

No que se segue asseguramos que ambos $W^u_{loc}(y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$ e $W^u_{loc}(y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$ possuem a propriedade de atração exponencial desejada. O lema a seguir é uma observação fundamental para provar que este é de fato o caso.

Lema 1.9.13 *Nem* $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *nem* $y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *são mínimos locais da função de Lyapunov* $\mathcal{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida em* (1.9.18).

Prova: Fixemos $y^* \in \{y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}, y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}\}$ e considere a expansão de Taylor de $\mathcal{V}$ em uma vizinhança de y^*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(u,v) = &-\frac{1}{18} + \frac{1}{6}(u+\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{1}{6}(v-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - \frac{1}{3}(u+\frac{1}{\sqrt{3}})(v-\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}}(u+\frac{1}{\sqrt{3}})^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}(v-\frac{1}{\sqrt{3}})^3 + \frac{1}{4}(u+\frac{1}{\sqrt{3}})^4 + \frac{1}{4}(v-\frac{1}{\sqrt{3}})^4\end{aligned} \tag{1.9.23}$$

Em termos das variáveis $(x,y) = (u,v) - y^*$ isto pode ser re-escrito como

$$\tilde{\mathcal{V}}(x,y) = \mathcal{V}(x-\frac{1}{\sqrt{3}}, y+\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6}(x-y)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}y^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4. \tag{1.9.24}$$

Agora, fazendo $x - y = x^2$, obtemos um polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de uma variável x,

$$p(x) = \tilde{\mathcal{V}}(x, x-x^2) = -\frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3} - \sqrt{3}\right)x^4 + x^5\left(\sqrt{3} - 1 + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)x - x^2 + \frac{1}{4}x^3\right).$$

A prova agora segue facilmente. ■

Como a diagonal secundária é invariante, segue facilmente que existe uma solção que conecta y^*_2 a $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ e y^*_2 a $y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$. Do Lema 1.9.13 e Lema 1.9.1 concluímos que existem conexóes a partir $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ e $y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$.

Corolário 1.9.14 *As variedades instáveis locais* $W^u_{loc}(y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$ *e* $W^u_{loc}(y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$ *são ambas não triviais. De fato existem conexões heteroclínicas de* $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *para* $y^*_{1|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *e de* $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *para* $y^*_{3|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$. *Respectivamente, existem conexões heteroclínicas de* $y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *para* $y^*_{1|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *e outra de* $y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ *para* $y^*_{3|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$.

Prova: Como conseqência do Lema 1.9.13 existe uma seqência de pontos $\left[\begin{smallmatrix} u_{0n} \\ \tilde{v}_{0n} \end{smallmatrix}\right] \to y^*$ tais que $\mathcal{V}(\left[\begin{smallmatrix} u_{0n} \\ \tilde{v}_{0n} \end{smallmatrix}\right]) < \mathcal{V}(y^*)$. Como a diagonal secundária é invariante podemos assumir, sem perda de generalidade que $\{\left[\begin{smallmatrix} u_{0n} \\ \tilde{v}_{0n} \end{smallmatrix}\right]\}$ está contida em um setor $\tilde{V} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v > |u|\}$. Como $cl\tilde{V}$ é invariante, $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ restrito a $cl\tilde{V}$ é um semigrupo gradiente tal que $\mathcal{V}_{|cl\tilde{V}}$ não tem um mínimo local em $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$. Pelo Lema 1.9.1 existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to cl\tilde{V}$ limitada, que converge quanto $t \to -\infty$ para $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$. Existem apenas dois equilíbrios em $cl\tilde{V}$ distintos de $y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ e ϕ converge quando $t \to \infty$ para um deles; isto é, ou para y^*_2 ou para y^*_3. Levando em conta que $\mathcal{V}(y^*_2) > \mathcal{V}(y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}) > V(y^*_3)$ concluímos que $\phi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y^*_3$. Como o sistema é simétrico relativamente à diagonal secundária, a prova está completa. ∎

Agora mostraremos que $W^u_{loc}(y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$ (resp. $W^u_{loc}(y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}})$) é o gráfico de uma função Lipschitz e é exponencialmente atratora.

Para manter a notação compacta, escrevemos o sistema (1.9.17) próximo ao equilíbrio $y^* \in \{y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}}, y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}\}$ na forma

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right] = F'(y^*)\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right] + h\left(\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right]\right), \tag{1.9.25}$$

onde

$$\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] - y^*,$$

$$F(\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]) = \begin{bmatrix} u-u^3-\alpha(u-v) \\ v-v^3+\alpha(u-v) \end{bmatrix}, \quad F'(y^*)\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right]$$

e

$$h\left(\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right]\right) = F\left(\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right] + y^*\right) - F\left(y^*\right) - F'(y^*)\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right].$$

Evidentemente $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$é uma função continuamente diferenciável que satisfaz

$$h(0)=0 \ \text{ e } \ h'(0)=0\in L(\mathbb{R}^2).$$

Note que, para y^* como acima, o espectro do operador $F'(y^*)=\left[\begin{smallmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right]\in L(\mathbb{R}^2)$ consiste de dois auto-valores distintos 0, $-\frac{2}{3}$ e escolha um correspondente par de auto-vetores $\xi,\rho\in\mathbb{R}^2$. Denote por Z_ξ, Z_ρ os subespaços de $\mathbb{R}^2$ gerados por ξ, ρ respectivamente e sejam $\{S_\xi(t):t\geqslant 0\}$, $\{S_\rho(t):t\geqslant 0\}$ os correspondentes 'semigrupos projetados' associados à $\{e^{F'(y^*)t}:t\geqslant 0\}$ de forma que tenhamos

$$S_\xi(t)z_1=z_1,\ t\geqslant 0,\ z_\xi\in Z_\xi,$$

$$S_\rho(t)z_\rho=z_2e^{-\frac{3}{2}t},\ t\geqslant 0,\ z_\rho\in Z_\rho.$$

e

$$\begin{aligned}&\|S_\xi(t)\|_{L(\mathbb{R}^2)}\leqslant 1, \quad t\leqslant 0,\\ &\|S_\rho(t)\|_{L(\mathbb{R}^2)}\leqslant e^{-\frac{3}{2}t}, \quad t\geqslant 0.\end{aligned} \tag{1.9.26}$$

Note que $\mathbb{R}^2=Z_\xi\oplus Z_\rho$ e que cada elemento $\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]\in\mathbb{R}^2$ pode ser decomposto como $\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\xi+\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\rho$ onde $\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\xi$ e $\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\rho$ podem ser vistos como os valores $Q\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]$ e $P\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]$ das projeções $Q:\mathbb{R}^2\to Z_\xi$ e $P=Id-Q:\mathbb{R}^2\to Z_\rho$.

Lema 1.9.15 *Fixe $\alpha=\frac{1}{3}$, $y^*\in\{y^*_{4|_{\alpha=\frac{1}{3}}},y^*_{5|_{\alpha=\frac{1}{3}}}\}$ e seja Z_ξ, Z_ρ os subespaços de $\mathbb{R}^2$ gerados, respectivamente, pelos auto-vetores $\xi,\rho\in\mathbb{R}^2$ associados aos auto-valores 0 e $-\frac{2}{3}$ de $F'(y^*)=\left[\begin{smallmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right]\in L(\mathbb{R}^2)$.*

Então, existe uma vizinhança $\mathcal{O}(\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right])$ da origem em $\mathbb{R}^2$ e uma função $\Sigma^{y^*}:Z_\xi\to Z_\rho$, tal que o conjunto instável local do equilíbrio zero de (1.9.25) é dada por

$$W^u_{\mathrm{loc}}(\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right])=\{\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\xi+\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\rho\in\mathcal{O}(\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]):\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\xi+\Sigma^{y^*}(\left[\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}\right]_\xi)\}.$$

Além disso, existem constantes $M\geqslant 1$ e $\gamma>0$ tais que

$$\|\left[\begin{smallmatrix}\tilde u\\ \tilde v\end{smallmatrix}\right]_\rho(t)-\Sigma^{y^*}(\left[\begin{smallmatrix}\tilde u\\ \tilde v\end{smallmatrix}\right]_\xi(t))\|_{\mathbb{R}^2}\leqslant Me^{-\gamma t}\|\left[\begin{smallmatrix}\tilde u\\ \tilde v\end{smallmatrix}\right]_\rho(0)-\Sigma^{y^*}(\left[\begin{smallmatrix}\tilde u\\ \tilde v\end{smallmatrix}\right]_\xi(0))\|_{\mathbb{R}^2}, \tag{1.9.27}$$

sempre que $\left[\begin{smallmatrix}\tilde u\\ \tilde v\end{smallmatrix}\right](s)$ pertence a $\mathcal{O}(\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right])$ para cada $s\in[0,t]$.

Prova: Para a prova da existência de uma função Lipschitz contínua $\Sigma^{y^*} : Z_\xi \to Z_\rho$ tal que

$$W^u_{loc}(y^*) \subset \Gamma(\Sigma^{y^*}_{|\mathcal{O}([\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}])}) \tag{1.9.28}$$

fazemos referência à [8] (também pode ser adaptada das demonstrações do Capítulo 5). Simplesmente observamos que esta parte da análise é completamente análoca ao caso infinito dimensional considerado em [8, Corolário 4.5 e Apêndice] e e o fato que $\{S_\xi(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo de contrações não causa qualquer alteração essencial no argumento dado em [8].

A propriedade de decaimento do semigrupo projetado $\{S_\xi(t) : t \geqslant 0\}$ as $t \to -\infty$ foi suado em [8] somente para assegurar que $\Gamma(\Sigma^{y^*}_{|\mathcal{O}([\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}])}) \subset W^u_{loc}(y^*)$. Contudo, para o problema considerado neste exemplo, isto segue do Corolário 1.9.14 e (1.9.28). ■

Concluímos que o semigrupo associado a $(1.9.17)_{|_{\alpha=\frac{1}{3}}}$ tem conjuntos instáveis locais de equilíbrios que atraem exponencialmente e portanto, para $\alpha = \frac{1}{3}$, Teorema 1.9.6 ainda se aplica com $\Xi = \mathcal{E}$.

Exemplo 1.9.16 *Agora consideramos semigrupos gradient-like em espaços de Banach X (veja Definição 1.4.3)*

Definição 1.9.17 *Seja X um espaço de Banach e $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo em X para o qual $S(1) : X \to X$ é continuamente diferenciável. Se e^* é um ponto de equilíbrio para $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ e $L := D_x S(1)(e^*) \in \mathcal{L}(X)$, diremos que e^* se, e somente se, $\sigma(L) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \varnothing$.*

Segue dos resultados em [5] (veja Seção 5.4) que se o semigrupo $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ tem todos os equilíbrios hiperbólicos, os conjuntos instáveis locais $W^u_{loc}(y^*)$ de cada equilíbrio y^* de $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ está contido no gráfico de uma função Lipschitz definida em um subespaço de X e $W^u_{loc}(y^*)$ é exponencialmente atrator. Claramente um equilíbrio hiperbólico é um equilíbrio isolado.

O resultado a seguir da condições sob as quais o conjunto dos pontos de equilíbrios atraem pontos.

***Lema* 1.9.18** *Seja $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo em um espaço métrico X que tem um atrator global A e um conjunto de pontos de equlíbrio $\mathcal{E}$ finito. Suponha que $(G2)$ e*

$(G1)'$ *dada uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ em A, $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\phi(t), \mathcal{E}) = 0$,*

estão satisfeitas. Então $\mathcal{E}$ atrai pontos de X sob a ação de $\{S(t) : t \geqslant 0\}$

Prova: *Se $v \in X$ e $\omega(v) \cap \mathcal{E} = \varnothing$ chegamos a uma contradição do fato que $\omega(v)$ é invariante e da condição $(G1)'$. Se $\omega(v)\cap\mathcal{E} \neq \varnothing$ e $\omega(v)$ não é unitário podemos facilmente mostrar que we can easily show that this each equilibria in $\omega(v)$ é recorrente por cadeias o que contradiz $(G2)$.* ■

***Corolário* 1.9.19** *Se $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like em X, seu conjunto de pontos de equiíbrio atrai pontos.*

As considerações da Seção 1.9 nos dão.

***Corolário* 1.9.20** *Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo gradient-like em um espaço de Banach X com todos os equilíbrios hiperbólicos. Suponha que existam constantes $L, c > 0$ e uma vizinhança V de $\mathcal{A}$ em X tal que*

$$\sup_{x,y\in V} d(T(t)x, T(t)y) \leqslant Ce^{Lt} \tag{1.9.29}$$

Então o Teorema 1.9.6 se aplica e consequentemente, esses semigrupos possuem atrator global exponencial.

Observamos que em [12, Teorema 1.5] foi mostrado que, sob hipóteses oportunas, semigrupos $\{S_\eta(t) : t \geqslant 0\}$, $\eta \in (0, \eta_0]$ que são perturbações, de um semigrupo gradient-like $\{S_0(t) : t \geqslant 0\}$ são também gradient-like. O Corolário 1.9.20 pode ser extendido a perturbações oportuanamente "pequenas" de semigrupos gradient-like.

Note que, qualquer semigrupo $\{S(t) : T \geqslant 0\}$ em um espaço métrico X que possua um atrator global, um conjunto de equilíbrios finito e é gradiente (no sentido da Definição 1.3.1) também é gradient-like. Consequentemente obtemos o seguinte resultado.

***Corolário* 1.9.21** *O Teorema 1.9.6 se aplica a qualquer semigrupo gradiente com todos os seus equilíbrios sendo hiperbólicos.*

Capítulo 2

Dimensão fractal de atratores

A seguir lidamos com a teoria de dimensão fractal de atratores para semigrupos em espaços de Banach de dimensão infinita. Esta teoria trata de responder se os atratores dos semigrupos em espaços de Banach de dimensão infinita podem ser vistos como objetos em espaços de dimensão finita.

No que se segue, primeiramente mostraremos que um subconjunto compacto, com dimensão fractal finita em um espaço de Banach de dimensão infinita, pode ser projetado de forma injetiva em um subespaço de dimensão finita. Em seguida mostraremos que os atratores para semigrupos (suaves) em espaços de Banach de dimensão infinita tem dimensão fractal finita. Isto mostra que os objetos dinâmicos contidos nos atratores de semigrupos (suaves) em espaços de Banach de dimensão infinita são finito dimensionais.

Neste capítulo apresentamos os resultados de John Mallet-Paret [46] e Mañé [47] sobre a dimensão fractal de conjuntos negativamente invariantes. A demonstração dos resultados apresentados aqui são simplificações e, em alguns casos, melhoria dos resultados de John Mallet-Paret e Ricardo Mañe (veja [14]).

Existem provas alternativas desses resultados que buscam encontrar estimativas ótimas da dimensão fractal. É minha opinião que essas provas alternativas (veja por exemplo [62, 43]) são inspiradas nos trabalhos de John Mallet-Paret e Mañe, são mais difíceis e não fica claro que as estimativas obtidas para a dimensão são efetivamente melhores que aquelas dadas em [14].

Antes de continuarmos, vamos brevemente relembrar as noções de dimensão de Hausdorff e dimensão fractal.

2.1 Dimensão topológica, de Hausdorff e fractal

Nesta seção apresentamos as noções básicas de dimensão que serão usados no decorrer do capítulo. Começamos por recordar a noção de dimensão topológica (veja [50]).

Se K é um espaço topológico, diremos que K tem dimensão finita se existir um natural n tal que, toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de K possui um refinamento $\mathcal{U}'$ com a propriedade que cada ponto de K pertence a no máximo $n+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$. Neste caso, a dimensão $\dim(K)$ de K é o mínimo n com esta propriedade. Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n e, se K é um espaço métrico compacto de dimensão finita, então é homeomorfo a algum subconjunto de $\mathbb{R}^{2\dim(K)+1}$ (veja Teorema 50.5 em [50]).

Uma outra noção de dimensão é a dimensão de Hausdorff que, muitas vezes, pode ser computada de maneira mais simples (como veremos mais adiante) que a dimensão topológica e fornece um limitante superior para a dimensão topológica.

A seguir apresentamos uma revisão de alguns conceitos e resultados elementares relativos à medida e dimensão de Hausdorff num espaço métrico (X,ρ). Para uma abordagem mais completa veja por exemplo [32, 33]. Uma medida exterior $\mu^*: 2^X \to [0,\infty]$ é uma função que satisfaz

$$\mu^*(\varnothing) = 0$$

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B), \quad \text{sempre que } A \subset B$$

$$\mu^*\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j), \quad \text{para qualquer seqüência } \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ em } 2^X.$$

Um conjunto $E \subset X$ é dito μ^*-mensurável se para cada $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Uma medida exterior μ^* em X é chamada uma *medida exterior métrica* se

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

sempre que $\rho(A, B) > 0$.

Proposição 2.1.1 *Se μ^* é uma medida exterior métrica em X, então todo subconjunto fechado de X e, consequentemente, todo subconjunto de Borel de X é μ^*-mensurável.*

Prova: Uma vez que os conjuntos fechados geram a $\sigma-$algebra de Borel, é suficiente mostrar que todo subconjunto fechado de X é μ^*-mensurável. Dado $A \subset X$ com $\mu^*(A) < \infty$, queremos mostrar que

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c).$$

Seja $B_n = A \cap \left(\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F)\right)^c$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Então B_n é uma seqüência crescente de conjuntos e, como F é fechado, $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = A \cap F^c$. Como μ^* é uma medida exterior métrica e $\rho(B_n, F) \geqslant \frac{1}{n}$,

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*((A \cap F) \cup B_n) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(B_n).$$

Com isto, a prova estará concluída se mostrarmos que $\mu^*(B_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu^*(A \cap F^c)$. Seja $C_n = B_{n+1} \cap B_n^c$. Se $x \in C_{n+1}$ e $\rho(x, y) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, então

$$\rho(y, F) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, F) < \frac{1}{n}$$

e, consequentemente $\rho(C_{n+1}, B_n) \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Disto segue que

$$\begin{aligned}
\mu^*(B_{2k+1}) &\geqslant \mu^*(C_{2k} \cup B_{2k-1}) = \mu^*(C_{2k}) + \mu^*(B_{2k-1}) \\
&\geqslant \mu^*(C_{2k}) + \mu^*(C_{2k-2}) + \mu^*(B_{2k-3}) \\
&\geqslant \sum_{j=1}^{k} \mu^*(C_{2j}).
\end{aligned}$$

De maneira semlhante obtemos que $\mu^*(B_{2k}) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \mu^*(C_{2j-1})$.

Como $\mu^*(B_n) \leqslant \mu^*(A) < \infty$, segue que as series $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j-1})$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j})$ são convergentes. Por subaditividade temos que

$$\mu^*(A \cap F^c) \leqslant \mu^*(B_n) + \sum_{j=n}^{\infty} \mu^*(C_j)$$

e consequentemente

$$\mu^*(A \cap F^c) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu^*(B_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mu^*(B_n) \leqslant \mu^*(A \cap F^c)$$

e a prova está completa. ■

A seguir apresentamos a definição e algumas propriedades básicas da dimensão de Hausdorff. Para um espaço métrico (X,ρ), $\alpha > 0$, e $\epsilon > 0$. Se $A \subset X$, seja

$$\mu_\epsilon^{(\alpha)}(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_i))^\alpha : \ A \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_i, \ \mathrm{diam}(B_i) < \epsilon \right\},$$

com a convenção $\inf \varnothing = \infty$. Como $\mu_\epsilon^{(\alpha)}(A)$ cresce quando ϵ decresce definimos

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{\epsilon\to 0} \mu_\epsilon^{(\alpha)}(A).$$

Proposição 2.1.2 *Seja $\alpha' > \alpha > 0$. Se $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, então $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$ e, se $\mu^{(\alpha')}(A) > 0$, então $\mu^{(\alpha)}(A) = \infty$.*

Prova: É suficiente provar a primeira afirmação, uma vez que a segunda é sua contrapositiva. Se $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, para todo $\delta > 0$ existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\mathrm{diam}(B_j) \leqslant \delta$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^\alpha \leqslant \mu^{(\alpha)}(A) + 1.$$

Mas para $\alpha' > \alpha$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^{\alpha'} \leqslant \delta^{\alpha'-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^\alpha \leqslant \delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{(\alpha)}(A) + 1],$$

logo $\mu_\delta^{(\alpha')}(A) \leqslant \delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{(\alpha)}(A) + 1] \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ e $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$. ■

Definição 2.1.3 *Para qualquer $A \subset X$, a* dimensão de Hausdorff *de A é definida pelo número real não-negativo dado por*

$$\inf\{\alpha \geqslant 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geqslant 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = \infty\}.$$

Observação 2.1.4 *Sabemos que (veja Hurewicz & Wallman [40])* $\dim(K) \leqslant \dim_H(K)$.

Proposição 2.1.5 *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Para cada $\alpha > 0$ e $\delta > 0$, $\mu_\delta^{(\alpha)} : 2^X \to [0, \infty]$ é uma medida exterior.*

Prova: Fixe δ e α positivos. Claramente $\mu_\delta^{(\alpha)}(\varnothing) = 0$ e $\mu_\delta^{(\alpha)}(A) \leqslant \mu_\delta^{(\alpha)}(B)$ sempre que $A \subset B$. Se $\epsilon > 0$, $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ é uma seqüência em 2^X e para cada $j \in \mathbb{N}^*$ existe uma seqüência $\{B_i^j\}_{i=1}^\infty$ com $A_j \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i^j$, $\mathrm{diam}(B_i^j) < \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, e $\sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam}(B_i^j))^\alpha \leqslant \mu_\delta^\alpha(A_j) + \epsilon 2^{-j}$, então $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \subset \bigcup_{j,i=1}^\infty B_i^j$ e

$$\mu_\delta^{(\alpha)}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leqslant \sum_{i,j=1}^\infty (\mathrm{diam}(B_i^j))^\alpha \leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j) + \epsilon.$$

Segue que $\mu_\delta^{(\alpha)}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu_\delta^{(\alpha)}(A_j)$. O resultado segue agora imediatamente. ∎

Com isto temos que

Teorema 2.1.6 *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Para cada $\alpha > 0$, $\mu^{(\alpha)} : 2^X \to [0, \infty]$ é uma medida exterior métrica.*

Prova: Segue imediatamente da Proposição 2.1.5 que $\mu^{(\alpha)}$ é uma medida exterior. Sejam A, B subconjuntos de X tais que $\rho(A, B) > 0$ e seja $\epsilon < \rho(A, B)$. É fácil ver que

$$\mu_\epsilon^{(\alpha)}(A \cup B) = \mu_\epsilon^{(\alpha)}(A) + \mu_\epsilon^{(\alpha)}(B).$$

Tomando o limite quando ϵ tende a zero temos que $\mu^{(\alpha)}(A \cup B) = \mu^{(\alpha)}(A) + \mu^{(\alpha)}(B)$. Isto prova o resultado. ∎

Lema 2.1.7 *Sejam (X,ρ) um espaço métrico e $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência crescente de subconjuntos de X. Se $A = \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, $\mu^{\alpha}(A) < \infty$ e $d(A_j, A\backslash A_{j+1}) > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, então $\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{j\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j)$.*

Prova: Segue imediatamente da monotonicidade que existe o limite $\lim_{j\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j)$ e que $\lim_{j\to\infty} \mu^{(\alpha)}(A_j) \leqslant \mu^{(\alpha)}(A)$. Seja $B_1 = A_1$ e $B_j = A_j\backslash A_{j-1}$, $j \geqslant 2$. Claramente, cada dois conjuntos na família $\{B_{2j-1}\}_{j=1}^{\infty}$ ou na família $\{B_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$ são positivamente separados e

$$\mu^{(\alpha)}(A) \geqslant \mu^{(\alpha)}\left(\cup_{j=1}^{n} B_{2j-1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu^{(\alpha)}\left(B_{2j-1}\right)$$
$$\mu^{(\alpha)}(A) \geqslant \mu^{(\alpha)}\left(\cup_{j=1}^{n} B_{2j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu^{(\alpha)}\left(B_{2j}\right).$$

Portanto, $2\mu^{(\alpha)}(A) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \mu^{(\alpha)}(B_j)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e a série $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(B_j)$ é convergente.

Agora,

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \mu^{(\alpha)}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \mu^{(\alpha)}(A_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(B_j)$$

e o resultado segue tomando o limite quando $n \to \infty$ no lado direito da expressão acima.

■

Proposição 2.1.8 *$\mu^{(\alpha)} : 2^X \to [0,\infty]$ é invariante sob isometrias de X. Se Y é um conjunto qualquer e $f, g : Y \to X$ são tais que*

$$\rho(f(y), f(z)) \leqslant C\rho(g(y), g(z)),\ \forall\, y, z \in Y,$$

então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant C^{\alpha}\mu^{(\alpha)}(g(A))$ para todo $A \subset Y$.

Prova: A primeira afirmação é óbvia da definição de $\mu^{(\alpha)}$. Se $\mu^{(\alpha)}(g(A)) < \infty$, dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, existe uma cobertura de $g(A)$ por conjuntos B_j tal que $\operatorname{diam}(B_j) \leqslant C^{-1}\delta$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_j))^{\alpha} \leqslant \mu^{(\alpha)}(g(A)) + \epsilon.$$

Os conjuntos $B'_j = f(g^{-1}(B_j))$ cobrem $f(A)$ e $\operatorname{diam}(B'_j) \leqslant C \operatorname{diam}(B_j) \leqslant \delta$, e

$$\mu_\delta^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant C^\alpha \mu^{(\alpha)}(g(A)) + C^\alpha \epsilon.$$

O resultado agora segue fazendo $\delta \to 0$ e fazendo $\epsilon \to 0$. ■

Corolário 2.1.9 *Seja $f : X \to X$ uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $C \geqslant 0$ e $A \subset X$. Então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant C^\alpha \mu^{(\alpha)}(A)$.*

Proposição 2.1.10 *Seja $f : X \to X$ uma função Lipschitz contínua e $A \subset X$. Então $\dim_H(f(A)) \leqslant \dim_H(A)$.*

Prova: Pelo Corolário 2.1.9, temos que se $\mu^\alpha(A) = 0$ então $\mu^\alpha(f(A)) = 0$. Assim $\dim_H(f(A)) \leqslant \dim_H(A)$. ■

Corolário 2.1.11 *Seja $f : X \to X$ uma função Lipschitz contínua, $A \subset X$ e $G(f, A) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ o gráfico de f restrito à A. Então $\dim_H(G(f, A)) = \dim_H(A)$.*

Prova: Sabemos que as aplicações $A \ni x \mapsto (x, f(x)) \in G(f, A)$ e $G(f, A) \ni (x, f(x)) \mapsto x \in A$ são Lipschitz contínuas, e da proposição acima segue que

$$\dim_H(G(f, A)) \leqslant \dim_H(A) \leqslant \dim_H(G(f, A)).$$ ■

Proposição 2.1.12 *Seja $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos em X e seja $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Então*

$$\dim_H(A) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j).$$

Prova: Segue diretamente da monotonicidade que $\dim_H(A) \geqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j)$. Seja $\alpha > \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j)$, assim

$$\mu^\alpha(A) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^\alpha(A_j) = 0.$$

Portanto $\dim_H(A) \leqslant \alpha$. Como $\alpha > \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j)$ é arbitrário, temos o resultado. ■

Exercício 2.1.13 *Seja X espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ com de dimensão finita n. Mostre que a medida exterior $\mu^\alpha : 2^X \to [0,\infty]$ é identicamente nula se $\alpha > n$.* Sugestão: Conclua que basta mostrar que $\mu^\alpha([-1,1]^n) = 0$ e que o resultado independe da norma utilizada.

Vamos agora nos voltar para os atratores de tipo gradiente em espaços de Banach. Seja $\mathcal{E} = \{e_1^*, \ldots, e_p^*\}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, e suponha que $T = T(1) \in \mathcal{C}(X)$ é uma aplicação Lipschitz contínua. Sabemos que o atrator global $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{p} W^u(e_j^*).$$

Suponha que um conjunto instável local $W^u_{\rm loc}(e_i^*)$ de cada ponto de equilíbrio é o gráfico de uma função Lipschitz contínua com domínio contendo uma bola de Q_iX, onde Q_i é uma projeção de posto finito, $1 \leqslant i \leqslant p$. Do Corolário 2.1.11 e da Proposição 2.1.10, sabemos que

$$\begin{aligned}
&\dim_H(W^u_{\rm loc}(e_i^*)) = \dim_H(Q_iX) < \infty, \text{ para cada } i = 1, \ldots, p,\\
&\dim_H(T^n W^u_{\rm loc}(e_i^*)) \leqslant \dim_H(W^u_{\rm loc}(e_i^*)).
\end{aligned}$$

Facilmente, vemos que $W^u(e_i^*) = \bigcup_{n=0}^\infty T^n(W^u_{\rm loc}(e_i^*))$ e, utilizando a Proposição 2.1.12, temos

$$\begin{aligned}
\dim_H(Q_iX) =& \dim_H(W^u_{\rm loc}(e_i^*)) \leqslant \dim_H(W^u(e_i^*)) =\\
=& \dim_H\left(\bigcup_{n=0}^\infty T^n W^u_{\rm loc}(e_i^*)\right) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_H(T^n W^u_{\rm loc}(e_i^*)) \leqslant\\
\leqslant& \dim_H(W^u_{\rm loc}(e_i^*)) = \dim_H(Q_iX),
\end{aligned}$$

e portanto $\dim_H(W^u(e_i^*)) = \dim_H(Q_iX)$, para todo $i = 1, \ldots, p$.

Como $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^p W^u(e_i^*)$, temos que $\dim_H(\mathcal{A}) = \max_{1\leqslant j\leqslant p} \dim_H(Q_iX)$.

Agora vamos apresentar a definição de dimensão fractal. Seja K um espaço métrico compacto. Defina $N(r,K)$ como o número mínimo de bolas de raio r necessário para cobrir K. A *dimensão fractal* $c(K)$ de K é definida por:

$$c(K) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(r,K)}{\log(1/r)}.$$

Alternativamente, $c(K)$ é o menor número para o qual, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$N(r, K) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\epsilon}, \quad 0 < r < \delta.$$

Como podemos ver, multiplicando a expressão acima por $(2r)^\alpha$ obtemos

$$\mu_r^{(\alpha)}(K) \leqslant 2^\alpha N(r, K) r^\alpha \leqslant 2^\alpha \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\epsilon-\alpha}, \quad 0 < r < \delta.$$

Assim, $\mu_r^{(c(K)+\eta)}(K) \leqslant 2^\alpha \left(\frac{1}{r}\right)^{\epsilon-\eta}$ para $0 < r < \delta$ e para todo $\eta > 0$. Fazendo $r \to 0$ temos $\mu^{(c(K)+\eta)}(K) = 0$, para todo $0 < \epsilon < \eta$. Da definição de dimensão de Hausdorff, segue facilmente que

$$\dim_H(K) \leqslant c(K). \tag{2.1.1}$$

Mais ainda, $c(K)$ e $\dim_H(K)$ podem ser diferentes.

<u>Exercício</u> 2.1.14 *Encontre exemplos de seqüências que convergem para zero e têm dimensão fractal positiva. Existem conjuntos com dimensão fractal infinita e com dimensão de Hausdorff finita (veja [47]).*

<u>Exercício</u> 2.1.15 *Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico X. Mostre que, se $\alpha > 0$ e $\eta \in (0, 1)$, então*

$$c(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\alpha\eta^n, K)}{-\log(\alpha\eta^n)}.$$

Mais geralmente, se $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente em $(0, \infty)$ com $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\log \frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, então $c(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(a_n, K)}{-\log(a_n)}$.

<u>Lema</u> 2.1.16 *Seja X um espaço vetorial normado e K_1, K_2 subconjuntos compactos de X. Então $c(K_1 + K_2) \leqslant c(K_1) + c(K_2)$.*

Prova: Note que, se $N_i = N(r, K_i)$ existem $x_1^i, \cdots, x_N^i$ em K tais que $K_i \subset \cup_{j=1}^{N_i} B_r(x_j^i)$ e consequentemente $K_1 + K_2 \subset \cup_{i=1}^{N_2} \cup_{j=1}^{N_1} \left(B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2)\right)$. Como $B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2) =$

$B_{2r}(x_j^1 + x_i^2)$ temos que $N(2r, K_1 + K_2) \leqslant N(r, K_1)N(r, K_2)$ e consequentemente

$$\begin{aligned} c(K_1 + K_2) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(2r, K_1 + K_2)}{\log(1/2r)} \leqslant \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(r, K_1)N(r, K_2)}{\log(1/2r)} \\ &\leqslant \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(r, K_1)}{\log(1/r)} + \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(r, K_2)}{\log(1/r)} = c(K_1) + c(K_2). \blacksquare \end{aligned}$$

Como consequência imediata do Lema 2.1.16 temos que

Corolário 2.1.17 *Seja X um espaço vetorial normado e K um subconjunto compacto de X. Se $c(K) < \infty$, então $c(K - K) \leqslant 2c(K)$.*

2.2 Projeções de compactos com dimensão fractal finita

Como já mencionamos anteriormente, gostaríamos de enxergar os atratores de semigrupos como objetos de dimensão finita, mesmo quando o semigrupo está num espaço de Banach de dimensão infinita. Para isso vamos mostrar que conjuntos compactos que têm dimensão fractal finita podem ser projetados, de maneira injetiva, num espaço vetorial de dimensão finita. Antes disso provaremos alguns resultados básicos de análise funcional.

Se X é um espaço de Banach e Y é um subespaço fechado de X seja

$$\mathcal{P}(X, Y) := \{P \in \mathcal{L}(X) : P^2 = P \text{ e } P(X) = Y\}$$

com a topologia uniforme de operadores.

Lema 2.2.1 *Seja X um espaço de Banach, Y subespaço fechado de X tal que $\mathcal{P}(X, Y) \neq \varnothing$ e J um subconjunto compacto de X. Defina*

$$\mathcal{P}_J = \{P \in \mathcal{P}(X, Y) : N(P) \cap J = \varnothing\}.$$

Então, $\mathcal{P}_J$ é aberto em $\mathcal{P}(X, Y)$.

Prova: Dada uma projeção $P \in P_J$, notemos que $\epsilon = \text{dist}(N(P), J) > 0$. Escolha $s > 2t > 2\epsilon$ onde t é tal que $B_t(0) \supset J$ e seja $\bar{P} \in \mathcal{P}(X, Y)$ tal que $\|P - \bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\epsilon}{s}$.

Então,

$$\begin{aligned}\inf_{x\in N(\bar P)} \operatorname{dist}(x,J) =: \operatorname{dist}(N(\bar P),J) &= \operatorname{dist}((I-\bar P)B_s(0),J)\\ &\geqslant \operatorname{dist}((I-P)B_s(0),J) - \sup_{x\in B_s(0)} \|\bar P x - Px\|_X\\ &= \operatorname{dist}(N(P),J) - s\|\bar P - P\|_{\mathcal{L}(X)} > 0.\end{aligned}$$

Segue que $N(\bar P)\cap J = \varnothing$ e $\bar P \in P_J$, provando que P_J é aberto. ∎

No restante desta seção assumiremos que X é um espaço de Banach, Y um subespaço de dimensão finita de X, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos compactos de X e $K = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Lema 2.2.2 *Seja X um espaço de Banach. Então, existe uma sequência $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em X^* tal que, se $x \in \operatorname{span}(K)$ e $\phi_i(x) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $x = 0$.*

Prova: Seja W o fecho do subespaço de X gerado por K. Como K é uma união enumerável de conjuntos compactos, K é separável e consequentemente W é um espaço de Banach separável. Do fato de que $B_1^{W^*}(0)$ é compacto e metrizável na topologia fraca-estrela $\sigma(W^*,W)$, segue que existe uma sequência densa $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(B_1^{W^*}(0),\sigma(W^*,W))$. Agora se $x\in W$ e $\phi_i(x)=0$ para todo $n\in N$, segue que $\phi(x)=0$ para todo $\phi\in B_1^{W^*}(0)$ e temos que $x=0$. A sequência desejada é obtida estendendo ϕ_i a X, via Teorema de Hahn-Banach, para cada $i\in\mathbb{N}$. ∎

Lema 2.2.3 *Dado $r>0$, $n\in\mathbb{N}$, se*

$$A_{n,r} = \{z\in K_n - K_n : \|z\|_X \geqslant r\} = (K_n - K_n)\cap\{x\in X : \|x\|_X \geqslant r\},$$

então $A_{n,r}$ é um subconjunto compacto de X.

Prova: Como $X\times X \ni (x,y)\mapsto x-y\in X$ é contínua, segue que $K_n - K_n$ é compacto e consequentemente $A_{n,r}$ é um compacto em X. ∎

Lema 2.2.4 *Se*

$$\mathcal{P}_{n,r} = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : \ \mathrm{diam}(P^{-1}(y) \cap K_n) < r, \ \forall\, y \in Y\}, \tag{2.2.1}$$

então $P \in P_{n,r}$ se, e somente se, $N(P) \cap A_{n,r} = \varnothing$

Prova: Suponha que existe um $y \in N(P) \cap A_{n,r}$, então $Py = 0$ e existem $v, w \in K_n$ tais que $y = v - w$, $\|v - w\|_X \geqslant r$. Se $z = Pv = Pw$ então $\mathrm{diam}\,(P^{-1}(z) \cap K_n) \geqslant r$ e $P \notin P_{n,r}$.

Por outro lado, se $N(P) \cap A_{n,r} = \varnothing$, para todo $y \in Y$ e $v, w \in P^{-1}(y) \cap K_n$, temos que $v - w \in N(P)$ e portanto devemos ter $\|v - w\|_X < r$. Como $P^{-1}(y) \cap K_n$ é compacto, segue que $\mathrm{diam}(P^{-1}(y) \cap K_n) < r$. Isto completa a demonstração. ■

O resultado a seguir é conseqüência imediata da caracterização de $P_{n,r}$ dado no Lema 2.2.4 e do Lema 2.2.1.

Corolário 2.2.5 *Se $P_{n,r}$ definida por* (2.2.1)*, então $P_{n,r}$ é aberto em $\mathcal{P}(X,Y)$ com a topologia uniforme de operadores.*

Teorema 2.2.6 (Mañé [47], Lema 1.1) *Se X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$, $K = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ com K_n compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dim_H(K - K) < \infty$ e Y é um subespaço de X com $\dim_H(K - K) + 1 < \dim Y < \infty$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K$ é injetora $\}$ é residual em $\mathcal{P}(X,Y)$.*

Prova: Usando a definição de $P_{n,r}$ dada em (2.2.1), não é difícil ver que

$$\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K \text{ é injetora }\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} P_{n,\frac{1}{m}}$$

Seja Q a aplicação quociente de X sobre $Z = X/Y$. Então,

$$Q(A_{n,r}) \setminus \{0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ Q(v) : v \in A_{n,r}, \ \|Q(v)\|_Z \geqslant \frac{1}{m} \right\}$$

onde, cada $\left\{Q(v) : v \in A_{n,r}, \ \|Q(v)\|_Z \geqslant \frac{1}{m}\right\}$ é compacto. Segue do Lema 2.2.2 que existe uma sequência $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em Z^*, tal que, se $z \in \mathrm{span}(Q(A_{n,r}))$ e $\phi_i(z) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $z = 0$. Seja

$$A_{n,r,i,j} = \{v \in A_{n,r} : |\phi_i(Q(v))| \geqslant 1/j\,\}\,.$$

Então

$$A_{n,r} = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{n,r,i,j}\right) \cup (A_{n,r} \cap Y)\,,$$

$$N(P) \cap A_{n,r} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (N(P) \cap A_{n,r,i,j})\,,$$

$$P_{n,r,i,j} = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : N(P) \cap A_{n,r,i,j} = \varnothing\} \quad \text{e}$$

$$P_{n,r} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{j\in\mathbb{N}} P_{n,r,i,j}.$$

Como $A_{n,r}$ é compacto (vide Lema 2.2.3) segue facilmente que $A_{n,r,i,j}$ é compacto. Segue do Lema 2.2.1 obtemos que $P_{n,r,i,j}$ é aberto. Portanto, a prova fica reduzida a mostrar que para cada $n, i, j \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X,Y)$.

Seja $P_0 \in \mathcal{P}(X,Y)$ e defina $\psi : Y\backslash\{0\} \to S = \{y \in Y : \|y\|_X = 1\}$ por $\psi(y) = y/\|y\|_X$. Então

$$\psi\left(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\}\right) = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}^*} \psi\left(P_0(A_{n,r}) \cap [Y\backslash B^Y_{1/\ell}(0)]\right)$$

e, da Proposição 2.1.12,

$$\dim_H(\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})) \leqslant \sup_{\ell\in\mathbb{N}^*} \dim_H(\psi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y\backslash B^Y_{1/\ell}(0)])).$$

Note que, ψ restrito à $P_0(A_{n,r}) \cap [Y\backslash B^Y_{1/\ell}(0)]$ é Lipschitz contínua. Consequentemente, da Proposição 2.1.10,

$$\dim_H(\psi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y\backslash B^Y_{1/\ell}(0)])) \leqslant \dim_H(P_0(A_{n,r})).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\dim_H(\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})) &\leqslant \dim_H(P_0(A_{n,r}))) \leqslant \dim_H(A_{n,r}) \\ &\leqslant \dim_H(K_n - K_n) \leqslant \dim_H(K - K) < \dim(Y) - 1.\end{aligned}$$

Disto obtemos que existe $u \in S\backslash[\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})]$. De fato, se este não é o caso, então $S = \psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})$ e $\dim(Y) - 1 = \dim_H(S) = \dim_H(\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})) \leqslant \dim_H(K - K)$ o que contradiz a nossa hipótese.

Dado $\epsilon > 0$, $i, j \in \mathbb{N}$ definimos

$$P_\epsilon(x) = P_0(x) + \epsilon\phi_i(Q(x))u.$$

Como $P_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$ com imagem em Y e relembrando que se $y \in Y$, então $Qy = 0$ é fácil ver que $P_\epsilon \in \mathcal{P}(X, Y)$.

Se $P_\epsilon(x) = 0$ temos que

$$P_0(x) = -\epsilon\phi_i(Q(x))u.$$

Além disso, se $x \in A_{n,r,i,j}$, então $\phi_i(Q(x)) \neq 0$. Portanto

$$u = -(\epsilon\phi_i(Q(x)))^{-1}P_0(x) \ \text{ e } \ \psi(P_0(x)) = \pm\psi(u).$$

Como $u \in S$, $u = \psi(u)$ e assim $\pm u = \psi(P_0(x)) \in \psi(P_0(A_{n,r,i,j})\backslash\{0\})$. Consequentemente $u \in \psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})$ contradizendo a escolha de u e mostrando que $P_\epsilon \in P_{n,r,i,j}$.

Como $\|P_\epsilon - P_0\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$ temos que $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$. ∎

Segue diretamente de (2.1.1), do Corolário 2.1.17 e da prova do Teorema 2.2.6 que

Corolário 2.2.7 *Se $c(K) < \infty$ e Y é um subespaço de X com $2c(K) + 1 < \dim Y < \infty$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X, Y) : P|_K$ é injetora $\}$ é residual em $\mathcal{P}(X, Y)$.*

2.3 Dimensão de compactos negativamente invariantes

Exploramos na seção anterior a projeção de conjuntos compactos com dimensão fractal finita em espaços vetoriais de dimensão finita de maneira injetiva. Para concluir o nosso estudo sobre atratores, resta-nos mostrar que estes, em geral, tem dimensão fractal finita, o que nos mostrará que eles são de fato objetos de dimensão finita.

Nesta seção, nos dedicamos a apresentar, corrigir e melhorar os resultados apresentados em Mañé [47] e em Hale [34] sobre dimensão de conjuntos compactos negativamente invariantes.

Para prosseguirmos, apresentaremos a noção de *distância de Banach-Mazur* (veja [6] para um tratamento mais completo) entre dois espaços normados isomorfos e enunciaremos um resultado que melhora a estimativa obtida por Mañé, seguindo [14].

Definição 2.3.1 *Sejam X e Y dois espaços normados isomorfos. Definimos a* distância de Banach-Mazur *entre X e Y por*

$$\mathrm{d}_{BM}(X,Y) = \log(\inf\{\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} : T \in \mathcal{L}(X,Y),\ T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)\}).$$

Podemos ver facilmente que, para dois espaços normados de mesma dimensão finita X e Y, $\mathrm{d}_{BM}(X,Y) = 0$ se, e somente se, X e Y são isometricamente isomorfos.

Denotemos também $\mathbb{K}^m_\infty$ o espaço $\mathbb{K}^m$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$); isto é, para $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^m$ com $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_m)$, onde $z_i \in \mathbb{K}$ temos

$$\|\mathbf{z}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,m} |z_i|_{\mathbb{K}}.$$

Nosso primeiro objetivo nesta seção será provar a estimativa $\mathrm{d}_{BM}(X, \mathbb{K}^m_\infty) \leqslant \log m$, onde X é um espaço de Banach m-dimensional. Para isto faremos uso de uma base de Auerbach para X. Vamos então estabelecer a existência de tais bases.

Lema 2.3.2 *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão n. Então, existem bases $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de X e $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$ de X^* com $\|x_i\|_X = \|x_i^*\|_{X^*} = 1$ e $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Neste caso $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é chamada uma base de Auerbach para X.*

Prova: Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para X. Dada uma n-upla de vetores $\{y_1, \cdots, y_n\}$ em X, seja $\hat{y}_j$ a matriz coluna das coordenadas y_j na base $\mathcal{B}$ e considere a função $X^n \ni (y_1, \cdots, y_n) \mapsto \det[\hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n] \in \mathbb{K}$ (X^n é o produto de n copias de X).

Seja B a bola fechada unitária em X e B^n o produto de $n-$copias de B. Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é um ponto onde a função $|\det(\cdot, \cdots, \cdot)|$ atinge um máximo em B^n, $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base para X, pois $\det[\hat{x}_1, \cdots \hat{x}_n] \neq 0$, e cada x_j tem norma 1 (caso contrário um múltiplo dele por um número real maior que um ainda estaria em B o que contradiria a escolha de $\{x_1, \dots, x_n\}$). Defina

$$x_j^*(x) = \frac{\det[\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_{j-1}, \hat{x}, \hat{x}_{j+1} \cdots \hat{x}_n]}{\det[\hat{x}_1, \cdots \hat{x}_n]}$$

É claro que $x_j^*(x_k) = \delta_{jk}$ e que $\|x_j^*\|_{X^*} = 1$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$. ■

Uma prova geométrica do Lema 2.3.2: No caso em que X é um espaço de vetorial normado sobre $\mathbb{R}$, a prova acima tem uma versão geométrica que apresentamos a seguir. Se $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, tome vetores $\{x_1, \cdots, x_n\}$ com $\|x_i\|_X = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e tal que a envoltória convexa fechada $\overline{co}\{0, x_1, \cdots, x_n\}$ tenha volume máximo. Defina x_i^* tal que $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ e $1 \leqslant i \leqslant n$. Resta somente provar que $\|x_i^*\|_{X^*} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Claramente $\|x_i^*\|_{X^*} \geqslant 1$.

Se $\|x_i^*\|_{X^*} > 1$, seja $y_i \in X$ com $\|y_i\|_X = 1$ tal que $x_i^*(y_i) > 1$. Note que $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i^*(x) = 1\}$ define um hiperplano paralelo ao hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i^*(x) = 0\} = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n\}$. Portanto $\overline{co}\{0, x_1, \cdots, x_n\}$ tem volume estritamente menor que $\overline{co}\{0, x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n\}$ e temos uma contradição. ■

Agora, com a existência da base de Auerbach para espaços de dimensão finita, podemos prosseguir com um importante resultado sobre a distância de Banach-Mazur, que é uma melhora na estimativa feita por Mañé, que afirma que, se Y é um espaço de Banach m-dimensional sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), então

$$\mathrm{d}_{BM}(Y, \mathbb{K}_\infty^m) \leqslant \log(m2^m).$$

Proposição 2.3.3 *Seja Y um espaço de Banach m-dimensional sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Então $\mathrm{d}_{BM}(Y, \mathbb{K}_\infty^m) \leqslant \log m$.*

Prova: Seja $\{x_1, \cdots, x_m\}$ uma base de Auerbach para Y, e $\{x_1^* \cdots, x_m^*\}$ a base correspondente de Y^*. Defina a aplicação $T : \mathbb{K}_\infty^m \to Y$ da seguinte maneira

$$T(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{m} z_j x_j.$$

Então

$$\|T(\mathbf{z})\|_Y = \left\| \sum_{j=1}^{m} z_j x_j \right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{m} |z_j| \leqslant m \|\mathbf{z}\|_\infty,$$

e portanto

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_\infty^m, Y)} \leqslant m.$$

Por outro lado, se $x = \sum_{j=1}^{m} z_j x_j \in Y$ com $\|x\|_Y \leqslant 1$ então como $z_j = x_j^*(x)$,

$$\|T^{-1}(x)\|_\infty = \|\mathbf{z}\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,m} |z_j| = \max_{j=1,\ldots,m} |x_j^*(x)| \leqslant \|x\|_Y,$$

o que implica que

$$\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, \mathbb{K}_\infty^m)} \leqslant 1,$$

e demonstra nosso resultado. ∎

Exercício 2.3.4 *Mostre que que, dados dois espaços vetoriais normados de dimensão finita m, X e Y, então $d_{BM}(X, Y) \leqslant 2 \log m$.*

Usando o Teorema de John (veja Teorema 4.15 em [6]) é possível mostrar que dados dois espaçs vetoriais normados de dimensão finita m, X e Y, então $d_{BM}(X, Y) \leqslant \log m$.

Sejam X_1, X_2 espaços de Banach e defina

$$\mathcal{L}_\lambda(X_1, X_2) = \{T \in \mathcal{L}(X_1, X_2) : T = L + C \text{ com } C \text{ compacto e } \|L\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)} < \lambda\}.$$

Lema 2.3.5 *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Se Y é um subespaço de X e $\dim(Y) = m$, temos que*

- *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*

$$N(\rho, B_r^Y(0)) \leqslant (m+1)^m \left(\frac{r}{\rho}\right)^m, \ 0 < \rho \leqslant r,$$

- *Se* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$$N(\rho, B_r^Y(0)) \leqslant (m+1)^{2m}\left(\frac{\sqrt{2}r}{\rho}\right)^{2m}, \ 0<\rho\leqslant r,$$

Além disso, as bolas na cobertura podem ser tomadas com centro em Y*.*

Prova: Faremos a prova no caso $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Como Y e $\mathbb{R}^m_\infty$ são m-dimensionais, $\mathrm{d}_{BM}(Y,\mathbb{R}^m_\infty) \leqslant \log m$; em particular, existe um isomorfismo linear $T:\mathbb{R}^m_\infty \to Y$ tal que $\|T\|\|T\|^{-1}\leqslant m$. Como

$$B_r^Y(0) = TT^{-1}(B_r^Y(0)) \subseteq T(B^{\mathbb{R}^m_\infty}_{\|T^{-1}\|r}(0)),$$

$B^{\mathbb{R}^m_\infty}_{\|T^{-1}\|r}(0)$ pode ser coberta por

$$\left(1+\frac{\|T^{-1}\|r}{\rho/\|T\|}\right)^m = \left(1+\|T\|\|T^{-1}\|\,\frac{r}{\rho}\right)^m \leq \left(1+m\,\frac{r}{\rho}\right)^m \leqslant (m+1)^m\left(\frac{r}{\rho}\right)^m$$

bolas em $\mathbb{R}^m_\infty$ de raio $\rho/\|T\|$, segue que $B_r^Y(0)$ pode ser coberta pelo mesmo número de Y-bolas de raio ρ. ■

Exercício 2.3.6 *Faça a prova do Lema 2.3.5 in the case* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Antes de continuarmos precisamos do seguinte Lema:

Lema 2.3.7 *Seja* X *um espaço de Banach e* $T\in\mathscr{L}_{\lambda/2}(X)$. *Então existe um subespaço* Z *de* X *de dimensão finita tal que*

$$\mathrm{dist}_H(T[B_1^X(0)], T[B_1^Z(0)]) < \lambda. \tag{2.3.1}$$

Prova: Escreva $T=L+C$, onde $C\in\mathcal{K}(X)$ e $L\in\mathcal{L}(X)$ com $\|L\|_{\mathcal{L}(X)}<\lambda/2$. Mostremos primeiramente que para qualquer $\epsilon>0$ existe um subespaço de dimensão finita Z tal que

$$\mathrm{dist}_H(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) \leq \epsilon. \tag{2.3.2}$$

Suponha que este não é o caso; isto é, que exista $\epsilon_0>0$ tal que

$$\mathrm{dist}_H(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) > \epsilon_0. \tag{2.3.3}$$

para todo subespaço Z de X com dimensão finita. Escolha algum $x_1 \in X$ com $\|x_1\|_X = 1$, e seja $Z_1 = \text{span}\{x_1\}$. Então

$$\text{dist}_H(C[B_1^X(0)], C[B_1^{Z_1}(0)]) > \epsilon_0,$$

e logo existe um $x_2 \in X$ com $\|x_2\|_X \leqslant 1$ tal que

$$\|Cx_2 - Cx_1\|_X \geqslant \epsilon_0.$$

Com $Z_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$, podemos encontrar x_3 com $\|x_3\|_X \leqslant 1$ tal que

$$\|Cx_3 - Cx_1\|_X \geqslant \epsilon_0 \ \text{ e } \ \|Cx_3 - Cx_2\|_X \geqslant \epsilon_0.$$

Continuando indutivamente podemos construir desta maneira uma sequência $\{x_j\}$ com $\|x_j\| \leqslant 1$ tal que

$$\|Cx_i - Cx_j\|_X \geqslant \epsilon_0 \qquad i \neq j,$$

contradizendo a compacidade de C.

Agora seja $\tilde{\lambda} < \lambda$ tal que $2\|L\|_{\mathcal{L}(X)} < \tilde{\lambda} < \lambda$. Do que foi feito acima, escolha um subespaço Z de X, com dimensão finita, de forma que

$$\text{dist}_H(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) < \lambda - \tilde{\lambda}.$$

Se $x \in B_1^X(0)$ e $z \in B_1^Z(0)$, então

$$\|Tx - Tz\|_X \leqslant \|L(x-z)\|_X + \|Cx - Cz\|_X \leqslant \tilde{\lambda} + \|Cx - Cz\|_X$$

Portanto,

$$\text{dist}_H(T[B_1^X(0)], T[B_1^Z(0)]) \leqslant \tilde{\lambda} + \text{dist}_H(C[B_1^X(0)], C[B_1^Z(0)]) < \lambda.$$

Isto completa a demonstração. ∎

<u>Lema</u> 2.3.8 *Sejam K um subconjunto compacto de um espaço de Banach X sobre $\mathbb{K}$ e $f : X \to X$ uma função continuamente diferenciável em uma vizinhança de K. Suponha que K seja negativamente invariante para f; isto é, $f(K) \supset K$, e suponha também que existam $0 < \alpha < 1$ e $M \in \mathbb{N}^*$ tal que para cada $x \in K$,*

$$N(\alpha, D_x f[B_1^X(0)]) \leq M. \tag{2.3.4}$$

Então

$$c(K) \leq \frac{\log M}{-\log \alpha}. \tag{2.3.5}$$

Prova: Primeiramente, garantimos que (2.3.4) é suficiente para fornecer limitações para o número de bolas necessárias para cobrir $f(B_r^X(x) \cap K)$ quando r é suficientemente pequeno. Como f é continuamente diferenciável e K é compacto, para cada $\eta > 0$ existe $r_0 = r_0(\eta)$ tal que para qualquer $0 < r \leqslant r_0$ e qualquer $x \in K$,

$$f(B_r^X(x) \cap K) \subseteq f(x) + D_x f[B_r^X(0)] + B_{\eta r}^X(0).$$

Segue que

$$N((\alpha + \eta)r, f[B_r^X(x)]) \leqslant M \tag{2.3.6}$$

para todo $r \leq r_0(\eta)$.

Agora fixe η com $0 < \eta < 1 - \alpha$, e seja $r_0 = r_0(\eta)$. Cubra K com $N(r_0, K)$ bolas de raio r_0. Intersepte os abertos desta cobertura com K e aplique f a todo conjunto desta nova cobertura. Como $f(K) \supseteq K$, isto nos fornece uma cobertura de K formada por conjuntos da forma $f(B_X(x, r_0) \cap K)$, com $x \in K$. Segue de (2.3.6) que cada uma destas imagens pode ser coberta por M bolas de raio $(\alpha+\eta)r_0$, garantindo que $N((\alpha+\eta)r_0, K) \leqslant MN(r_0, K)$. Aplicando este argumento k vezes, temos

$$N((\alpha + \eta)^k r_0, K) \leq M^k N(r_0, K).$$

Segue da definição de $c(K)$ que

$$c(K) \leq \frac{\log M}{-\log(\alpha + \eta)},$$

e como $\eta > 0$ é arbitrário obtemos (2.3.5). ∎

Definição 2.3.9 *Para $T \in \mathcal{L}(X)$ definimos*

$$\nu_\lambda(T) = \min\{n \in \mathbb{N} : \text{ existe subespaço } Z \text{ de } X, \ \dim(Z) = n \text{ tal que } (2.3.1) \text{ vale } \}$$

com a convenção que $\min \varnothing = \infty$.

Observe que, do Lema 2.3.7, se $T \in \mathcal{L}_{\lambda/2}(X)$, então $\nu_\lambda(T) < \infty$.

Teorema 2.3.10 *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $U \subset X$ um conjunto aberto e $f : U \to X$ uma aplicação continuamente diferenciável. Suponha que $K \subset U$ seja um subconjunto compacto e que $D_x f \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$, para algum $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, para todo $x \in K$. Então $n = \sup_{x\in K} \nu_\lambda(D_x f)$ e $D = \sup_{x\in K} \|D_x f\|$ são finitos e, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,*

$$N(2\lambda, D_x f[B_1^X(0)]) \leqslant \left[(n+1)\,\frac{D}{\lambda}\right]^n \qquad \text{para todo} \quad x \in K.$$

e, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$N(2\lambda, D_x f[B_1^X(0)]) \leqslant \left[(n+1)\,\frac{D}{\lambda}\right]^{2n} \qquad \text{para todo} \quad x \in K.$$

Se ainda $f(K) \supset K$, então

$$c(K) \leqslant n\left\{\frac{\log((n+1)D/\lambda)}{-\log(2\lambda)}\right\}, \quad \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{R} \tag{2.3.7}$$

e

$$c(K) \leqslant 2n\left\{\frac{\log((n+1)D/\lambda)}{-\log(2\lambda)}\right\}, \quad \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{2.3.8}$$

Prova: Novamente, faremos a prova apenas no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Primeiramente mostremos que $n = \sup_{x\in K} \nu_\lambda(D_x f)$ é finito. Pelo Lema 2.3.7, para cada $x \in K$, existe um subespaço linear de dimensão finita Z_x tal que

$$\mathrm{dist}_H(D_x f[B_1^X(0)], D_x f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda.$$

Como $K \ni x \mapsto D_x f \in \mathcal{L}(X)$ é contínua, segue que existe um $\delta_x > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}_H(D_y f[B_1^X(0)], D_y f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda$$

para todo $y \in B_X(x, \delta_x)$, isto é, $\nu_\lambda(y) \leqslant \nu_\lambda(x)$ para estes tais y. A cobertura aberta de K formada pela união de $B_{\delta_x}^X(x)$ sobre x tem uma subcobertura finita, de onde segue que $n < \infty$.

Agora, como $n = \sup_{x\in K} \nu_\lambda(D_x f) < \infty$, para cada $x \in K$ existe um subespaço Z_x de X com $\dim(Z_x) \leqslant n$ tal que

$$\mathrm{dist}_H(D_x f[B_1^X(0)], D_x f[B_1^{Z_x}(0)]) < \lambda.$$

Para facilitar a notação vamos omitir o subscrito x em Z_x, e escreveremos $T = D_x f$.

Notando que $T(Z)$ é também um subespaço de X com dimensão menor ou igual a n, podemos usar o Lema 2.3.5 para cobrir a bola $B_{\|T\|}^{T(Z)}(0)$ com bolas $B_\lambda^X(y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, tal que $y_i \in B_{\|T\|}^X(0)$ para cada i e

$$k \leqslant \left[(n+1)\,\frac{\|T\|}{\lambda}\right]^n.$$

Logo

$$T[B_1^Z(0)] \subseteq B_{\|T\|}^{T(Z)}(0) = B_{\|T\|}^X(0) \cap T(Z) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_\lambda^X(y_i). \tag{2.3.9}$$

Completaremos a prova mostrando que

$$\bigcup_{i=1}^k B_{2\lambda}^X(y_i) \supseteq T[B_1^X(0)].$$

De fato, se $x \in B_X(0,1)$ então segue de (2.3.1) que existe um $y \in T[B_1^Z(0)]$ tal que $\|Tx - y\|_X < \lambda$. Como $y \in T[B_1^Z(0)]$, segue de (2.3.9) que $\|y - y_i\|_X \leqslant \lambda$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, e logo

$$\|Tx - y_i\|_X \leqslant \|Tx - y\|_X + \|y - x_i\|_X < 2\lambda,$$

isto é, $Tx \in B_{2\lambda}^X(y_i)$.

O resultado segue como enunciado, uma vez que n é uniforme sobre $x \in K$. A conclusão final segue do Lema 2.3.8. ■

Exercício 2.3.11 *Prove o Teorema 2.3.10 no caso* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teorema 2.3.12 *Seja* X *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{K}$, $U \subset X$ *um conjunto aberto e* $f : U \to U$ *uma aplicação continuamente diferenciável. Se* $K \subset U$ *é um conjunto compacto tal que* $f(K) = K$ *e que existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $D_x f \in \mathcal{L}_{1-\epsilon}(X)$ *para todo* $x \in K$, *então*

$$c(K) < \infty.$$

Prova: Para cada $y \in K$ temos que $D_y f \in \mathcal{L}_{1-\epsilon}(X)$; isto é $D_y f = L_y + C_y$ com $\|L_y\|_{\mathcal{L}(X)} < 1 - \epsilon$ e $C_y \in \mathcal{K}(X)$. Como

$$D_x f^n = D_{f^{n-1}(x)} f \circ D_{f^{n-2}(x)} f \circ \cdots \circ D_x f = L + C$$

onde $D_{f^{n-j}(x)} f = L_j + C_j$, $L = L_1 \circ \cdots \circ L_n$ com $\|L_j\|_{\mathcal{L}(X)} < 1 - \epsilon$, $C_j \in \mathcal{K}(X)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, e $C \in K(X)$.

Segue que, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $g = f^{n_0}$ é tal que $D_x g \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$ para todo $x \in K$ e algum $0 < \lambda < 1/2$. O resultado agora segue do Teorema 2.3.10 aplicado a f^{n_0}. ■

A seguir mostraremos uma aplicação interessante dos resultados acima que mostram a compatibilidade da limitação obtida no teorema anterior. Ela diz que podemos tomar λ tão pequeno quanto quisermos sem alterarmos ν, ν é um limitante superior da dimensão fractal de K.

Corolário 2.3.13 *Seja* X *um espaço de Banach real e suponha que* $T \in \mathcal{C}^1(X)$ *é tal que* $\{T^n : n \geqslant 0\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $D_x T$ *tem posto finito* $\nu(x)$ *com* $\sup_{x \in \mathcal{A}} \nu(x) := \nu < \infty$. *Então,*

$$c(\mathcal{A}) \leqslant \nu.$$

Prova: Claramente, para cada $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{A}$, $D_xT \in \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$ para todo $\lambda > 0$. Consequentemente, para cada $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$c(\mathcal{A}) \leqslant \nu \frac{\log((\nu+1)\frac{D}{\lambda})}{-\log(2\lambda)}.$$

Tomando o limite quando $\lambda \to 0$ temos que $c(\mathcal{A}) \leqslant \nu$. ■

<u>Corolário</u> **2.3.14** *Sejam X um espaço de Banach real, $L, K \in \mathcal{C}^1(X)$. Se $T = L + K$, suponha que o semigrupo discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que K tem posto finito em $\mathcal{A}$; isto é, $R(D_xK) \subset Y(x)$ onde $Y(x)$ é subespaço de X com $\sup_{x\in\mathcal{A}} \dim(Y(x)) := \nu < \infty$, e que L satisfaz*

$$\sup_{x\in\mathcal{A}} \|D_{T^{n-1}(x)}L \circ \cdots \circ D_xL\| \leqslant c(n),\ n \in \mathbb{N},$$

onde $c(n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Então, se $\sup_{x\in\mathcal{A}} \dim(D_xK) = \nu < \infty$, então

$$c(\mathcal{A}) \leqslant \nu.$$

Prova: Da demonstração anterior podemos fazer λ tão pequeno quanto desejarmos. De fato, somente precisamos garantir que mudando λ não alteramos ν. Isto segue do fato de que

$$\begin{aligned} D_xT^n &= D_{T^{n-1}(x)}T \circ \cdots \circ D_xT = (D_{T^{n-1}(x)}L + D_{T^n-1(x)}K) \circ \cdots \circ (D_xl + D_xK) \\ &= D_{T^{n-1}(x)}L \circ \cdots \circ D_xL + K_n := L_n + K_n \end{aligned}$$

onde K_n é um operador compacto com posto menor ou igual a ν. Claramente, existe Z_n subespaço de X tal que $\dim(Z_n) \leqslant \nu$ e

$$\operatorname{dist}(D_xT^n[B_1^x(0), D_xT^n[B_1^{Z_n}(0)]]) \leqslant \|D_{T^{n-1}(x)}L \circ \cdots \circ D_xL\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant c(n).$$

Portanto, dado $\lambda > 0$ mantendo ν e tomando n grande podemos garantir que $D_xT^n \in \mathcal{L}_\lambda$ com $\nu_\lambda(D_xT^n) \leqslant \nu$.

Como $T^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ temos que

$$c(\mathcal{A}) \leqslant \nu \frac{\log((\nu+1)\frac{D}{\lambda})}{\log(\frac{1}{2\lambda})},$$

para cada $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Fazendo $\lambda \to 0$ obtemos que

$$c(\mathcal{A}) \leqslant \nu$$

e isto completa a prova. ■

<u>Exercício</u> 2.3.15 *Enunciar e provar versões dos Corolários 2.3.13 e 2.3.14 para o caso* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.4 Atratores exponenciais

Nesta seção mostraremos (usando a regularização ou regularização assintótica de semigrupos) que, em geral, o atrator global de um semigrupo tem dimensão fractal finita. Aproveitaremos para construir o que se conhece na literatura como *atratores exponenciais* (veja [29] para o caso de espaços de Hilbert e [28] para o caso de espaços de Banach).

O foco dos resultados desta seçãoé a demonstração de que o atrator global tem dimensão fractal finita. Não há qualquer preocupação com a obtenção de uma melhor quota para a dimensão. As técnicas utilizadas aqui não exploram as propriedades espectrais da linearização do operador (squeezing). Em lugar disso, as estimativas obtidas para a dimensão dependem de propriedades de regularização do operador e de propriedades de imersões compactas entre espaços de Banach (números de entropia, veja [30]).

A construção dos atratores exponenciais dada a seguir basea-se na construção dada em [31] que é bastante mais geral que aquela dada nos trabalhos iniciais de [29, 28] e também muito mais simples. Há uma enorme literatura voltada à aplicação dos resultados abstratos sobre atratores exponenciais o leitor pode tomar como referência inicial os exemplos apresentados em [31].

Faremos apenas a construção dos atratores exponenciais para o caso discreto, o caso contínuo é deixado para o leitor (veja os casos contínuo e não-autônomo em [17]).

Definição 2.4.1 *Seja $\{S(n) : n \in \mathbb{N}^+\}$ um semigrupo num espaço métrico X. Diremos que $\mathcal{M}$ é um atrator exponencial para $\{S(n) : n \in \mathbb{N}^+\}$ se for compacto, positivamente invariante ($S(n)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}^+$), $c(\mathcal{M}) < \infty$ e existir uma constante $\gamma > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} e^{\gamma n}\mathrm{dist}_H(S(n)(B), \mathcal{M}) = 0$$

para cada $B \subset X$ limitado.

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e suponha que $(X, \|\cdot\|_X)$ esteja compactamente imerso em $(Y, \|\cdot\|_Y)$; isto é, que $X \subset Y$ e que os limitados de $(X, \|\cdot\|_X)$ sejam relativamente compactos em $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Seja $S : X \to X$ uma função contínua tal que

- $\{S(n) : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado dissipativo; isto é, existe um conjunto limitado $B_0 \subset X$ tal que, para todo $B \subset X$ limitado existe $n_B \in \mathbb{N}$ tal que $S(n)(B) \subset B_0$ para todo $n \geqslant n_B$.
- Existe uma constante $K > 0$ tal que $\|Sx - Sy\|_X \leqslant K\|x - y\|_Y$, para todo $x, y \in B_0$.

Teorema 2.4.2 *Nas condições acima, para todo $\nu \in (0, 1)$, $\{S(n) : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator exponencial $\mathcal{M}_\nu$ e se $N(r, A)$ denota o número mínimo de bolas de raio r em $(Y, \|\cdot\|_Y)$ necessárias para cobrir $A \subset Y$, então $\mathcal{M}_\nu$ pode ser escolhido de modo que*

$$c(\mathcal{M}_\nu) \leqslant \frac{\log(N(\frac{\nu}{2K}, B_1^X(0)))}{\log(\frac{1}{\nu})}.$$

O semigrupo $\{S(n) : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ com $c(\mathcal{A}) \leqslant c(\mathcal{M}_\nu)$.

Prova: Vamos assumir (tomando iteradas de S, se necessário) que $n_{B_0} = 1$. Seja $\nu \in (0, 1)$, $N_0 = N(\frac{\nu}{K}, B_0)$ e $V_0 = \{x_1, \cdots, x_{N_0}\} \subset B_0$ tais que

$$B_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B^Y_{\frac{\nu}{K}}(x_i).$$

Assim,

$$S(B_0)=\bigcup_{i=1}^{N_0} S(B^Y_{\frac{\nu}{K}}(x_i)\cap B_0)=\bigcup_{i=1}^{N_0} B^X_\nu(S(x_i))\cap S(B_0) \tag{2.4.1}$$

Seja $V_1=S(V_0)$ e $N_\nu=N(\frac{\nu}{2K},B^X_1(0))$. Logo, existe $V_2=\{x_{ij}:1\leqslant i\leqslant N_0,\ 1\leqslant j\leqslant N_\nu\}\subset S(B_0)$ tal que

$$S(B_0)=\bigcup_{i=1}^{N_0} B^X_\nu(S(x_i))\cap S(B_0)=\bigcup_{i=1}^{N_0}\bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^2}{K}}(x_{ij})\cap S(B_0).$$

Como antes, existe $V_3=\{x_{ijk}:1\leqslant i\leqslant N_0,\, 1\leqslant j,k\leqslant N_\nu\}\subset S^2(B_0)$

$$\begin{aligned} S^2(B_0)&=\bigcup_{i=1}^{N_0}\bigcup_{j=1}^{N_\nu} S(B^Y_{\frac{\nu^2}{K}}(x_{ij})\cap B_0)\cap S^2(B_0)\\ &=\bigcup_{i=1}^{N_0}\bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{\nu^2}(S(x_{ij}))\cap S^2(B_0)=\bigcup_{i=1}^{N_0}\bigcup_{j=1}^{N_\nu}\bigcup_{k=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^3}{K}}(x_{ijk})\cap S^2(B_0)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S^3(B_0)&=\bigcup_{i=1}^{N_0}\bigcup_{j=1}^{N_\nu}\bigcup_{k=1}^{N_\nu} S(B^Y_{\frac{\nu^3}{K}}(x_{ijk})\cap B_0)\cap S^3(B_0)\\ &=\bigcup_{i=1}^{N_0}\bigcup_{j=1}^{N_\nu}\bigcup_{k=1}^{N_\nu} B^X_{\nu^3}(S(x_{ijk}))\cap S^3(B_0)\end{aligned}$$

Prosseguindo por indução obtemos $V_n\subset S^{n-1}(B_0)$ com $\#V_n=N_0N_\nu^{n-1}$

$$S^n(B_0)\subset \cup_{x\in V_n} B^X_{\nu^n}(Sx).$$

Segue de (2.4.1) que $S(B_0)$ é relativamente compacto e portanto $\{S(n):n\in\mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. É claro que $\mathcal{A}\subset S^n(B_0)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e portanto $N(\nu^n,\mathcal{A})\leqslant N_0N_\nu^{n-1}$. Segue que

$$\begin{aligned} c(\mathcal{A})&=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log(N(\nu^n,\mathcal{A}))}{\log\frac{1}{\nu^n}}\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\log(N_0N_\nu^{n-1})}{\log\frac{1}{\nu^n}}=\frac{\log N_\nu}{\log\frac{1}{\nu}}<\infty\end{aligned}$$

Observe que

$$\mathrm{dist}_H(S^n(B_0),V_n)\leqslant \nu^n.$$

Defina $E_0 = V_0$, $E_{n+1} = V_{n+1} \cup S(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{M}_\nu = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}^X$.

É claro que $S(\mathcal{M}_\nu) \subset \mathcal{M}_\nu$ e que

$$\mathrm{dist}_H(S^n(B_0), \mathcal{M}_\nu) \leqslant \nu^n = e^{-n\log\frac{1}{\nu}}.$$

Como B_0 é absorvente, dado $B \subset X$ limitado, existe $C(B) > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}_H(S^n(B), \mathcal{M}_\nu) \leqslant C(B)e^{-n\log\frac{1}{\nu}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Resta mostrar que $c(\mathcal{M}_\nu) < \infty$. Primeiramente note que $E_{n+j} \subset S(n)B_0$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$ e assim

$$\mathcal{M}_\nu \subset E_0 \cup \cdots \cup E_n \cup \overline{S^n(B_0)}.$$

Agora, $\#(E_0 \cup \cdots \cup E_n) \leqslant [(n+1)^2 - 1]N_0 N_\nu^{n-1}$ e $N(\nu^n, S^n(B_0)) \leqslant N_0 N_\nu^{n-1}$. Assim

$$N(\nu^n, \mathcal{M}_\nu) \leqslant (n+1)^2 N_0 N_\nu^{n-1}.$$

Disto segue que $c(\mathcal{M}_\nu) \leqslant \dfrac{\log N_\nu}{\log(\frac{1}{\nu})}$ e a prova está completa. ∎

Observação 2.4.3 *Recorde, se X e Y são espaços de Banach, os números de entropia $e_k(T)$ de $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ são definidos por*

$$e_k(T) = \inf\left\{\epsilon > 0 : T(B_1^X(0)) \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} y_j + B_\epsilon^Y(0),\ y_j \in Y,\ 1 \leqslant j \leqslant 2^{k-1}\right\}.$$

De maneira informal, podemos dizer que $e_k(T)$ é a raiz de $\log_2 N(\epsilon, T(B_1^V(0))) = k-1$. Em muitas situações $e_k(T)$ tende a zero quando k tende a infinito. Neste caso, dado $\nu \in (0, \frac{1}{2})$, podemos encontrar k tal que $e_k(T) \leqslant \frac{\nu}{K}$ ($K = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$) e para este k temos que $N(\frac{\nu}{K}, T(B_1^V(0))) \leqslant 2^{k-1}$.

Observe que se X tem dimensão infinita e X está compactamente imerso em Y, $I : X \to Y$ definida por $Ix = x$ para cada $x \in X$ é tal que $0 < e_k(I) < \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\frac{(k-1)\log 2}{-\log(e_k(I))} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Para o caso de alguns espaços de dimensão infinita X e Y conhecidos, com X compactamente imerso em Y, existem estimativas disponíveis para o cômputo de $e_k(I)$, veja [30].

Observação 2.4.4 *Note que:*

- *Em muitos casos o atrator global tem dimensão fractal finita e atrai limitados exponencialmente (veja Seção 1.9 e Seção 2.5).*
- *Existem (embora sejam raros) atratores globais que não são exponenciais e neste caso, ainda assim pode ser possível construir um atrator exponencial (veja Seção 1.9.2).*

O resultado a seguir segue imediatamente da prova do Teorema 2.4.2.

Corolário 2.4.5 *Sejam X, Y espaços de Banach com X compactamente imerso em Y e $S : X \to X$ contínuo e tal que $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\|Sx - Sy\|_X \leqslant K\|x - y\|_Y$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e para algum $K > 0$, então $c(\mathcal{A}) < \infty$.*

No Teorema 2.4.2 supomos implicitamente que $S : X \to X$ seja um operador compacto ($S(B_0)$ é um conjunto absorvente compacto). No que se segue, apresentar resultados que nos garantam a existência de atratores exponenciais para o caso em que S não é compacto. Como conseqüência obteremos também resultados que garantam que o atrator global tem dimensão fractal finita. Os resultados apresentados aqui são baseados em [21].

Teorema 2.4.6 *Sejam X um espaço de Banach e $S \in \mathcal{C}(X)$. Suponha que o semigrupo $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ possua um atrator global $\mathcal{A}$ em X. Seja Y um espaço de Banach com X compactamente imerso em Y e suponha que $S = L + C : X \to X$ com $L, C \in \mathcal{C}(X)$ tais que, para todo $x, y \in \mathcal{A}$, para algum $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ e algum $K > 0$,*

$$\|Lx - Ly\|_X \leqslant \lambda\|x - y\|_X, \quad \|Cx - Cy\|_X \leqslant K\|x - y\|_Y. \tag{2.4.2}$$

Então $c(\mathcal{A}) \leqslant \frac{\log\left(N(\frac{\nu}{K}, B_1^X(0))\right)}{\log\left(\frac{1}{2(\lambda+\nu)}\right)}$, *para cada* $\nu \in (0, \frac{1}{2} - \lambda)$.

Além disso, se B_0 *é um conjunto absorvente limitado com a propriedade que* $S(B_0) \subset B_0$ *e que* (2.4.2) *vale para todo* $x, y \in B_0$, *para cada* $\nu \in (0, \frac{1}{2} - \lambda)$ *existe um atrator exponencial* $\mathcal{M}_\nu$ *para* $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $c(\mathcal{M}_\nu) \leqslant \frac{\log\left(N(\frac{\nu}{K}, B_1^X(0))\right)}{\log\left(\frac{1}{2(\lambda+\nu)}\right)}$.

Prova: Seja $0 < \nu < \frac{1}{2} - \lambda$ e $\{x_1, \cdots, x_{N_1}\}$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{N_1} B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A}.$$

Se N_ν o número mínimo de bolas de raio $\frac{\nu}{K}$ em Y necessárias para cobrir $B_1^X(0)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = S(\mathcal{A}) &= \bigcup_{i=1}^{N_1} \big(L(B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A}) + C(B^X_{2(\lambda+\nu)}(x_i) \cap \mathcal{A})\big) \cap \mathcal{A} \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_1} \Big(B^X_{2\lambda(\lambda+\nu)}(Lx_i) + \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2\nu(\lambda+\nu)}(y_{ij})\Big) \cap \mathcal{A} \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2(\lambda+\nu)^2}(Lx_i + y_{ij}) \cap \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

para alguma escolha de $\{y_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant N_1,\ 1 \leqslant j \leqslant N_\nu\}$ em X. Sejam $\{x_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant N_1,\ 1 \leqslant j \leqslant N_\nu\}$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2^2(\lambda+\nu)^2}(x_{ij}) \cap \mathcal{A}.$$

Assim, obtemos $V_n \subset \mathcal{A}$ com $\# V_n = N_1 N_\nu^{n-1}$ tal que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in V_n} B^X_{(2(\lambda+\nu))^n}(x) \cap \mathcal{A}.$$

Segue que

$$c(\mathcal{A}) \leqslant \frac{\log(N_\nu)}{-\log(2(\lambda+\nu))}.$$

Se B_0 é um conjunto absorvente limitado e $S(B_0) \subset B_0$. Seja $R > 0$ tal que $B_0 \subset B_R^X(b_0)$ para algum $b_0 \in B_0$. Das propriedades de C,

$$S(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_\nu} B^X_{2(\lambda+\nu)R}(x_i) \cap S(B_0)$$

para alguma escolha de $\{x_1, \cdots, x_{N_\nu}\}$ em $S(B_0)$.

Como $S = L + C$,

$$\begin{aligned}
S^2(B_0) &= \bigcup_{i=1}^{N_\nu} L(B^X_{2(\lambda+\nu)R}(x_i) \cap S(B_0)) \\
&+ C(B^X_{2(\lambda+\nu)R}(x_i) \cap S(B_0)) \bigcap S^2(B_0) \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_\nu} \left(B^X_{2\lambda(\lambda+\nu)R}(Lx_i) + \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2\nu(\lambda+\nu)R}(y_{ij}) \right) \cap S^2(B_0) \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_\nu} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2(\lambda+\nu)^2 R}(Lx_i + y_{ij}) \cap S^2(B_0).
\end{aligned}$$

para alguma escolha de $\{y_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant N_\nu,\ 1 \leqslant j \leqslant N_\nu\}$ em X.

Assim, existem $\{x_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant N_\nu,\ 1 \leqslant j \leqslant N_\nu\}$ em $S^2(B_0)$ tal que

$$S^2(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_\nu} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{2^2(\lambda+\nu)^2 R}(x_{ij}) \cap S^2(B_0).$$

Seguindo com este procedimento obtemos um conjunto V_n com $\#V_n = N_\nu^n$ em $S^n(B_0)$ tal que

$$S^n(B_0) = \bigcup_{x \in V_n} B^X_{(2(\lambda+\nu))^n R}(x) \cap S^n(B_0).$$

Assim, $\mathrm{dist}_H(S^n(B_0), V_n) \leqslant (2(\lambda+\nu))^n R$, e defina $E_0 = V_0 =: \{b_0\}$ e $E_{n+1} = V_{n+1} \cup S(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Denote por $\mathcal{M}_\nu = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}^X$.

É claro que $S(\mathcal{M}_\nu) \subset \mathcal{M}_\nu$ e que $\mathrm{dist}_H(S^n(B_0), \mathcal{M}_\nu) \leqslant (2(\lambda+\nu))^n R = Re^{-n\log \frac{1}{2(\lambda+\nu)}}$. Como B_0 é absorvente, dado $B \subset X$ limitado, existe $C(B) > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}_H(S^n(B), \mathcal{M}_\nu) \leqslant C(B) e^{-n\log \frac{1}{2(\lambda+\nu)}}.$$

Resta mostrar que $c(\mathcal{M}_\nu) < \infty$. Primeiramente note que $E_{n+j} \subset S(n)B_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e assim

$$\mathcal{M}_\nu \subset E_0 \cup \cdots \cup E_{n-1} \cup \overline{S^n(B_0)}.$$

Agora, $\#(E_0 \cup \cdots \cup E_{n-1}) \leqslant [(n+1)^2 - 1] N_\nu^n$ e $N((2(\lambda+\nu))^n R, S^n(B_0)) \leqslant N_\nu^n$. Assim

$$N((2(\lambda+\nu))^n R, \mathcal{M}_\nu) \leqslant (n+1)^2 N_\nu^n.$$

Disto segue que $c(\mathcal{M}_\nu) \leqslant \dfrac{\log N_\nu}{-\log(2(\lambda+\nu))}$ e a demonstação está completa. ∎

Observação 2.4.7 *Trabalhando com iteradas é possível pedir que L seja uma contração estrita ($\lambda < 1$).*

2.5 Atratores de semigrupos gradient-like e sua dimensão fractal

Esta seção é voltada para estimativas da dimensão fractal de atratores de semigrupos gradient-like relativos a uma família disjunta de invariantes isolados em função da dimensão fractal dos conjuntos instáveis locais dos invariantes isolados, suas propriedades de atração exponencial e a constante de Lipschitz do semigrupo.

Definição 2.5.1 *Seja $\{T(t) :\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que um conjunto invariante isolado Ξ_i é uma* fonte, *se $W^s_{loc}(\Xi_i) \cap \mathcal{A} = \Xi_i$; e um* sumidouro *se $W^u(\Xi_i) = \Xi_i$. Caso contrário diremos que Ξ_i é uma* sela.

É fácil ver que, se $\{T(t) :\ t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$, então existem pelo menos uma fonte e um sumidouro.

Observação 2.5.2 *Suponha que $\{T(t) :\ t \geqslant 0\}$ é um semigrupo gradient-like relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. É fácil ver que o atrator global $\mathcal{A}$ de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ coincide com o atrator global $\mathcal{A}'$ do semigrupo gradient-like discreto $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$, onde $S = T(1)$. De fato, é claro que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Recíprocamente, o atrator $\mathcal{A}'$ é dado como a união dos conjuntos instáveis de conjuntos invariantes isolados e, dado um ponto $z \in \mathcal{A}'$, existe um conjunto* *invariante isolado* Ξ_i *e uma solução global* $\xi : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}'$ *tal que* $\xi(0) = z$ *e* $\xi(-n) \overset{n\to\infty}{\to} \Xi_i$. *Agora podemos definir* $\phi(-t)$ *para todo* $t \geqslant 0$ *da seguinte maneira: dado* $n \in \mathbb{N}$, *defina*

$$\phi(-t) = T(n-t)\xi(-n), \ \textit{para todo } 0 \leqslant t \leqslant n.$$

Isto obviamente nos dá uma solução global ϕ *de* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *tal que* $\phi(0) = z$ *e* $\phi(-t) \overset{t\to\infty}{\to} \Xi_i$, *provando que* $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Devido a esta observação, podemos considerar apenas o caso discreto e começamos pelo seguinte resultado fundamental.

Proposição 2.5.3 *Seja* $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ *um semigrupo discreto com atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $S = T_{|\mathcal{A}}$. *Suponha que* S *é Lipschitz contínuo com constante de Lipschitz* $c > 1$. *Seja* (A, A^*) *um par atrator repulsor em* $\mathcal{A}$, *e suponha que:*

(i) existe uma vizinhança B *de* A^* *in* $\mathcal{A}$ *tal que* $c(B) = c(S(B))$;

(ii) existem constantes $M \geqslant 1$ *e* $\omega > 0$ *tais que, para todo* K *subconjunto compacto* K *de* $\mathcal{A}$ *com* $K \cap A^* = \varnothing$ *temos que* $\mathrm{d_H}(S^n K, A) \leqslant M e^{-\omega n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então

$$c(B) \leqslant c(\mathcal{A}) \leqslant \max\left\{\frac{\omega + \ln(c)}{\omega} c(B), c(A)\right\}.$$

Prova: Claramente, como $B \subset \mathcal{A}$, $c(B) \leqslant c(\mathcal{A})$. Somente temos que provar a segunda desigualdade. Para isto, dividimos a prova em quatro passos:

Passo 1: Defina $\Omega_n = S^n(\mathcal{A} \setminus B) \setminus S^{n+1}(\mathcal{A} \setminus B)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $\Omega_0 = (\mathcal{A} \setminus B) \setminus S(\mathcal{A} \setminus B) \subset S(B) \setminus B \subset S(B)$ e portanto $c(\Omega_0) \leqslant c(B)$.

Agora obtemos uma estimativa sobre o número mínimo $N(r, \Omega_k)$ de bolas de raio r necessárias para cobrir Ω_k em termos do número de bolas necessárias para cobrir Ω_0. Seja $N_0 = N(r/c^k, \Omega_0)$ e $\{x_1, \dots, x_{N_0}\}$ uma seqüencia finita de pontos em Ω_0 tal que

$$\Omega_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B(x_i, r/c^k).$$

Faça, para cada $i = 1, \ldots, N_0$, $\xi_i = S^k(x_i) \in \Omega_k$. Então, para cada $y \in \Omega_k$ existe $z \in \Omega_0$ tal que $y = S^k(z)$, $z \in B(x_i, r/c^k)$ para algum $i = 1, \ldots, N_0$ e temos

$$\|y - \xi_i\| = \|S^k(z) - S^k(x_i)\| \leqslant c^k \|z - x_i\| < r, \text{ para todo } y \in \Omega_k.$$

Assim, provamos que $\Omega_k \subset \cup_{i=1}^{N_0} B(\xi_i, r)$, o que nos dá que $N(r, \Omega_k) \leqslant N_0$.

<u>Passo 2:</u> Dado $r > 0$, como $\mathrm{d_H}(S^n(\mathcal{A} \setminus B), A) \leqslant Me^{-\omega n}$ para todo $n \geqslant 0$, existe $n_0 = \left[\frac{1}{\omega}\ln(\frac{M}{r})\right]$ tal que

$$G := \left(\bigcup_{j \geqslant n_0} \Omega_j\right) \cup A \subset \mathcal{O}_r(A),$$

onde $\mathcal{O}_r(A)$ denota que r-vizinhança de A. Assim, se $A \subset \cup_{i=1}^{N(r,A)} B(x_i, r)$ with $x_i \in A$ para todo $i = 1, \ldots, N(r, A)$, então $\mathcal{O}_r(A) \subset \cup_{i=1}^{N(r,A)} B(x_i, 2r)$ portanto $N(2r, G) \leqslant N(r, A)$. Como esta relação é válida para todo $r > 0$, $N(r, G) \leqslant N(r/2, a)$.

<u>Passo 3:</u> Do Passo 1, se $H := \bigcup_{j=0}^{n_0-1} \Omega_j$ temos

$$N(r, H) \leqslant n_0 \max_{k=0,\ldots,n_0} N(r/c^k, \Omega) = n_0 N(r/c^{n_0}, \Omega_0),$$

como $c > 1$.

<u>Passo 4:</u> Primeiro note que $\mathcal{A} = B \cup G \cup H$ e temos

$$N(r, \mathcal{A}) \leqslant 3\max\{N(r, B);\ N(r, H);\ N(r, G)\} \leqslant$$
$$\leqslant 3\max\{N(r, B);\ n_0 N(r/c^{n_0}, \Omega_0);\ N(r/2, A)\},$$

como a funão logaítimo é crescente,,

$$\ln N(r, \mathcal{A}) \leqslant \ln 3 + \max\{\ln N(r, B);\ \ln n_0 + \ln N(r, \Omega_0);\ \ln N(r/2, A)\}.$$

Logo

$$\frac{\ln N(r, \mathcal{A})}{\ln(1/r)} \leqslant \frac{\ln 3}{\ln(1/r)} + \max\left\{\frac{\ln N(r, B)}{\ln(1/r)};\ \frac{\ln n_0}{\ln(1/r)} + \frac{\ln N(r, \Omega_0)}{\ln(1/r)};\frac{\ln N(r/2, A)}{\ln(1/r)}\right\}.$$

Obviamente, $\limsup_{r\to 0^+} \dfrac{\ln 3}{\ln(1/r)} = 0$. Agora calcularemos os outros termos:

(a)

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln n_0}{\ln(1/r)} = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln 1/\omega}{\ln(1/r)} + \limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln(\ln(2M/r))}{\ln(1/r)} = 0;$$

(b)

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r/c^{n_0},\Omega_0)}{\ln(1/r)} &= \limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r/c^{n_0},\Omega_0)}{\ln(c^{n_0}/rc^{n_0})} = \\ &= \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{1-\frac{n_0 \ln c}{\ln(c^{n_0}/r)}} \frac{\ln N(r/c^{n_0},\Omega_0)}{\ln(c^{n_0})},\end{aligned}$$

mas

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{1-\frac{n_0 \ln c}{\ln(c^{n_0}/r)}} = \limsup_{r\to 0^+} \left(\frac{n_0 \ln(c)}{\ln(1/r)} + 1\right),$$

e como $\frac{1}{\omega}\ln(\frac{M}{r}) \leqslant n_0 \leqslant \frac{1}{\omega}\ln(\frac{M}{r}) + 1$,

$$\limsup_{r\to 0^+} \left(\frac{n_0 \ln(c)}{\ln(1/r)} + 1\right) = \frac{\omega + \ln(c)}{\omega},$$

o que mostra que

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r/c^{n_0},\Omega_0)}{\ln(1/r)} = \frac{\omega + \ln(c)}{\omega}.$$

(c)

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r/2,A)}{\ln(1/r)} &= \limsup_{r\to 0^+} \frac{\ln N(r/2,A)}{\ln(2/2r)} = \\ &\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{1+\frac{\ln(1/2)}{\ln(1/r)}} \frac{\ln N(r/2,A)}{\ln(2/r)} = c(A).\end{aligned}$$

Juntando *(a)*, *(b)* e *(c)*, obtemos

$$c(\mathcal{A}) \leqslant \max\left\{c(B), \frac{\omega+\ln(c)}{\omega}c(\Omega_0), c(A)\right\} \leqslant \max\left\{\frac{\omega+\ln(c)}{\omega}c(B), c(A)\right\}.$$

Usando o fato que $c(\Omega_0) \leqslant c(B)$, a proposição está agora completa. ∎

Agora, usando esta proposição podemos estimar a dimensão fractal de um semigrupo gradient-like discreto $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ em termos da dimensão fractal dos conjuntos instáveis locais dos conjuntos invariantes isolados.

Teorema 2.5.4 *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo gradient-like discreto relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_p\}$ e atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que a restrição $T_{|_\mathcal{A}}$ to $\mathcal{A}$ do operador T é uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $c > 1$ e suponha também que existem constantes $M > 1$ e $\omega > 0$ tais que, para todo par atrator-repulsor (A, A^*) in $\mathcal{A}$ e todo subconjunto compacto $K \subset \mathcal{A}$ com $K \cap A^* = \varnothing$ temos que*

$$\mathrm{d_H}(T^n(K), A) \leqslant Me^{-\omega n}, \ \textit{para todo } n \geqslant 0.$$

Finalmente, suponha que o conjunto instável local $\{W^u_{loc}(\Xi_i), i, \ldots, p\}$ são dados como gráficos de função Lipschitz contínua. Nestas condiçõoes

$$\max_{i=1,\ldots,p} c(W^u_{loc}(\Xi_i)) \leqslant c(\mathcal{A}) \leqslant \frac{\omega + \ln(c)}{\omega} \max_{i=1,\ldots,p} c(W^u_{loc}(\Xi_i)).$$

Prova: Como $\{T^n; \ n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo discreto gradient-like existe pelo menos uma fonte. Seja Ξ_i uma dessas fontes B_i uma vizinhança em $\mathcal{A}$ de Ξ_i tal que $B_i \subset W^u_{loc}(\Xi_i)$ e $T(B_i) \subset W^u_{loc}(\Xi_i)$, de modo que $c(B_i) = c(T(B_i)) = c(W^u_{loc}(\Xi_i))$. Agora, é fácil ver que $\Xi_i = A_i^*$, onde $A_i = \cup_{j \neq i} W^u_{loc}(\Xi_i)$. Pela proposição acima

$$c(B_i) \leqslant c(\mathcal{A}) \leqslant \max\left\{\frac{\omega + \ln(c)}{\omega} c(B_i), c(A_i)\right\},$$

isto é

$$c(W^u_{loc}(\Xi_i)) \leqslant c(\mathcal{A}) \leqslant \max\left\{\frac{\omega + \ln(c)}{\omega} c(W^u_{loc}(\Xi_i)), c(A_i)\right\}.$$

Agora restringimos o operador T ao atrator A_i. Portanto temos um semigrupo discreto gradient-like com atrator A e $\mathbf{\Xi^1} = \mathbf{\Xi} \setminus \{\Xi_i\}$, o que tem pelo menos uma fonte Ξ_k, com $k \neq i$. Podemos usar o mesmo argumento acima para provar que

$$c(W^u_{loc}(\Xi_k)) \leqslant c(A_i) \leqslant \max\left\{\frac{\omega + \ln(c)}{\omega} c(W^u_{loc}(\Xi_k)), c(A_k)\right\}.$$

E usando estes dois resultados, obtemos

$$\max_{j=i,k} c(W^u_{loc}(\Xi_j)) \leqslant c(\mathcal{A}) \leqslant \max\left\{\frac{\omega + \ln(c)}{\omega} c(W^u_{loc}(\Xi_i)), \frac{\omega + \ln(c)}{\omega} c(W^u_{loc}(\Xi_k)), c(A_k)\right\}.$$

Este processo deve parar pois existem somente finitos conjuntos invariantes isolados e procedendo indutivamente obtemos o resultado desejado. ■

Observação 2.5.5 *A prova deste teorema sugere uma certa ordem na família disjunta de conjuntos invariantes isolados e, após um rearranjo na ordem desta família, podemos assumir* $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \dots, \Xi_p\}$ *é tal que,* Ξ_1 *é uma fonte em* $\mathcal{A}$*,* Ξ_2 *é uma fonte em* A_1*,* Ξ_2 *é a uma fonte da restrição de* T *e, tendo definido* Ξ_{j-1}*,* Ξ_j *é uma fonte para a restrição de* T *a* $A_k = \cup_{j=k}^{p} W^u(\Xi_j)$*,* $1 \leqslant j \leqslant p$*. Este reordenamento pode ser usado para formar uma nova família* $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_m\}$ *com* $m \leqslant p$ *chamada* decomposição por níveis de energia *de* $\mathcal{A}$*, que é uma* Decomposição de Morse *para* $\mathcal{A}$*. Para mais detalhes veja, [1], Seção 5. Usando esta deocomposição podemos ver que a dimesão fractal dos conjuntos* $W^u_{loc}(\Xi_i)$ *é uma função decrescente do índice* i*, e obtemos que*

$$c(W^u_{loc}(\Xi_1)) \leqslant c(\mathcal{A}) \leqslant \frac{\omega + \ln(c)}{\omega} c(W^u_{loc}(\Xi_1)).$$

Nosso próximo resultado é um corolário do teorema anterior, uma vez que lembremos alguns fatos básicos relativos a seimigrupos discretos gradient-like $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ com um atrator $\mathcal{A}$ e um conjunto finito $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e^p\}$ de pontos fixos hiperbólicos. Primeiramente recorde (veja [37] ou o Capítulo 5) que o conjunto instável (estável) local $W^u_{loc}(e_i)$ (W^s_{loc}) é o gráfico de uma função Lipschitz contínua. Agora, nessas condições, é fácil ver que existem somente um número finito de pares atratores repulsores (A, A^*); isto é, os pares (A, A^*), com

$$A = \bigcup_{\substack{i \in I \\ I \subset \{1,\dots,p\}}} W^u(e_i).$$

Usando este fado e a atração exponencial de cada dos conjuntos instáveis locais, podemos provar que existem constantes $M \geqslant 1$ e $\omega > 0$ tais que, para todo par atrator repulsor (A, A^*) e todo subconjunto compacto K de $\mathcal{A}$ com $K \cap A^* = \varnothing$ temos

$$\mathrm{d_H}(T^n(K), A) \leqslant M e^{-\omega n}, \text{ para todo } n \geqslant 0.$$

Desses dois fatos obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.5.6 *Seja $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ um semigrupo discreto gradient-like com atrator global $\mathcal{A}$ e conjunto de pontos fixos $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_p\}$. Suponha que a restrição de T a $\mathcal{A}$ é uma função Lipschitz contínua com constante $c > 1$. Seja $M \geqslant 1$ e $\omega > 0$ tais que, para todo par atrator repulsor (A_i, A_i^*), $A_i = \cup_{j \neq i} W^u_{loc}(e_j)$ e subconjunto compacto K de $\mathcal{A}$ com $K \cap A^* = \varnothing$ temos*

$$\mathrm{d_H}(T^n(K), A) \leqslant Me^{-\omega n}, \text{ para todo } n \geqslant 0.$$

Então,

$$\max_{i=1,\ldots,p} c(W^u_{loc}(e_i)) \leqslant c(\mathcal{A}) \leqslant \frac{\omega + \ln(c)}{\omega} \max_{i=1,\ldots,p} c(W^u_{loc}(e_i)).$$

Capítulo 3

Atratores para processos de evolução

Seja X um espaço métrico e $\mathrm{d}(\cdot,\cdot) : X \times X \to [0,\infty)$ a sua métrica. Recorde que $\mathbb{T}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{T}_t^+ = \{s \in \mathbb{T} : s \geq t\}$, $\mathbb{T}_t^- = \{s \in \mathbb{T} : s \leq t\}$), $\mathcal{C}(X)$ denota o conjunto das transformações contínuas de X nele mesmo e que $\mathcal{P} = \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 : t \geqslant s\}$. Um processo de evolução em X é uma família de transformações $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ em $\mathcal{C}(X)$ com as seguinte propriedades

1) $S(t,t) = I$, para todo $t \in \mathbb{T}$,

2) $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, para todo $t \geqslant \tau \geqslant s$,

3) $\mathcal{P} \times X \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ is continuous.

Se X é um espaço vetorial normado e $S(t,s)$ é linear para cada $(t,s) \in \mathcal{P}$ diremos que $\{S(t,s) :\ t \geqslant s \in \mathbb{T}\}$ é um *processo de evolução linear*.

A transformação $S(t,s)$ toma cada estado x do sistema no instante inicial s e evoluciona para o estado $S(t,s)x$ do sistema no tempo final t. Observamos que, para um $\sigma \in \mathbb{T}$ fixo, o operador $S(\sigma+\tau,\tau)$ pode ser um operador distinto para cada valor de $\tau \in \mathbb{T}$. Isto indica que, além do tempo decorrido σ, também o instante inicial τ pode desempenhar um papel importante no processo de evolução. A classe dos processos para os quais o tempo decorrido determina a evolução; isto é, os processos de evolução para os quais $S(t,s) = S(t-s,0)$ para todo $t \geqslant s$ são chamados processos de evolução autônomos e a família de operadores $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ dados por $T(t) := S(t,0)$, $t \geqslant 0$ satisfaz

$$1)\ T(0) = I,$$

$$2)\ T(t+s) = T(t)T(s), \quad \text{para todo } t, s \geqslant 0,$$

$$3)\ [0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X \text{ é contínua.}$$

Uma família $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ em $\mathcal{C}(X)$ que satisfaz as propriedades acima é chamada de semigrupo. Reciprocamente, dado um semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ a família $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ definida por $S(t,s) = T(t-s)$, $t \geqslant s$, é um processo de evolução. Quando X for um espaço vetorial normado e $T(t)$ é um semigrupo e cada $T(t)$ é linear, diremos que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo linear.

Em equações diferenciais, os processos de evolução são os sistemas dinâmicos naturais a serem estudados enquanto que os particulares sistemas dinâmicos associados às equações diferenciais autônomas são os semigrupos.

Um processo de evolução autônomo $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$, conhecido como *dinâmica forwards*, é o mesmo que o comportamento das soluções quando $s \to -\infty$, chamado *dinâmica pullback*. Como explicaremos mais tarde, para processos de evolução gerais, estes dois comportamentos assintóticos ou 'limites dinâmicos' não estão relacionados e podem produzir propriedades qualitativas completamente distintas. Um dos nossos propósitos é revelar algumas dessas propriedades dinâmicas novas que a *dinâmica pullback* pode conter.

Idealmente, o atrator de um sistema dinâmico dado deveria ser um objeto que *contém toda* ou a parte *significativa* da dinâmica assintótica dos modelos associados ao sistema dinâmico. Sua teoria deveria nos levar a um entendimento razoável do comportamento assintótico do model associado, incluindo a localização do atrator, a taxa com a qual ele atrai no espaço de estados e a sua dimansão ou complexidade.

Nas últimas poucas décadas, o conceito de atrator para sistemas dinâmicos autônomos foi sedimentado e atualmente sua teoria está adequada aos objetivos descritos acima. No caso não-autônomo, a teoria ainda está em desenvolvimento mas já se pode obeservar que não existe um único conceito de atrator que se adeque a todos os objetivos acima. Na teoria apresentada a seguir, tentaremos explicar os conceitos, suas diferenças e suas características com o objetivo de modelar uma teoria que nos leve à compreenssão de ambos os sistemas dinâmicos *autonomos e não-autonomos*.

Recorde que se $\{S(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo que possui um atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Além disso,

$$\mathcal{A} = \{y \in X : \text{existe uma solução global limitada } x : \mathbb{T} \to X \text{ com } x(0) = y\}. \tag{3.0.1}$$

A noção de atrator para um processo de evolução requer que outros aspectos sejam levados em consideração. Para começar, um subconjunto A de X não será, em geral, fixado por um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ e a noção de invariância precisa ser enfraquecida para uma noção que nos permita construir soluções globais. Com isto em mente, é natural definir *invariância* da seguinte forma:

> Uma família $\{\mathcal{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ se $S(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$ para todo $(t,s) \in \mathcal{P}$.

A seguir apresentaremos alguns exemplos que nos ajudarão a desenvolver uma noção adequada de atratores para processos de evolução. Considere os problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + t \\ x(s) = x_0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \operatorname{sen} t \\ y(s) = y_0. \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Cujas soluções são

$$\begin{aligned} x(t,s;x_0) &= (x_0 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}s)e^{-\alpha(t-s)} + \frac{1}{\alpha}t - \frac{1}{\alpha^2} \qquad \text{e} \\ y(t,s;x_0) &= \left(y_0 - \frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha \operatorname{sen} s - \cos s]\right) e^{-\alpha(t-s)} + \frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha \operatorname{sen} t - \cos t]. \end{aligned} \tag{3.0.3}$$

Se definimos $S_1(t,s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \geqslant s$ e $S_2(t,s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \geqslant s$, por $S_1(t,s)x_0 = x(t,s;x_0)$ e $S_2(t,s)x_0 = y(t,s;y_0)$, é claro que $\{S_i(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é um processo de evolução, $i = 1, 2$. Vamos tornar evidente a importância do instante inicial s no estudo das propriedades assintóticas das soluções dos processos de evolução $\{S_i(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, $i = 1, 2$, dados acima.

Primeiramente note que, todas as soluções da primeira equação em (3.0.3) existem globalmente e que todas elas tendem a $+\infty$ quando $t \to +\infty$; isto é, todas as soluções são ilimitadas. Então, embora a presença do termo $-\alpha x(t)$ represente uma dissipação no sistema, a idéia de atração é perdida para este exemplo não dando qualquer informação sobre o comportamento assintótico do sistema. As soluções da segunda equação, por outro lado, permanecem limitadas quando $t \to +\infty$.

Por outro lado, em ambas as equações, o efeito da dissipação pode ser observado se subtraímos duas soluções diferentes $x_1(t), x_2(t)$ ou $y_1(t), y_2(t)$ que corresponde a dados iniciais x_0^1, x_0^2 ou y_0^1, y_0^2. De fato, se denotamos essas duas soluções por $z_1(t), z_2(t)$, temos que

$$\frac{d}{dt}(z^1(t) - z^2(t)) = -\alpha(z^1(t) - z^2(t)),$$

e logo,

$$z^1(t) - z^2(t) = e^{-\alpha(t-s)}(x_0^1 - x_0^2).$$

Isto siginifica que, para a primeira equação, embora todas as soluções explodam quando t tends a $+\infty$, elas *se aproximam assintoticamente* (uniformemente para dados iniciais em conjuntos limitados) da solução $x(t) = \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}$ ou, no caso da segunda equação, da solução limitada $y(t) = \frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha \operatorname{sen} t - \cos t]$.

Se consideramos as famílias

$$\left\{\mathcal{A}_1(t) = \frac{1}{\alpha}t - \frac{1}{\alpha^2}\right\}_{t\in\mathbb{R}} \quad e \quad \left\{\mathcal{A}_2(t) = \frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha \operatorname{sen} t - \cos t]\right\}_{t\in\mathbb{R}}$$

É claro que

i) $S_1(t,s)\mathcal{A}_1(s) = \mathcal{A}_1(t)$ e $S_2(t,s)\mathcal{A}_2(s) = \mathcal{A}_2(t)$ para todo $t \geqslant s \in \mathbb{R}$.

ii) e, se $B \subset \mathbb{R}$ é limitado

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S_1(t,s)B, \mathcal{A}_1(t)) = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S_2(t,s)B, \mathcal{A}_2(t)) = 0\end{array}\right\} \quad \text{(atração } \textit{forwards}\text{).} \tag{3.0.4}$$

Nestes exemplos parece razoável chamar as famílias $\{\mathcal{A}_1(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\{\mathcal{A}_2(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de atratores globais para $\{S_1(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ e $\{S_2(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$. Note that $\{\mathcal{A}_1(t) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é ilimitado (cada $\mathcal{A}_1(t)$ é unitário mas a família é ilimitada). Por outro lado, cada $\mathcal{A}_2(t)$ também é unitário enquanto a família $\{\mathcal{A}_2(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é limitada e tem união contida no intervalo $[-(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}, (1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}]$. Em ambos exemplos não existe um subconjunto fixo $\mathcal{A}_i$ de $\mathbb{R}$, $i = 1, 2$, que é invariante e para o qual

$$\lim_{s\to-\infty} dist(S_i(t,s)x_0, \mathcal{A}_i) = 0.$$

Poderíamos então pensar em definir atrator para um processo da seguinte maneira: *Uma família $\{\mathcal{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator para o processo $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ se é invariante, $\mathcal{A}(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$ e atrai subconjuntos limitados; isto é, para cada subconjunto limitado $B \subset X$ e $s \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t,s)B, \mathcal{A}(t)) = 0$.* Infelizmente tal definição somente seria adequada para uma pequena classe de processos com propriedades bastante específicas (por exemplo $\{S(t,s) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ é uniformemente assintoticamente compacto no sentido de [19]).

Para ver isto considere o seguinte exemplo

$$\dot{x} = h(t)x - x^3 \tag{3.0.5}$$

onde $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ é uma função continuamente diferenciável que é igual a 0 para $t \leqslant 0$ e igual a 1 para $t \geqslant 1$.

Este exemplo simples (que deveria ter um atrator) não tem atrator no sentido da definição acima. Essencialmente, isto se deve ao fato que a maioria da dinâmica assintótica forwards está, neste caso, associada a soluções que explodem em tempo finito para trás.

Continuando a interpretar nossos exemplos, observamos que as famílias $\{\mathcal{A}_i(t)\}$, $i = 1, 2$, são os limites pullback (isto é, quando $s \to -\infty$) de toda solução de (3.0.2) e é uniforme para x_0 em conjuntos limitados de $\mathbb{R}$; isto é,

$$\lim_{s\to-\infty} \sup_{x_0\in B} \mathrm{dist}(S(t,s)x_0, \mathcal{A}(t)) = 0. \tag{3.0.6}$$

Este limite pullback determina $\mathcal{A}_i(t)$, $i = 1, 2$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e da origem a objetos com propriedades dinâmicas. Este fato, que a primeira vista parece um truque vai se tornar bastante importante na extensão do conceito de atratores para processos. De fato, esta propriedade de atração pullback juntamente com a invariância nos conduzirá ao conceito de atratores pullback para processos.

Note que, em muitas situações, a atração pullback ($s \to -\infty$) e a atração forwards ($t \to \infty$) não estão relacionadas uma à outra. Não é difícil ver que, no caso do (3.0.5), a única solução global é $x = 0$ e que o conjunto $\mathcal{A}(t)$ é obtido como o limite pullback de conjuntos limitados é $\{0\}$ enquanto que o conjunto $[-1, 1]$ atrai subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ quando $t \to \infty$ e nenhum conjunto fechado menor que este tem esta propriedade.

Como vimos em (1.0.2), se um semigrupo tem um atrator global, ele é o conjuntos dos estados iniciais pelos quais passa uma solução global limitada. Veremos mais tarde que no caso não-autônomo e quando quando $\cup_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{A}(t)$ é limitado, a noção de atrator pullback é aquela que preserva esta propriedade; isto é, para todo $t \in \mathbb{T}$

$$\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \xi : \mathbb{T} \to X \text{ é solução global limitada de } \{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}\}. \tag{3.0.7}$$

3.1 Attratores Pullback

Nesta seção apresentaremos a noção de atratores pullback, as noções necessárias para apresentar este conceito e a sua relação com os atratores globais para semigrupos. Para um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ e um conjunto $B \subset X$, definimos:

- Para cada $(t,s) \in \mathcal{P}$, a imagem de B sob $S(t,s)$,

$$S(t,s)B := \{S(t,s)b : b \in B\}.$$

- A órbita de B a partir do instante $s \in \mathbb{T}$

$$\gamma^s(B) := \bigcup_{t \geqslant s} S(t,s)B.$$

- A *órbita pullback* de B no instante $t \in \mathbb{T}$,

$$\gamma_p(B,t) := \bigcup_{s \leqslant t} S(t,s)B.$$

Definição 3.1.1 *Seja $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução. Dado $t \in \mathbb{T}$, diremos que um conjunto $B(t) \subset X$ atrai-pullback (absorve-pullback) subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ se*

$$\lim_{s \to -\infty} \operatorname{dist}_H(S(t,s)D, B(t)) = 0 \quad (\exists\ T = T(t,D) \leqslant t \text{ tal que } S(t,s)D \subset B(t),\ \forall s \leqslant T).$$

para cada subconjunto limitado D de X. Uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrai-pullback (absorve-pullback) subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ se $B(t)$ atrai-pullback (absorve-pullback) subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, para cada $t \in \mathbb{T}$.

Se existe uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos limitados que (atrai-pullback) absorve-pullback conjuntos limitados diremos que $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback-limitado dissipativo.

Observação 3.1.2 *Nesta definição, o tempo final é mantido fixo enquanto que o tempo inicial retrocede para $-\infty$. Note que isto não é o mesmo que voltar no tempo. A evolução é sempre até um instante futuro t a partir de um instante inicial s que tende a $-\infty$.*

Note que, se um conjunto absorve-pullback conjuntos limitados no instante t, então ele atrai-pullback conjuntos limitados no instante t.

Definição 3.1.3 *Seja* $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *uma família de subconjuntos de* X*. Diremos que esta família é invariante pelo processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *se*

$$S(t,s)B(s) = B(t), \text{ para todo } (t,s) \in \mathcal{P}.$$

Definição 3.1.4 *Seja* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *um processo de evolução em um espaço métrico* X*. Diremos que uma família* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *de subconjuntos compactos de* X *é um atrator-pullback para* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *se é invariante, atrai-pullback subconjuntos limitados de* X *e é a família de conjuntos fechados que é minimal com a propriedade de atrair pullback subconjuntos limitados; isto é, se outra família* $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *de conjuntos fechados atrai pullback subconjuntos limitados de* X*, então* $A(t) \subseteq C(t)$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Observação 3.1.5 *Observamos que a exigência da minimalidade na Definição 3.1.4 é adicional relativa à teoria de atratores para semigrupos. Esta exigência é essencial para assegurar a unicidade dos atratores pullback. A inclusão dessa exigência está relacionada ao enfraquecimento da propriedade de invariância imposta pela natureza não autônoma dos processos de evolução juntamente com a possibilidade dos atratores pullback serem ilimitados em* $-\infty$*; isto é, permitimos que para todo* $t \in \mathbb{R}$ $\cup_{s\leqslant t}\mathcal{A}(t)$ *seja ilimitado. Se* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *e* $\{T(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é o processo de evolução autônomo associado, pode existir uma família* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *de conjuntos compactos e invariantes que atraem-pullback subconjuntos limitados e não é minimal. De fato, se* $T(t-s) = e^{-(t-s)}x_0$*,* $x_0 \in \mathbb{T}$*,* $(t,s) \in \mathcal{P}$*, a família* $\{[-e^{-t}, e^{-t}] : t \in \mathbb{T}\}$ *é invariante,* $[-e^{-t}, e^{-t}]$ *é compacto e atrai subconjuntos limitados de* $\mathbb{R}$ *no instante* t *para cada* $t \in \mathbb{T}$*.*

Exercício 3.1.6 *Mostre que a exigência da minimalidade na Definição 3.1.4 pode ser eliminada se pedimos que* $\cup_{s\leqslant t}\mathcal{A}(s)$ *seja limitado para toto* $t \in \mathbb{R}$*.*

Definição 3.1.7 *Diremos que uma solução* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *de um processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é* backwards-limitada *se existe um* $\tau \in \mathbb{T}$ *tal que o conjunto* $\{\xi(t) : t \leqslant \tau\}$ *seja limitado.*

<u>Exercício</u> 3.1.8 *Se um processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in\}$ *e* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *é uma solução backwards-limitada, então* $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$*.*

<u>Exercício</u> 3.1.9 *Mostre que se* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *é um atrator pullback para o processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *e* $\bigcup_{s \leqslant t} \mathcal{A}(s)$ *é limitado para toto* $t \in \mathbb{R}$*, então* $\mathcal{A}(t)$ *é dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) = \{\xi(t) :& \xi : \mathbb{T} \to X \text{ é uma solução global} \\ & \text{backwards-limitada para } \{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}\}, \ \forall t \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

O resultado a seguir relaciona os atratores pullback de processos de evolução autônomos e os atratores globais de semigrupos. Este resultado mostra que o conceito de atratores pullback estende aos processos de evolução, de maneira natural, o conceito de atratores globais para semigrupos.

<u>Teorema</u> 3.1.10 *Se* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo e* $S(t,s) = T(t-s), (t,s) \in \mathcal{P}$ *é o processo autônomo associado então,* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}$ *se, e somente se,* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$*. Em qualquer dos casos* $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$*.*

Prova: Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ é claro que a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ com $\mathcal{A}(t) := \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{T}$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X para $\{T(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$. A minimalidade segue do fato que $\mathcal{A}$ é limitado e $S(t,s)\mathcal{A} = T(t-s)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $(t,s) \in \mathcal{P}$.

Por outro lado, suponha que $\{T(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$. É claro que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ e que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Além diso, a família $\{\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A} : t \in \mathbb{T}\}$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X. Segue da minimalidade de $\mathcal{A}(t)$ que $\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A} \supset \mathcal{A}(t)$ e a prova está completa. ∎

Observação 3.1.11 *O atrator-pullback não precisa ter qualquer tipo de atração forwards. Exceto em situações bastante específicas como, por exemplo, quando*

$$\lim_{s\to-\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}_H(S(t,t+s)B,\mathcal{A}(t))=0,$$

para todo subconjunto limitado B de X, o atrator pullback e o comportamento assintótico forwards não estão relacionados (veja, entre outros, [15, 18, 45, 59]).

3.2 Existência de atratores pullback

Como no caso autônomo, a noção de $\omega-$limite desempenhará um papel importante na teoria de atratores pullback para processos de evolução. Seja $\mathbb{T}_t^-=\{s\in\mathbb{T}, s\leqslant t\}$.

Definição 3.2.1 *Seja $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X e B um subconjunto de X. O ω-limite pullback de B é definido por*

$$\omega(B,t):=\bigcap_{\sigma\leqslant t}\overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma}S(t,s)B}.$$

Para cada subconjunto B de X, temos que

$$\begin{aligned}\omega(B,t)=\{y\in X : \text{existem seqüências } \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{T}_t^-, s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \text{e } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ em } B, \text{ tal que } y=\lim_{k\to\infty}S(t,s_k)x_k\}.\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Claramente, se $\{S(t):t\geqslant 0\}$ é um semigrupo e $S(t,s)=S(t-s)$, $(t,s)\in\mathcal{P}$ temos que $\omega(B,t):=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{r\geqslant s}S(r)B}$ é independente de t e coincide com a definição do conjunto $\omega-$limite $\omega(B)$ de B para semigrupos (veja [34, 62, 43]).

Alguns dos resultados apresentados a seguir tem provas semelhantes àquelas dos análogos autônomos (por exemplo, o lema a seguir é análogo ao Lema 1.0.13 e 1.0.16). Apresentaremos algumas das provas para dar ao leitor a segurança da existência dessa analogia.

Lema 3.2.2 *Seja $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Se $B\subset X$, então $S(t,s)\omega(B,s)\subset\omega(B,t)$ para cada $(t,s)\in\mathcal{P}$. Se $(t,s)\in\mathcal{P}$, B é tal* *que $\omega(B,s)$ é compacto e atrai pullback B no instante s, então $S(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t)$. Adicionalmente, se $\omega(B,s)$ atrai pullback B no instante s para cada $s \leqslant t$, B é um conjunto conexo e $\bigcup_{s\leqslant t}\omega(B,s) \subset B$, então $\omega(B,t)$ é conexo.*

Prova: Se $\omega(B,t) = \varnothing$, não há o que mostrar. Se $\omega(B,s) \neq \varnothing$, da continuidade de $S(t,s)$ e de (3.2.1) segue imediatamente que $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$.

Resta mostrar que, se $\omega(B,s)$ é compacto e atrai pullbback B, então $\omega(B,t) \subset S(t,s)\omega(B,s)$. Para $x \in \omega(B,t)$, existem seqüências $\sigma_k \to -\infty$, $\sigma_k \leqslant t$ e $x_k \in B$ tais que $S(t,\sigma_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $\sigma_k \to -\infty$ temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_k \leqslant s$ para todo $k \geqslant k_0$. Logo, $S(t,s)S(s,\sigma_k)x_k = S(t,\sigma_k)x_k \to x$ para $k \geqslant k_0$. Como $\omega(B,s)$ atrai pullback B no instante s, temos que $\mathrm{dist}(S(s,\sigma_k)x_k, \omega(B,s)) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Disto e da compacidade de $\omega(B,s)$, é fácil ver que $\{S(s,\sigma_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência (que novamente denotaremos por $S(s,\sigma_k)x_k$) para algum $y \in \omega(B,s)$. Segue da continuidade de $S(t,s)$ que $S(t,s)y = x$. Portanto $\omega(B,t) = S(t,s)\omega(B,s)$.

Agora provaremos a afirmativa sobre a conexao de $\omega(B,t)$. Suponha que $\omega(B,t)$ é disconexo, então $\omega(B,t)$ é união disjunta de dois conjuntos compactos (consequentemente separados por uma distância positiva), mas $\omega(B,t)$ atrai pullback B e isto é uma contradição com o fato que $S(t,s)B$ é conexo e contém $\omega(B,t)$. ∎

Lema 3.2.3 *Seja $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Suponha que B é um subconjunto não vazio de X e que, para cada $t \in \mathbb{T}$, existe $\sigma_t \leqslant t$ tal que $\overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma_t} S(t,s)B}$ é compacto. Então, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\omega(B,t)$ não vazio, compacto, atrai pullback B no instante t e $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante.*

Prova: Como $\overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma} S(t,s)B}$ é não vazio e compacto para cada $\sigma \leqslant \sigma_t$, temos que $\omega(B,t)$ é não vazio e compacto.

Mostremos que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t. Suponha que não, então existe $\epsilon > 0$ e seqüências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em B, $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $\sigma_k \leqslant t$, $\sigma_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, tais que $\mathrm{dist}(S(t,\sigma_k)x_k, \omega(B,t)) > \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma_t} S(t,s)B}$ é compacto e $\{S(t,\sigma_k)x_k, k \geqslant k_0\} \subset \overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma_t} S(t,s)B}$ para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, $\{S(t,\sigma_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente para algum $y \in \omega(B,t)$. Isto nos leva a uma contradição e mostra que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t.

Do Lema 3.2.2, $\omega(B,t)$ é invariante e a prova está completa. ■

3.2.1 Resultados principais

O primeiro resultado sobre existência de atratores pullback é uma generalização de um resultado análogo para processos autônomos (veja [5, 34, 43, 58, 62]):

Teorema 3.2.4 *Seja $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Então, as seguintes afirmativas são equivalentes*

- *$\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$.*
- *Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t) : t \in \mathbb{T}\}$ que atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$.*

Em qualquer dos casos

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B,t) :\ B \subset X,\ B \ \ \textit{limitado}\ \}}. \tag{3.2.2}$$

Prova: Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$, cada $\mathcal{A}(t)$ é compacto e atrai pullback subconjuntos limitados de X.

Para provar a recíproca procedemos da seguinte forma. Primeiro note que, como conseqüência imediata (3.2.1) temos que $\omega(B,t) \subset K(t)$, para todo $B \subset X$ limitado e para todo $t \in \mathbb{T}$. Assim, também temos que $\omega(B,t)$ atrai B. De fato, se este não é o caso, existe $\varepsilon > 0$, seqüência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $s_n \to -\infty$ e seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B tal que $\mathrm{dist}(S(t,s_n)x_n, \omega(B,t)) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $K(t)$ atrai pullback B no instante t, temos que $\mathrm{dist}(S(t,s_n)x_n, K(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Consequentemente, $\{S(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente para algum $x_0 \in K(t)$. Segue que $x_0 \in \omega(B,t)$ e isto nos leva a uma contradição. Do Lema 3.2.2, segue a invariância de $\omega(B,t)$.

Definindo $\mathcal{A}(t)$ por (3.2.2), $\mathcal{A}(t)$ é claramente compacto e atrai pullback subconjuntos limitados de X. A invariância de $\mathcal{A}(t)$ segue da invariância de cada família $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$. De fato, dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ com $x_n \to x_0$ quando $n \to +\infty$. Então, $S(t,s)x_n = y_n \in \omega(B_n, t)$, e da continuidade de $S(t,s)$ temos que $S(t,s)x_n = y_n \to S(t,s)x_0$, o que implica que $S(t,s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$. Agora, se $y_0 \in \mathcal{A}(t)$, existe $y_n \in \omega(B_n,t)$ com $y_n \to y_0$ quando $n \to +\infty$. Da invariância da família $\omega(B_n,t)$, existe $x_n \in \omega(B_n,s)$ com $S(t,s)x_n = y_n$. Mas cada $S(t,s)x_n \in S(t,s)\omega(B_n,s) \subset S(t,s)\mathcal{A}(s)$. Como este último conjunto é compacto e não depende de n, obtemos que $\lim_{n\to+\infty} S(t,s)x_n = y_0 \in S(t,s)\mathcal{A}(s)$.

Se $\hat{\mathcal{A}}(t)$ é fechado e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t temos que $\omega(B,t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$, para todo subconjunto limitado B de X. Consequentemente, $\mathcal{A}(t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$. ∎

O conceito a seguir é útil nas aplicações para obter a existência de atratores pullback sem ter que exibir uma família de conjuntos compactos que atrai pullback subconjuntos limitados.

Definição 3.2.5 *Um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ em um espaço métrico X é dito* pullback assintoticamente compacto *se, para cada $t \in \mathbb{T}$, seqüência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$ e seqüência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X tais que*

- $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *e*
- $\{S(t,s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ *é limitado,*

a seqüência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente.

Observação 3.2.6 *Se $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo, o processo $\{S(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, para cada seqüência limitada*

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* X, *seqüência* $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{T}^+$ *tal que* $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *e* $\{S(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada, a seqüência* $\{S(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tem uma subseqüência convergente. Neste caso, o semigrupo* $\{S(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é* assintoticamente compacto (veja Lema 1.0.20).

Lema 3.2.7 *Se* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é um processo de evolução pullback assintoticamente compacto e* B *é um subconjunto não vazio e limitado de* X *para o qual, dado* $t \in \mathbb{T}$ *existe* $\sigma_t \in \mathbb{T}_t^-$ *tal que* $\bigcup_{\tau\leqslant\sigma_t} S(t,\tau)B$ *é limitado, então* $\omega(B,t)$ *é não vazio, compacto, atrai pullback* B *no instante* t *e* $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ *é invariante.*

Prova: Primeiramente note que, para quaisquer seqüências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em B e $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{T}_t^-$, $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, temos que $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado. Segue do fato que $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto que existe $y \in X$ e subseqüência de $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma) tal que $y = \lim_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k$. Disto segue que $y \in \omega(B,t)$ e que $\omega(B,t)$ é não vazio.

Agora, dada uma seqüência $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\omega(B,t)$ existem $x_k \in B$ e $s_k \in \mathbb{T}_t^-$, $s_k \leqslant -k$, tal que $\mathrm{d}(S(t,s_k)x_k, y_k) \leqslant \frac{1}{k}$. Como $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente, segue que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente e $\omega(B,t)$ é compacto.

Agora mostraremos que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t. Se não, existe $\epsilon > 0$ e seqüências $x_k \in B$ e $\{s_k\}$ in $\mathbb{T}_t^-$ com $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, tal que $\mathrm{dist}(S(t,s_k)x_k, \omega(B,t)) > \epsilon$. Do fato que $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto e do fato que $\bigcup_{s\leqslant\sigma_t} S(t,s)B$ é limitado, existe subseqüência de $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma) e $y \in X$ tal que $S(t,s_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Claramente $y \in \omega(B,t)$ e isto nos leva a uma contradição. Segue que $\omega(B,t)$ atrai pullback B.

A invariancia de $\omega(B,t)$ agora segue do Lema 3.2.2 e o resultado está provado. ∎

Definição 3.2.8 *Diremos que um processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *em um espaço métrico* X *é* pullback limitado *se, para cada* $t \in \mathbb{T}$, $\gamma_p(B,t)$ *é limitado sempre que* $B \subset X$ *é limitado.*

Observação **3.2.9** *Se* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo,* $\{S(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback limitado se, e somente se, o semigrupo* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *é limitado.*

Definição **3.2.10** *Um processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é dito pullback eventualmente compacto se ele é pullback limitado e existe* $\tau \geqslant 0$ *tal que, se* B *é um subconjunto limitado de* X *e* $t \in \mathbb{T}$*, então* $\overline{S(t,t-\tau)B}$ *é compacto.*

Observação **3.2.11** *Um semigrupo* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *é eventualmente compacto se é limitado existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{S(t_0)B}$ *é compacto, para cada* $B \subset X$ *limitado.*

O resultado a seguir nos da uma condição suficiente para que um processo de evolução seja pullback assintoticamente compacto.

Lema **3.2.12** *Seja* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *um processo de evolução em um espaço métrico* X*. Se* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback eventualmente compacto, então* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback assintoticamente compacto.*

Prova: Seja τ como da Definição 3.2.10, $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X e $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathbb{T}_t^-$ com $s_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Se $B = \{S(t-\tau,s)x_j : j \in \mathbb{N} \text{ e } (t-\tau,s) \in \mathcal{P}\}$, não é difícil ver que B é limitado e portanto $S(t,t-\tau)B$ é relativamente compacto e contém $\{S(t,s_j)x_j : j \in \mathbb{N}\}$. Segue que $\{S(t,s_j)x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente. ∎

Teorema **3.2.13** *Se* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback limitado dissipativo (veja Definição 3.1.1) e pullback assintoticamente compacto (veja Definição 3.2.5), então* $\mathcal{A}(t)$ *dado por*

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup \{\, \omega(B,t) : \ B \subset X, \ B \ \ \textit{limitado} \,\} \tag{3.2.3}$$

é limitado, atrai pullback subconjuntos limitados de X *no instante* t*, a família* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *é invariante e, se* $\{C(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *atrai pullback subconjuntos limitados de* X*, então* $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$*.*

Prova: Como as hipóteses do Lema 3.2.7 estão satisfeitas, dado um subconjunto limitado B de X, $\omega(B,t)$ não vazio, compacto, atrai pullback B no instante t e $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante. Portanto, $\mathcal{A}(t)$ definido por (3.2.3) atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t para cada $t \in \mathbb{T}$ e $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante. Se $C(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t, é claro que $\omega(B,t) \subset \overline{C(t)}$ para cada subconjunto limitado B de X e consequentemente $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$. Isto mostra em particular (pois existe uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ de conjuntos limitados que atrai pullback subconjuntos limitados de X) que $\mathcal{A}(t)$ é limitado e completa a prova. ■

Teorema 3.2.14 *Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback limitado dissipativo e pullback eventualmente compacto, então a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ definida por* (3.2.3) *atrai pullback subconjuntos limitados de X, é invariante, $\mathcal{A}(t)$ é relativamente compacto e, se $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{B(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.*

Prova: Do Lema 3.2.12 temos que as hipóteses do Teorema 3.2.13 estão satisfeitas e somente precisamos mostrar que $\mathcal{A}(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{T}$. Como $\mathcal{A}(t)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{T}$, para τ dado na Definição 3.2.10, temos que

$$\mathcal{A}(t) = S(t, t-\tau)\mathcal{A}(t-\tau),$$

é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{T}$. Isto completa a demonstração. ■

Observe que os resultados anteriores não concluem a compacidade da seção $\mathcal{A}(t)$ (nem mesmo se o espaço é de dimensão finita). Isto mostra uma primeira diferença entre os processos de evolução não autônomos e os autônomos. Para obter a compacidade de cada seção teremos que fazer hipóteses adicionais sobre os processos de evolução.

Definição 3.2.15 *Diremos que um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo se, para cada $t \in \mathbb{T}$, existir um subconjunto limitado $B(t)$ de X que pullback absorve subconjuntos limitados de X no instante τ para cada $\tau \leqslant t$; isto* *é, dado qualquer subconjunto limitado D de X e $\tau \leqslant t$, existe $s_0(\tau, D)$ tal que $S(\tau, s)D \subset B(t)$, para todo $s \leqslant s_0(\tau, D)$.*

Note que, a família $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ da definição acima não precisa ter união limitada. Contudo, podemos escolhe-la de modo que, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\bigcup_{s \leqslant t} B(s)$ é limitado.

O teorema a seguir dá condições suficientes para a existência de um atrator pullback.

Teorema 3.2.16 *Se um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s \leqslant t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{T}$.*

Prova: Se $\mathcal{A}(t)$ é dado por (3.2.3), segue do Teorema 3.2.13 que, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t e se $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{B(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Do fato que $\{S(t,s) : t \geqslant s \in \mathbb{T}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe um subconjunto limitado $B(t)$ de X que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ, para cada $\tau \leqslant t$. Como $\omega(B(t), t)$ atrai pullback $B(t)$ no instante t (considerado como um subconjunto limitado fixo de X), ele atrai pullback todo subconjunto limitado de X no instante t. De fato, é suficiente provar que, dado um subconjunto limitado D de X, $\omega(D,t) \subset \omega(B(t),t)$. Se $x_0 \in \omega(D,t)$, existem seqüências $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in D tal que $S(t,s_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Como $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, dada uma seqüência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $\tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, existe uma seqüência $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\sigma_n \leqslant \tau_n$ tal que $S(\tau_n, s)D \subset B(t)$, para todo $s \leqslant \sigma_n$. Dado que $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, para cada τ_n existe $k_n \geqslant n$ tal que $s_{k_n} \leqslant \tau_n$ e $S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in B(t)$. Portanto,

$$S(t, s_{k_n})x_{k_n} = S(t,\tau_n)S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in S(t,\tau_n)B(t),$$

o que implica $x_0 \in \omega(B(t),t)$. Isto prova que $\mathcal{A}(t) \subset \omega(B(t),t)$ e como $\omega(B(t),t) \subset \mathcal{A}(t)$ temos que $\mathcal{A}(t) = \omega(B(t),t)$. Consequentemente $\mathcal{A}(t)$ é compacto. ■

3.2.2 Pullback ponto dissipatividade

Nesta seção apresentamos um resultado que garante a existência de atratores pullback baseado na atração pullback de pontos. As condições que teremos que impor mostrarão que precisaremos de um forte controle das propriedades do processo para obter resultados análogos àqueles que valem para processos de evolução autônomos (see Hale [34], Raugel [55])

Definição 3.2.17 *Let $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ be an evolution process in a metric space X. We say that a bounded set $B(t)$ of X* pullback strongly absorbs *points (compact subsets) of X at time t if, for each $x \in X$ (compact subset K of X), there exist $\sigma_x > 0$ ($\sigma_K > 0$) such that $S(\tau,s)(x) \in B(t)$ ($S(\tau,s)(K) \subset B(t)$) para todo $s \leqslant \tau \leqslant t$ with $\tau - s \geqslant \sigma_x$ ($\tau - s \geqslant \sigma_K$). We say that $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is* pullback strongly point dissipative (compact dissipative) *if, for each $t \in \mathbb{T}$, there is a bounded subset $B(t) \subset X$ which pullback strongly absorbs points (compact subsets) of X at time t.*

Observação 3.2.18 *If a set $B(t)$ pullback strongly absorbs points (compact subsets/bounded subsets) of X at t then it pullback strongly absorbs points (compact subsets/ bounded subsets) of X at τ para todo $\tau \leqslant t$. Also, if $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ is a semigroup then $\{S(t-s) : (s,t) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly point dissipative (compact dissipative) if and only if $\{S(t-s) : (s,t) \in \mathcal{P}\}$ is pullback point dissipative (compact dissipative) if and only if $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ is point dissipative (compact dissipative) in the sense of [34].*

Definição 3.2.19 *We say that an evolution process $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ in X is* pullback strongly bounded *if, for each $t \in \mathbb{T}$ and bounded subset B of X, $\bigcup_{s \leqslant t} \gamma_p(B,s)$ is bounded.*

Observação 3.2.20 *Let $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ be a semigroup. Then $\{S(t-s) : (s,t) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly bounded if and only if $\{S(t-s) : (s,t) \in \mathcal{P}\}$ is pullback bounded if and only if $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ is a bounded semigroup.*

Lema 3.2.21 *Let $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ be a pullback strongly point dissipative, pullback asymptotically compact and pullback strongly bounded evolution process.*

Assume also that for each $t \in \mathbb{T}$ and $\sigma > 0$, the family $\{S_{\tau,\tau-\sigma} : \tau \leqslant t\}$ is equicontinuous at each $x \in X$. Then $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly compact dissipative.

Prova: Fix $t \in \mathbb{T}$ and let $B(t)$ be a bounded subset of X which strongly absorbs points of X at time t.

For $\tau \leqslant t$, let $B^1(t) = \{x \in X : \mathrm{d}(x,y) < 1 \text{ for some } y \in B(t)\}$ and $C(\tau) = \gamma_p(\overline{B^1(t)}, \tau)$. Then $C(\tau)$ is a bounded subset of X which strongly absorbs points of X at time τ. Indeed, given $x \in X$ let σ_x be such that $S(r,s)x \in B(t)$, $s+\sigma_x \leqslant r \leqslant \tau \leqslant t$. Then, since $B(t) \subset C(\tau)$, it follows that $C(\tau)$ pullback strongly absorbs points at time τ.

Due to the equicontinuity of the process, if K is a compact subset of X and $x \in K$ there are $\nu_x \in \mathbb{N}$ and $\epsilon_x > 0$ such that $S(r, r-\nu_x)B_{\epsilon_x}(x) \subset B^1(t)$, para todo $r \leqslant \tau$. It follows that $S(\tau, r-\nu_x)(B_{\epsilon_x}(x)) \subset C(\tau)$ para todo $r \leqslant \tau$. Since K is compact there is a $p \in \mathbb{N}^*$ and $x_1, \cdots, x_p$ in K such that $K \subset \cup_{i=1}^{p} B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$ and for $\sigma_K = \max\{\sigma_{x_i} : 1 \leqslant i \leqslant p\}$, $S(\tau, r-\sigma_K)K \subset C(\tau)$ para todo $r \leqslant \tau$. Then, it follows from the fact that $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly bounded that $\bigcup_{\tau \leqslant t} C(\tau)$ is bounded and pullback strongly absorbs compact subsets of X at time t. ■

Corolário 3.2.22 *If $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ is a bounded semigroup which is point dissipative and asymptotically compact, then it has a global attractor.*

Definição 3.2.23 *We say that an evolution process $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is* pullback strongly asymptotically compact *if for each $t \in \mathbb{T}$, bounded sequence $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in X,* *sequences* $\{s_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\{\tau_k : k \in \mathbb{N}\}$ *with* $t \geqslant \tau_k \geqslant s_k$ *and* $\tau_k - s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *then* $\{S(\tau_k, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ *is relatively compact.*

Observação 3.2.24 *If* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *is a semigroup,* $\{S(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *is* pullback strongly asymptotically compact *if and only if* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *is* pullback asymptotically compact *if and only if* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *is* asymptotically compact *in the sense of [43].*

The following theorem is an important result giving sufficient conditions for the existence of a pullback attractor for an evolution process.

Teorema 3.2.25 *If a process* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *is pullback strongly compact dissipative and pullback strongly asymptotically compact, then* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *is pullback strongly bounded dissipative.*

Prova: From the fact that $S(t,s)$ is pullback strongly compact dissipative there is a $B(t)$ closed and bounded which pullback strongly absorbs compact subsets of X at time t. First we prove that, for each bounded subset D of X $\omega(D,\tau) \subset B(t)$ for each $\tau \leqslant t$. If $y \in \omega(D,\tau)$, there is a sequence $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ with $s_k \leqslant \tau$ and $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ and a sequence $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ such that $\mathrm{dist}(S(\tau, s_k)x_k, \omega(D,\tau)) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Taking $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ with $\tau \geqslant r_k \geqslant s_k$ and $\min\{\tau - r_k, r_k - s_k\} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ and using the fact that $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly asymptotically compact (taking subsequences if necessary), there is a $z \in X$ such that $z_k := S(r_k, s_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z$. From the compactness of the set $K = \{z_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$, there is a $\sigma_K \in \mathbb{N}$ such that $S(\tau, r_k)K \subset B(t)$ whenever $\tau - r_k \geqslant \sigma_K$. Thus, para todo suitably large k,

$$S(\tau, s_k)x_k = S(\tau, r_k)S(r_k, s_k)x_k \subset S(\tau, r_k)K \subset B(t).$$

This completes the proof that $\omega(D,\tau) \subset B(t)$ for each $\tau \leqslant t$.

Since $\omega(D,\tau)$ pullback attracts D at time τ, it follows that $B(t)$ pullback attracts bounded subsets of X at time τ for each $\tau \leqslant t$; that is, $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly bounded dissipative. ■

We are now ready to give the main result of this section:

Teorema 3.2.26 *Let $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ be an evolution process with the property that, for each $t \in \mathbb{T}$ and $\tau > 0$, $\{S(s,s-\tau) : s \leqslant t\}$, is equicontinuous at x for each $x \in X$. If $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly point dissipative, pullback strongly bounded and pullback strongly asymptotically compact, then $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is pullback strongly bounded dissipative. Consequently, $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ has a pullback attractor $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ with the property that $\bigcup_{s\leqslant t} \mathcal{A}(s)$ is bounded for each $t \in \mathbb{T}$.*

3.3 Continuidade de atratores pullback

Uma questão fundamental no estudo da dinâmica assintótica (atratores) de processos de evolução é a sua continuidade relativamente a perturbações. Esta questão se apresenta de diversas formas tanto relativamente ao tipo de perturbação, quanto relativamente ao que se entende por proximidade. Em qualquer caso, um conceito apropriado de atrator deve evitar a explosão sob perturbação, o que é geralmente chamado de semicontinuidade superior de atratores. Embora menos comum, e mais difícil de provar, as vezes é também verdade que não há implosão de atratores sob perturbação ou seja, os atratores são semicontínuos inferiormente sob perturbação. Nesta seção provamos resultados dando condições que garantem a semicontinuidade superior e inferior de atratores.

Por toda esta seção vamos considerar Λ e X espaços métricos e, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\{S_\lambda(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ um de processo de evolução em X com atrator pullback $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t \in \mathbb{T}\}$. Sempre que estivermos tratando da continuidade de atratores pullback assumiremos que, para cada subconjunto compacto K de X,

$$\sup_{\tau\in[0,T]} \sup_{x\in K} \mathrm{d}(S_\lambda(t,t-\tau)x, S_{\lambda_0}(t,t-\tau)x) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0,\ t\in\mathbb{T},\ T>0, \tag{3.3.1}$$

que,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{t\leqslant\sigma}\mathcal{A}_\lambda(t) \text{ é limitado, } \forall\ \sigma\in\mathbb{T}, \tag{3.3.2}$$

e que,

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{\lambda_n}(t)} \text{ é compacto, } \forall\ t\in\mathbb{T} \text{ e } \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } \Lambda \text{ com } \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0. \tag{3.3.3}$$

3.3.1 Semicontinuidade Superior e Resultados Preliminares

A seguir damos significado à continuidade de uma família de atratores publlback.

Definição 3.3.1 *Se $I\subset\mathbb{T}$, diremos que*

i) $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t\in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente em* λ_0 *se*

$$\sup_{t\in I}\ \mathrm{dist}(\mathcal{A}_\lambda(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

ii) $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t\in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua inferiormente em* λ_0 *se*

$$\sup_{t\in I}\ \mathrm{dist}(\mathcal{A}_{\lambda_0}(t), \mathcal{A}_\lambda(t)) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

iii) $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t\in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é contínua em* λ_0 *se for semicontínua superiormente e inferiormente em* λ_0*.*

O lema a seguir é fundamental para a prova dos resultados a que se seguem sobre a continuidade de atratores pullback.

Lema 3.3.2 *Sejam* Λ, X, $\{S_\lambda(t,s) : (t,s)\in\mathcal{P}\}$ *e* $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t\in\mathbb{T}\}$ *como acima. Suponha que* (3.3.1), (3.3.2) *e* (3.3.3) *estão satisfeitas. Se* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência em* Λ *tal* *que* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ *e* $\xi_n : \mathbb{T} \to X$ *é uma solução global de* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *com* $\xi_n(t) \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$*, então existe uma solução global* $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ *de* $\{S_{\lambda_0}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *com* $\xi_0(t) \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$ *e subseqüência* $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* ξ_{n_k} *converge para* ξ_0 *uniformemente em intervalos limitados de* $\mathbb{T}$*.*

Prova: Note que $\{\xi_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência no conjunto compacto $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\lambda_n}(0)}$. Segue que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_0$ de $\mathbb{N}$ tal que $\{\xi_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é convergente com limite x_0. Seja $\xi_0(t) = S_{\lambda_0}(t,0)x_0$, $t \geqslant 0$. É claro de (3.3.1) com $t-\tau=0$ que ξ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, converge para ξ_0 uniformemente in intervalos limitados de $\mathbb{T}^+$.

Suponha por indução que tenhamos construído a solução $\xi_0 : [-k,\infty) \to X$, $k \in \mathbb{N}$, de $\{S_{\lambda_0}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ e subconjuntos infinitos $\mathbb{N}_k$ de $\mathbb{N}$ tais que ξ_n, $n \in \mathbb{N}_k$, converge ξ_0 uniformemente em intervalos limitados de $\mathbb{T}^+_{-k}$. Como a seqüência $\{\xi_n(-k-1)\}_{n\in\mathbb{N}_k}$ está no compacto $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\lambda_n}(-k-1)}$, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_{k+1}$ de $\mathbb{N}_k$ tal que $\{\xi_n(-k-1)\}_{n\in\mathbb{N}_{k+1}}$ é convergente com limite x_{-k-1}. Seja $\xi_0(t) = S(t,-k-1)x_{-k-1}$ para $t \in [-k-1,-k)$. Claramente, $\xi_0 : [-k-1,\infty) \to X$ é uma solução de $\{S_{\lambda_0}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ e ξ_n, $n \in \mathbb{N}_{-k-1}$, converge para ξ_0 uniformemente em limitados de $\mathbb{T}^+_{-k-1}$.

Este procedimento nos dá uma solução global $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ de $\{S_{\lambda_0}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tal que $\{\xi_0(s) : s \leqslant t\}$ é limitado para cada $t \in \mathbb{T}$ e portanto, $\xi_0(t) \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)$. Além disso, se n_k é o $k-$ésimo elemento de $\mathbb{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$, então ξ_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$ converge para ξ_0 uniformemente em subconjuntos limitados de $\mathbb{T}$. Isto completa a prova. ∎

Sob as hipóteses acima, a semicontinuidade superior de atratores pullback é automática como mostra o nosso resultado a seguir

Teorema 3.3.3 *Seja* Λ *um espaço métrico,* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* Λ *com* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$*. Considere a família de processos de evolução* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Suponha que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *e que* (3.3.1), (3.3.2) *e* (3.3.3) *estão satisfeitas. Então,* $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é semicontinua* *superiormente para cada* $t \in \mathbb{T}$*; isto é,*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Prova: Do Lema 3.3.2, dada uma seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)$, existe um $y \in X$, uma subseqüência de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma), uma solução global $\xi_{\lambda_n} : \mathbb{T} \to X$ de $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ com $\xi_{\lambda_n}(t) = x_n$ e $\xi_{\lambda_n}(s) \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$ e uma solução global $\xi_{\lambda_0} : \mathbb{T} \to X$ de $\{S_{\lambda_0}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tal que $\xi_{\lambda_n}(\cdot)$ converge para $\xi_{\lambda_0}(\cdot)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}$. Em particular $\xi_{\lambda_0}(t) \in A_{\lambda_0}(t)$ e o resultado segue do Lema 1.2.2. ■

O resultado a seguir nos permite garantir a continuidade de atratores pullback $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$, com $I \subset \mathbb{T}$ limitado, a partir da continuidade para um único $t_0 \in \mathbb{T}$.

Teorema 3.3.4 *Seja* Λ *um espaço métrico,* $\{S_\lambda(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *um processo de evolução em* X *com atrator pullback* $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t \in \mathbb{T}\}$, $\lambda \in \Lambda$*. Suponha que* (3.3.1)*,* (3.3.2) *e* (3.3.3) *estão satisfeitas. Se para algum* $t_0 \in \mathbb{T}$ *a família* $\{\mathcal{A}_\lambda(t_0)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente* (*inferiormente*) *em* λ_0 *e* I *é um intervalo limitado em* $\mathbb{T}^+_{t_0}$*, então a família* $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ *semicontínua superiormente* (*inferiormente*) *em* λ_0*.*

Prova: Sempre podemos supor que $I = [t_0, t_0 + T] \cap \mathbb{T}$ para algum $T > 0$. Além disso, já sabemos que $\{\mathcal{A}_\lambda(t)\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 para cada $t \in \mathbb{R}$.

Mostremos primeiramente que $\{\mathcal{A}_\lambda(t_0)\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 e $a \geqslant t_0$, então $\{\mathcal{A}_\lambda(a)\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontinua inferiormente. Para cada $x_0 \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(a)$ existe uma solução global $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ com $\xi_0(a) = x_0$. Se $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em Λ com $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, seja $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X com $y_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)$ tal que $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_0(t_0)$. Então, existe uma subseqüência de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que denotamos da mesma forma) e uma seqüência $\xi_n : \mathbb{T} \to X$ de soluções globais tais que $\xi_n(t_0) = y_n$ e $\xi_n(t) \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$ e uma solução global $\tilde{\xi}_0 : \mathbb{T} \to X$ tal que $\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{\xi}_0$ uniformemente em subconjuntos limitados de $\mathbb{T}$ e $\xi_0(t) = \tilde{\xi}_0(t)$ para todo $t \geqslant t_0$. Segue que $\xi_n(a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ e prova que $\{\mathcal{A}_\lambda(a)\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0.

Antes de prosseguir vamos primeiramente provar que, se $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em Λ com $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em I com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{t}$, então

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(\bar{t}), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.3.4}$$

e

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_n), \mathcal{A}_{\lambda_n}(\bar{t})) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.3.5}$$

Provemos (3.3.4) por contradição. Se existe um $\epsilon > 0$ e uma seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(\bar{t})$ tal que $\operatorname{dist}(x_n, \mathcal{A}_{\lambda_n}(t_n)) \geqslant \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos soluções globais $\xi_n : \mathbb{T} \to X$ de $\{S_{\lambda_n}(t,s) : t \geq s\}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ de $\{S_{\lambda_0}(t,s) : t \geq s\}$ tais que $\xi_n(t) \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)$, $\xi_0(t) \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$, $\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_0$ uniformemente em subconjuntos limitados de $\mathbb{T}$ e $\xi_n(\bar{t}) = x_n$. Logo, da convergência uniforme de ξ_n para ξ_0 obtemos que

$$\operatorname{dist}(x_n, \xi_n(t_n)) \leqslant \operatorname{dist}(x_n, \xi_0(\bar{t})) + \operatorname{dist}(\xi_0(\bar{t}), \xi_0(t_n)) + \operatorname{dist}(\xi_0(t_n), \xi_n(t_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e

$$\operatorname{dist}(x_n, \xi_n(t_n)) \geqslant \operatorname{dist}(x_n, \mathcal{A}_{\lambda_n}(t_n)) \geqslant \epsilon$$

o que é uma contradição.

A prova de (3.3.5) é semelhante e é deixada para o leitor.

Para provar a afirmativa sobre a semicontinuidade superior para $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ note que, se $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em Λ com $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em I com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{t}$, então

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_n), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t_n)) \leqslant{}& \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_n), \mathcal{A}_{\lambda_n}(\bar{t})) + \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(\bar{t}), \mathcal{A}_{\lambda_0}(\bar{t}))\\ &+ \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}(\bar{t}), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t_n)).\end{aligned}$$

Agora, de (3.3.4), (3.3.5) e da semicontinuidade superior de $\{\mathcal{A}_\lambda(\bar{t})\}_{\lambda\in\Lambda}$ segue que

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_n), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A prova da afirmativa sobre a semicontinuidade inferior é semelhante e é deixada para o leitor. ∎

3.3.2 Semicontinuidade inferior de atratores pullback

Para enunciar um resultado sobre semicontinuidade inferior de atratores pullback, vamos primeiramente apresentar alguns conceitos.

Definição 3.3.5 *Seja ξ^* uma solução global do processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$. O* conjunto instável *de ξ^* é o conjunto definido por*

$$\begin{aligned} W^u(\xi^*) =&\{(\tau,\zeta) \in \mathbb{T} \times X : \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{T} \to X \text{ de} \\ &\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\} \text{ com } \xi(\tau) = \zeta \text{ e } d(\xi(t), \xi^*(t)) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0\}. \end{aligned}$$

A seção do conjunto instável de ξ^* no instante τ é denotada por

$$W^u(\xi^*)(\tau) = \{\zeta : (\tau,\zeta) \in W^u(\xi^*)\}.$$

Um conjunto instável local de ξ^* no instant τ é definido por

$$\begin{aligned} W^u_\delta(\xi^*)(\tau) = \{\zeta \in W^u(\xi^*)(\tau) : &\text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{T} \to X \\ &\text{com } \xi(\tau) = \zeta \text{ e } d(\xi(t), \xi^*(t)) < \delta \text{ para todo } t \leqslant \tau\}. \end{aligned}$$

Observação 3.3.6 *Observamos que, para semigrupos, se uma solução global $\xi^*(\cdot)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ e isolada, então ela deve ser um ponto de equilíbrio. De fato, dado $\delta > 0$, existe $r > 0$ tal que a solução global $x(t) \doteq \xi^*(\cdot + r)$ satisfaz $\mathrm{dist}(x(t), \xi^*(t)) < \delta$, a assim $\xi^*(t) = \xi^*(t+r)$, para todo $t \in \mathbb{T}$ e $r > 0$ suficientemente pequeno.*

Observação 3.3.7 *Note que, se ξ^* é uma solução global do processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ a família $\{W^u(\xi^*)(t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante. Além disso, se ξ^* é backwards-limitada e $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$, então a família $W^u(\xi^*)(t) \subset \mathcal{A}(t)$. Note ainda que, se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é um processo de evolução autônomo e ξ^* é um equilíbrio, então $W^u(\xi^*)(\tau)$ é independente de τ.*

Definição 3.3.8 *Diremos que duas soluções globais* $\xi_1^*, \xi_2^* : \mathbb{T} \to X$ *de um processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *são* separadas no passado *se* $\limsup_{t \to -\infty} \mathrm{dist}(\xi_1^*(t), \xi_2^*(t)) > 0$.

Observação 3.3.9 *Também observamos que, se duas soluções globais* $\xi_1^*, \xi_2^* : \mathbb{T} \to X$ *não são separadas no passado, então* $\mathrm{d}(\xi_1^*(t), \xi_1^*(t)) \to 0$, *quando* $t \to -\infty$, *e os conjuntos instáveis dessas soluções coincidem; isto é,*

$$W^u(\xi_1^*) = W^u(\xi_2^*).$$

Com isto em mente, estaremos interessados em conjuntos de soluções globais separadas no passado que são maximais. Claramente, um conjunto maximal de soluções separadas no passado não é único; uma vez que, qualquer solução ξ, *num conjunto maximal de soluções separadas no passado, pode ser substituída por qualquer outra no conjunto instável de* ξ *mantendo a maximalidade.*

Observação 3.3.10 *Se um processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *e* $\mathbb{S}$ *denota um conjunto maximal de soluções separadas no passado, então*

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup_{\xi^* \in \mathbb{S}} W^u(\xi^*)(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Como muitos dos conjuntos instáveis de soluções globais são os mesmo, existe a esperança que a família dos conjuntos instáveis de soluções separadas no passado possa não ser tão grande.

Teorema 3.3.11 *Seja* Λ *um espaço métrico,* $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência em* Λ *com* $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$. *Considere a família* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, $n \in \mathbb{N}$, *de processos de evolução. Suponha que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tenha um atrator pullback* $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *e que* (3.3.1), (3.3.2) *e* (3.3.3) *estejam satisfeitas.*

Se

- *Existe uma seqüência de soluções separadas do passado* $\{\xi_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $\{\mathcal{A}_{\lambda_0}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *tal que*

$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*(\cdot))(t)}.$$

- *Para cada* $j \in \mathbb{N}$, *existe uma seqüência* $\{\xi_{j,n}^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $\xi_{j,n}^* : \mathbb{T} \to X$ *solução global de* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tal que, o conjunto instável local de* $\xi_{j,n}^*$ *se comporta continuamente quando* $n \to \infty$*; isto é, existem* $\delta_j > 0$ *e* $t_j \in \mathbb{T}$ *tais que*

$$\mathrm{dist}_H(W_{\delta_j}^u(\xi_j^*)(t), W_{\delta_j}^u(\xi_{j,n}^*)(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\ t \leqslant t_j.$$

Então a família $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), t \in \mathbb{T}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é semicontínua superiormente e inferiormente; isto é, para cada intervalo limitado* I *de* $\mathbb{T}$

$$\sup_{t\in I}\ [\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}(t), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t))] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Prova: Primeiramente note que a semicontinuidade superior é uma conseqüência direta do Teorema 3.3.3. Para provar que $\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}(t), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ é suficiente mostrar que para cada $t \in \mathbb{T}$ e $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)$ existe uma seqüência $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Dado $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)$ e $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in \bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*)(t)$ tal que

$$\mathrm{dist}(x, x_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.3.6}$$

Sejam $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_\epsilon \in W^u(\xi_j^*)(t)$ e $\xi_j : \mathbb{T} \to X$ uma solução global em $\{A_{\lambda_0}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ com $\xi_j(t) = x_\epsilon$ e $\mathrm{d}(\xi_j(s), \xi_j^*(s)) \overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Escolha $\tau > 0$ tal que

$$z_j = \xi_j(t-\tau) \in W_{\delta_j}^u(\xi_j^*)(t-\tau).$$

Da semicontinuidade inferior dos conjuntos instáveis locais, existe uma seqüência $\{z_j^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $z_j^n \in W_{\delta_j}^u(\xi_{j,n}^*)(t-\tau)$ tal que $z_j^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_j$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{dist}(S_{\lambda_n}(t,t-\tau)z_j^n, S_{\lambda_0}(t,t-\tau)z_j) < \frac{\epsilon}{2}, \ \text{ para todo } n \geqslant n_0. \tag{3.3.7}$$

Como $S_{\lambda_n}(t,t-\tau)z_j^n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)$, $x_\epsilon = S_{\lambda_0}(t,t-\tau)z_j$ e ϵ é arbitrário, a semicontinuidade inferior de $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ segue. O resultado agora segue facilmente do Teorema 3.3.4. ■

Observação 3.3.12

a) Note que, a prova é válida no contexto autônomo e no caso em que o atrator global é dado como união contável de conjuntos instáveis de soluções globais. Em particular, cobre o caso dos atratores globais descritos por união de conjuntos instáveis de pontos de equilíbrios que aparecem em [36].

b) Por outro lado observamos que não utilizamos em nenhum lugar a propriedade de atração pullback da família $\{\mathcal{A}_\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, de forma que nossos resultados valem para qualquer tipo de família invariante $\{A_\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, descritas como no teorema acima.

Note que, o papel desempenhado pelos conjuntos instáveis de soluções globais separadas no passado pode ser generalizado para conjuntos instáveis de famílias invariantes pelo processo de evolução.

De fato, seja $\{\Xi^*(t) : t \in \mathbb{T}\}$ uma família invariante pelo processo $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ e defina o *conjunto instável* de Ξ^* por

$$\begin{aligned} W^u(\Xi^*) = \{\, (\tau,\zeta) \in \mathbb{T}\times X :\ & \text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{T} \to X \text{ de} \\ & \{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\} \text{ satisfazendo } \xi(\tau) = \zeta \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(\xi(t), \Xi^*(t)) = 0\}. \end{aligned}$$

Definição 3.3.13 *Diremos que duas famílias invariantes $\Xi_i^* = \{\Xi_i^*(t) : t \in \mathbb{T}\}$, $i = 1, 2$, pelo processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$* separadas no passado *se*

$$\limsup_{t\to-\infty} [\operatorname{dist}_H(\Xi_1^*(t), \Xi_2^*(t)) + \operatorname{dist}_H(\Xi_2^*(t), \Xi_1^*(t))] > 0.$$

Então, com exatamente a mesma prova que o teorema anteior, o seguinte vale

Teorema 3.3.14 *Seja Λ um espaço métrico, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em Λ com $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$. Considere a família $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, $n \in \mathbb{N}$, de processos de evolução. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tenha um atrator pullback $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ e que* (3.3.1), (3.3.2) *e* (3.3.3) *estejam satisfeitas. Se*

- *Existe uma seqüência de famílias invariantes, duas a duas separadas no passado* $\{\Xi_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ *tal que*
$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\Xi_j^*(\cdot))(t)}.$$

- *Para cada* $j \in \mathbb{N}$, *existe uma seqüência* $\{\Xi_{j,n}^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de famílias invariantes* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, *e* $t_j \in \mathbb{T}$ *tais que o conjunto instável local de* $\Xi_{j,n}^*$ *se comporta semi-continua inferiormente quando* $n \to \infty$; *isto é, para cada* $j \in \mathbb{N}$, *existem* $\delta_j > 0$ *e* $t_j \in \mathbb{T}$ *tais que*
$$\mathrm{dist}_H(W^u_{\delta_j}(\Xi_j^*)(t), W^u_{\delta_j}(\Xi_{j,n}^*)(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\, t \le t_j.$$

Então a família $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), t \in \mathbb{T}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é semicontínua inferiormente; isto é, para cada intervalo* I *de* $\mathbb{T}$
$$\sup_{t\in I}\ \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.3.3 Equi-atração e continuidade de atratores

The continuity of attractors is strongly related to the uniform attraction with respect to the underlying parameter. When the rate of attraction is uniformly exponentially fast this is already seen in the work by Babin e Vishik [5].

Under some continuity assumptions on the evolution process, the equivalence between uniform attraction e continuity of attractors has been established by Desheng e Kloeden in [26, 27]. In this section we present a description of the continuity of attractors under the uniform attraction property aiming to a result on the rate of convergence of attractors (seen in [5] for global attractors of semigroups with uniform exponential rate of attraction).

Definição 3.3.15 *Let* Λ *be a metric space e* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence in* Λ *with* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ *(note that* λ_0 *is the first element of the sequence). If* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *is an evolution* *processes with a pullback attractor* $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$, *we say that* $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *is equi-pullback attracting, if*

$$\lim_{s\to-\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}_H(S_{\lambda_n}(t_0, s)D, \mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)) = 0,$$

for each bounded subset D *of* X. *If* $\{S_{\lambda_n}(t) : t \geqslant 0\}$ *is a semigroup with a global attractor* $\mathcal{A}_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, *we say that* $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is equi-attracting at time* t_0 *if, for each bounded subset* D *of* X

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}_H(S_{\lambda_n}(t)D, \mathcal{A}_{\lambda_n}) = 0.$$

Teorema 3.3.16 *Let* Λ *be a metric space e* $\{S_\lambda(t, s) : (t, s) \in \mathcal{P}\}$ *be an evolution process in* X *with a pullback attractor* $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\lambda \in \Lambda$. *Assume that* (3.3.1), (3.3.2) *and* (3.3.3) *are satisfied. If* I *is a bounded subset of* $\mathbb{R}$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is a sequence in* Λ *with* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ *and, for some* $t_0 \in \mathbb{R}$, $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is equi-pullback attracting, then*

$$\sup_{t\in I} \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Prova: From (3.3.2) we have that, for each $t \in \mathbb{R}$ there exists $B(t_0) \subset X$ bounded such that

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\leqslant t_0} \mathcal{A}_{\lambda_n}(t) \subset B(t_0).$$

Given $\varepsilon > 0$, it follows from the equi-pullback attraction of $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ that there exists $s_0 = s(\varepsilon, B(t_0)) \leqslant t_0$ such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}_H(S_{\lambda_n}(t_0, s)B(t_0), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } s \leqslant s_0.$$

Thus, in particular we have that

$$\sup_{t\in I} \operatorname{dist}_H(S_{\lambda_0}(t_0, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s_0), S_{\lambda_0}(t, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_0}(s_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On the other hand, due to (3.3.1) and (3.3.3), there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\operatorname{dist}_H(S_{\lambda_n}(t_0, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s_0), S_{\lambda_0}(t_0, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geqslant n_0.$$

From this e from the invariance of the attractors we have that, para todo $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t_0)) \leqslant\ & \mathrm{dist}_H(S_{\lambda_n}(t_0, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s_0), S_{\lambda_0}(t_0, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s_0)) \\ &+ \mathrm{dist}_H(S_{\lambda_0}(t_0, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s_0), S_{\lambda_0}(t_0, s_0)\mathcal{A}_{\lambda_0}(s_0)) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

In a similar way we obtain that $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(\mathcal{A}_{\lambda_0}(t_0), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)) = 0$ e the proof is completed by application of Theorem 3.3.4. ∎

When the processes are semigroups Theorem 1.5.2 has a simple counterpart which is stated next.

Corolário 3.3.17 *Let Λ be a metric space, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in Λ with $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ and $\{S_{\lambda_n}(t) : t \geqslant 0\}$ be a semigroup in X with a global attractor $\mathcal{A}_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Assume that for each compact subset K of X,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in K} \mathrm{dist}(S_{\lambda_n}(t)x, S_{\lambda_0}(t)x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ T > 0,$$

that $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\lambda_n}}$ is compact and that $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is equi-attracting, then

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Next we prove a converse of Theorem 1.5.2. These results together extend Theorem 3.2 of [27] by just requiring uniform pullback strong boundedness e uniform asymptotic compactness in place of uniform compactness as in [27].

Definição 3.3.18 *We say that the family of semigroups $\{S_n(t) : t \geqslant 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly pullback strongly bounded at time t if,*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\tau\leqslant t} \bigcup_{s\leqslant\tau} S_{\lambda_n}(\tau, s)B \text{ is bounded,}$$

whenever B is a bounded subset of X. We say that the family of semigroups $\{S_n(t) : t \geqslant 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded if $\{S_n(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ is uniformly pullback bounded at time t.

Definição 3.3.19 *Given $t\in\mathbb{R}$, a family of evolution processes $\{S_{\lambda_n}(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is said to be uniformly pullback asymptotically compact at time t if, whenever $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in $\mathbb{R}_t^-$ with $s_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence in X and $\{S_{\lambda_n}(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded, we have that $\{S_{\lambda_n}(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ has a convergent subsequence. We say that the family of semigroups $\{S_{\lambda_n}(t) : t \geqslant 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly asymptotically compact if $\{S_{\lambda_n}(t-s) : (t,s)\in\mathcal{P}\}$ is uniformly pullback asymptotically compact at time t.*

Teorema 3.3.20 *Let Λ be a metric space, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in Λ with $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ and $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s)\in\mathcal{P}\}$ be an evolution process in X with a pullback attractor $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), t\in\mathbb{R}\}$, $n\in\mathbb{N}$. Assume that, for some $t_0\in\mathbb{R}$, for each compact subset K of X e for each $T>0$*

$$\sup_{\tau\in[0,T]}\ \sup_{x\in K}\ \operatorname{dist}(S_{\lambda_n}(t_0,t_0-\tau)x, S_{\lambda_0}(t_0,t_0-\tau)x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ T>0. \tag{3.3.8}$$

If $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s)\in\mathcal{P}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly pullback strongly bounded at time t_0, uniformly pullback asymptotically compact at time t_0 e that

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t_0)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.3.9}$$

then $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)}$ is compact and $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)\}$ is equi-pullback attracting.

Prova: The proof that $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{\lambda_n}(t_0)}$ is compact follows immediately from (3.3.9). The proof of the equi-pullback attraction is done by contradiction. Assume that there exist $\epsilon>0$, a sequence $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{t_0}^-$ and a bounded sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that, by (3.3.9),

$$\operatorname{dist}(S_{\lambda_n}(t_0,s_n)x_n, \mathcal{A}_{\lambda_0}(t_0)) \geqslant \epsilon.$$

It follows from the uniform pullback strong boundedness of the family $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s)\in\mathcal{P}\}_{n\in\mathbb{N}}$ that

$$B=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{\tau\leqslant t_0}\bigcup_{s\leqslant\tau} S_{\lambda_n}(\tau,s)x_n}$$

is bounded e it follows from the uniform asymptotic compactness and from (3.3.8) that, for each $s \leqslant t_0$ there is a $b \in B$ such that

$$\mathrm{dist}(S_{\lambda_0}(t_0, s)b, \mathcal{A}_{\lambda_0}(t_0)) \geqslant \epsilon$$

and that contradicts the fact that $\mathcal{A}_{\lambda_0}(t_0)$ pullback-attracts bounded subsets of X under $\{S_{\lambda_0}(t, s) : (t, s) \in \mathcal{P}\}$. This completes the proof of equi-pullback attraction. ∎

We remark that from the equi-pullback attraction at time t_0 e making the assumptions uniform in a bounded interval I of $\mathbb{R}$ one may also obtain a uniform equi-pullback attraction result from continuity of the family $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t) : t \in I\}$ in the Haurdorff metric.

Next we give a converse of Corollary 3.3.17 which extends Theorem 2.3 of [26] requiring uniform boundedness and uniform asymptotic compactness in place of uniform compactness.

Corolário 3.3.21 *Let Λ be a metric space, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in Λ with $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ and $\{S_{\lambda_n}(t) : t \geqslant 0\}$ be a semigroup in X with a global attractor $\mathcal{A}_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Assume that $\{S_{\lambda_n}(t) : t \geqslant 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded, uniformly asymptotically compact e that*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

and that for each compact subset K of X,

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in K} \mathrm{dist}(S_{\lambda_n}(t)x, S_{\lambda_0}(t)x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ T > 0. \tag{3.3.10}$$

Then, $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\lambda_n}}$ is compact and $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is equi-attracting.

Rate of convergence of pullback-attractors

Based on Theorem 1.5.2 we will now explain how one can obtain a rate of approximation of equi-attracting pullback attractors.

Teorema 3.3.22 *Let Λ be a metric space e $\{S_\lambda(t, s) : (t, s) \in \mathcal{P}\}$ be an evolution process in X with a pullback attractor $\{\mathcal{A}_\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\lambda \in \Lambda$. Assume that* (3.3.1)*,* (3.3.2) *and (3.3.3) are satisfied. Assume also that, if I is a bounded subset of $\mathbb{R}$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in Λ with $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, there is a strictly decreasing function $\eta : \mathbb{R}^+ \to (0,\infty)$ with $\eta(0) = \eta_0$, $\lim_{\theta\to-\infty} \eta(\theta) = 0$ such that*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in I} \operatorname{dist}_H(S_{\lambda_n}(t,s) \bigcup_{\tau\leqslant t} \mathcal{A}_{\lambda_n}(\tau), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)) \leqslant \eta(t-s),$$

para todo $s \leqslant t$ e that there are $c, L > 0$ e a sequence $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of positive real numbers with $\rho_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ such that

$$\operatorname{dist}(S_{\lambda_n}(t,s)x, S_{\lambda_0}(t,s)y) \leqslant ce^{L(t-s)}(\mathrm{d}(x,y) + \rho_n). \tag{3.3.11}$$

Then

$$\sup_{t\in I} \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \leqslant h(\rho_n) := \min_{\epsilon\in(0,\eta_0]} 2\left\{ce^{L\eta^{-1}(\epsilon)}\rho_n + \epsilon\right\}.$$

Prova: Note that, for $s \leqslant t$,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) &\leqslant \operatorname{dist}_H(S_{\lambda_n}(t,s)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s), S_{\lambda_0}(t,s)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s))\\ &\quad + \operatorname{dist}_H(S_{\lambda_0}(t,s)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s), S_{\lambda_0}(t,s)\mathcal{A}_{\lambda_0}(s))\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Now note that, from (3.3.11),

$$\operatorname{dist}(S_{\lambda_n}(t,s)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s), S_{\lambda_0}(t,s)\mathcal{A}_{\lambda_n}(s)) \leqslant \sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_n}(s)} \operatorname{dist}(S_{\lambda_n}(t,s)x, S_{\lambda_0}(t,s)x) \leqslant ce^{L(t-s)}\rho_n.$$

From this, (3.3.11) e (3.3.12) we get that

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \leqslant e^{L(t-s)}\rho_n + \eta(t-s).$$

Given $\epsilon \leqslant \eta_0$ let $\tau = \eta^{-1}(\epsilon)$. Then, for $s = t - \tau$,

$$\sup_{t\in I} \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \leqslant ce^{L\eta^{-1}(\epsilon)}\rho_n + \epsilon.$$

Proceeding in a similar way we obtain

$$\sup_{t\in I} \operatorname{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}(t), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t)) \leqslant ce^{L\eta^{-1}(\epsilon)}\rho_n + \epsilon, \tag{3.3.13}$$

and consequently

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \leqslant 2 \min_{\epsilon \in (0,\eta_0]} \left\{ c e^{L\eta^{-1}(\epsilon)} \rho_n + \epsilon \right\} =: h(\rho_n). \blacksquare$$

In the particular case of being the family $A_\lambda(t)$ equi-pullback exponential attracting we can then give a precise rate of convergence:

Corolário 3.3.23 *Assume that all the conditions of Theorem 3.3.22 are satisfied e that there is a $\nu > 0$ such that $\eta(t-s) = ce^{-\nu(t-s)}$ para todo $s \leqslant t$. Then, there is a constant $\bar{c} > 0$ such that*

$$\sup_{t\in I} \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \leqslant \bar{c}\rho_n^{\frac{\nu}{\nu+L}}.$$

Prova: Since

$$\sup_{t\in I} \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \leqslant h(\rho_n) := \min_{\epsilon\in(0,\eta_0]} 2 \left\{ c e^{L\eta^{-1}(\epsilon)} \rho_n + \epsilon \right\}$$

and $\eta^{-1}(\epsilon) = \log\left(\frac{c}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, minimizing the right hand side of the above expression for $\epsilon \in (0, \eta(0)]$ we find it happens for $\epsilon = c\left(\frac{L}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+L}} \rho_n^{\frac{\nu}{\nu+L}}$. Since the left hand side of the above expression is independent of ϵ, we have that

$$\sup_{t\in I} \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) \leqslant 2c \left(\left(\frac{L}{\nu}\right)^{\frac{-\nu}{\nu+L}} + \left(\frac{L}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+L}} \right) \rho_n^{\frac{\nu}{\nu+L}} =: \bar{c}\rho_n^{\frac{\nu}{\nu+L}}. \blacksquare$$

3.4 Processos de evolução Gradient-Like

3.4.1 Definição e principais propriedades

In this section we extend the concept of gradient-like semigroups to evolution processes. Note that a process will not, in general, possess any equilibrium point. Hence, a generalization of the concept of gradient-like semigroups to processes will require a structure that replaces the role that an equilibrium has for a gradient-like semigroup. Those structures are the *isolated invariant families* which we define next inspired by the definition of isolated invariant sets given in Definition 1.4.19.

Definição 3.4.1 *Let* $\Xi := \{\Xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *be an invariant family for the evolution process* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$*. The set* $\Gamma = \cup\{\Xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *is called the trace of* $\{\Xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$*.*

If there exists $\delta > 0$ *such that* Ξ *is the maximal invariant family in* $\mathcal{O}_\delta(\Gamma) := \{z \in X : \mathrm{dist}(z, \Gamma) < \delta\}$*, then we say that* Ξ *is an* isolated invariant family*.*

$\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1^*, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ *is said a* set of isolated invariant families *if each* Ξ_i^* *is an isolated invariant family e there exists* $\delta > 0$ *such that* $\mathcal{O}_\delta(\Gamma_i^*) \cap \mathcal{O}_\delta(\Gamma_j^*) = \varnothing$*,* $1 \leqslant i < j \leqslant \mathfrak{p}$*, where* Γ_i^* *is the trace of* $\{\Xi_i^*(t) : t \in \mathbb{R}\}$*.*

Observação 3.4.2 *Let* X *be a Banach space,* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *be a nonlinear semigroup on* X*,* $\{S(t,s) : S(t,s) = S(t-s),\ (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ *be the associated nonlinear evolution process.*

- *If* J *is an isolated invariant set for* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$*, then* $\mathcal{J} = \{J(t) \subset X : J(t) = J,\ t \in \mathbb{R}\}$ *is an isolated invariant family for* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$*.*

- *If* $\xi : \mathbb{R} \to X$ *is a global solution for* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ *the invariant family* $\Xi = \{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *is not an isolated invariant family unless* ξ *is an isolated equilibrium solution. In fact, the invariant family* $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}(t) = \Gamma(\Xi) : t \in \mathbb{R}\}$ *(where* $\Gamma(\Xi)$ *is the trace of* Ξ*), is such that* $\Xi(t) \ni \xi(t)$ *for all* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\Xi(t) \subset \mathcal{O}_\delta(\Gamma(\Xi))$ *for all* $\delta > 0$*, showing that* Ξ *is not maximal in* $\mathcal{O}_\delta(\Gamma(\Xi))$ *for any* $\delta > 0$*.*

Definição 3.4.3 *Let* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ *be a nonlinear evolution process with a pull-back attractor* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *which contains a finite set of isolated invariant families* $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \cdots \Xi_n^*\}$*. Let* Γ_i^* *be the trace of* Ξ_i^**. If* δ *is as in Definition 3.4.1 e fix* $\epsilon_0 \in (0, \delta)$*, for* $\Xi^* \in \boldsymbol{\Xi}$ *e* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$*, an* $\epsilon-$*chain from* Ξ^* *to* Ξ^* *is subset* $\{\ell_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *of* $\{1, \cdots, \mathfrak{p}\}$*, together with numbers* $\tau_i < \sigma_i < t_i$ *in* $\mathbb{T}$*,* $1 \leqslant i \leqslant k$*, e* u_i *in* X*,* $1 \leqslant i \leqslant k$*, such that* $u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Gamma_{\ell_i}^*)$*,* $S(\sigma_i, \tau_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\cup_{i=1}^k(\Gamma_{\ell_i}^*))$ *and* $S(t_i, \tau_i)u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Gamma_{\ell_{i+1}}^*)$*,* $1 \leqslant i \leqslant k$*, with* $\Xi^* = \Xi_{\ell_{k+1}}^* = \Xi_{\ell_1}^*$*. We say that* $\Xi^* \in \boldsymbol{\Xi}$ *is chain recurrent if there is an* $\epsilon_0 \in (0, \delta)$ *e* $\epsilon-$*chain from* Ξ^* *to* Ξ^* *for each* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$*.*

Definição 3.4.4 *Let X be a Banach space e $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ be an evolution process in X which has a pullback attractor $\{\mathcal{A}(t):t\in\mathbb{R}\}$. We say that $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ is a generalized gradient-like process if the following two hypotheses are satisfied:*

(H1) There is a finite set $\boldsymbol{\Xi}=\{\Xi_i^*:\mathbb{R}\to X:1\leqslant i\leqslant\mathfrak{p}\}$ of isolated invariant families in $\{\mathcal{A}(t):t\in\mathbb{R}\}$ with the property that any global solution $\xi:\mathbb{R}\to X$ in $\{\mathcal{A}(t):t\in\mathbb{R}\}$ satisfies

$$\lim_{t\to-\infty}\operatorname{dist}(\xi(t),\Gamma_i^*)=0 \ \ e\ \ \lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}(\xi(t),\Gamma_j^*)=0,$$

for some $1\leqslant i,j\leqslant\mathfrak{p}$.

(H2) $\boldsymbol{\Xi}=\{\Xi_1^*,\cdots,\Xi_{\mathfrak{p}}^*\}$ does not contain any chain recurrent invariant family.

When $\{S(t,s)=S(t-s):(t,s)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ we say that $\{S(t):t\geqslant 0\}$ is a generalized gradient-like nonlinear semigroup.

Next we introduce the definitions of unstable e stable sets which we will refer to as the unstable e stable sets, though they do not need to be a set (up to this point).

Definição 3.4.5 *Let $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ be an evolution process. The unstable set of an isolated invariant family Ξ^* with trace Γ^* is the set*

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{u}}(\Xi^*)=\{\,(\tau,\zeta)\in\mathbb{R}\times X:\ & \text{there is a global solution } \xi:\mathbb{R}\to X\\ & \text{such that } \xi(\tau)=\zeta \ \ e\ \lim_{t\to-\infty}\operatorname{dist}(\xi(t),\Gamma^*)=0\}.\end{aligned}$$

Also, $W^{\mathrm{u}}(\Xi^*)(\tau):=\{\zeta\in X:(\tau,\zeta)\in W^{\mathrm{u}}(\Xi^*)\}$.

Observação 3.4.6 *We note that, when the nonlinear evolution process $\{S(t,s):s\geqslant t\in\mathbb{R}\}$ comes from a nonlinear semigroup $\{S(t):t\geqslant 0\}$ ($S(t,s)=S(t-s)$, para todo $(t,s)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$), the above definition of stable e unstable set coincide with the usual definition of a unstable set of an invariant set.*

Unfortunately, in the case of a general nonlinear evolution process $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$*, this may not hold. To make the usual definition of unstable sets for an invariant family* $\{\Xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *coincide with Definition 3.4.5 we ask the following additional condition*

- If a solution $\xi(t)$ stays inside a suitably small neighborhood of Γ_i^* para todo t in an interval of the form $(-\infty, t_0]$ (respectively, $[n_0, \infty)$), then $\mathrm{dist}(\xi(t), \Xi(t)) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ (respectively, $\mathrm{dist}(\xi(t), \Xi(t)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

This condition is automatically satisfied in the case when the evolution process is given by a nonlinear semigroup, as seen in the next lemma.

<u>Lema</u> 3.4.7 *Let* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *be an asymptotically compact semigroup,* $\Gamma \subset X$ *be an isolated invariant set e* $\xi : \mathbb{R} \to X$ *be a global solution for* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$*. Assume that* U, V *are open subsets of* X *with* $\bar{U} \subset V$ *e such that* $\Gamma \subset U$*,* Γ *being the maximal invariant set contained in* V*. If there is a* $t_0 \in \mathbb{R}$ *such that* $\xi(t) \in U$ *para todo* $t \geqslant t_0$ *(respectively,* $t \leqslant t_0$*), then* $\xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma$ *(respectively,* $\xi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Gamma$*).*

Prova: Let us prove the case $\xi(t) \in U$ para todo $t \geqslant t_0$. The other case is completely similar. We argue by contradiction assuming that

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\xi(t), \Gamma) > 0.$$

Then, there exists $\epsilon > 0$ e a sequence $t_k \to \infty$ such that $\mathrm{dist}(\xi(t_k), \Gamma) \geqslant \epsilon$. From the asymptotic compactness of the semigroup, this sequence has a convergent subsequence (which we denote the same). If $y = \lim_{k\to\infty} \xi(t_k)$, then $\mathrm{dist}(y, \Gamma) \geqslant \epsilon$ e y belongs to the set $\omega-$limit set of $x_0 = \xi(0)$. If we denote by $\omega(x_0)$ the $\omega-$limit of x_0 we have that $y \in \omega(x_0) \subset \bar{U}$ and $\omega(x_0)$ is invariant under $\{S(t) : t \geqslant 0\}$. That contradicts the assumption that Γ is the maximal invariant subset of V e concludes the proof. ■

Gradient-like processes under perturbation

We are now ready to state the main result of this section

Teorema 3.4.8 *Let X be a Banach space, $\eta \in [0,1]$ be a parameter and $\{S_\eta(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ be a nonlinear evolution process in X with a pullback attractor $\{\mathcal{A}_\eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Assume that,*

a) $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]} \cup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}_\eta(t)}$ *is compact.*

b) $S_0(t,s) = S(t-s)$, $t \geqslant s$ *e* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *is a generalized gradient-like nonlinear semigroup with isolated invariant sets* $\{\Gamma^*_{1,0}, \cdots \Gamma^*_{n,0}\}$.

c) $\{S_\eta(t,s) : t \geqslant s \in \mathbb{R}\}$ *has finitely many isolated invariant families*

$$\mathbf{\Xi}_\eta = \{\Xi^*_{1,\eta}(\cdot), \cdots, \Xi^*_{n,\eta}(\cdot)\}$$

with traces $\{\Gamma^*_{1,\eta}, \cdots, \Gamma_{n,\eta}\}$, $\eta \in [0,1]$, *which behave upper e lower semi-continuously as* $\eta \to 0$ $(\sup_{1\leqslant i\leqslant n}[\mathrm{dist}(\Gamma^*_{i,\eta}, \Gamma^*_{i,0}) + \mathrm{dist}(\Gamma^*_{i,0}, \Gamma^*_{i,\eta})] \xrightarrow{\eta\to 0} 0)$.

d) $\|S_\eta(t+\tau,\tau)u - S_0(t+\tau,\tau)u\|_X \xrightarrow{\eta\to 0} 0$ *uniformly for* $\tau \in \mathbb{R}$ *e for* (t,u) *in compact subsets of* $\mathbb{T}^+ \times X$.

e) there are $\delta > 0$ *and* $\eta_0 \in (0,1]$ *such that, if* $\eta < \eta_0$, $\xi_\eta : \mathbb{R} \to X$ *is a global solution in* $\{\mathcal{A}_\eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *and* $\mathrm{dist}(\xi_\eta(t), \Gamma^*_{i,\eta}) < \delta$ *para todo* $t \leqslant t_0$ $(t \geqslant t_0)$, *then* $\mathrm{dist}(\xi_\eta(t), \Xi^*_{i,\eta}(t)) \xrightarrow{t\to-\infty} 0$ $(\mathrm{dist}(\xi_\eta(t), \Xi^*_{i,\eta}(t)) \xrightarrow{t\to+\infty} 0)$.

Then there exists $\eta_0 > 0$ *such that, para todo* $\eta \leqslant \eta_0$, $\{S_\eta(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ *is a generalized gradient-like nonlinear evolution process. Consequently, there exists* $\eta_0 > 0$ *such that*

$$\mathcal{A}_\eta(t) = \cup_{i=1}^n W^u(\Xi^*_{i,\eta})(t),\ t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \eta \in [0,\eta_0].$$

Theorem 3.4.8 generalizes the characterization result in [15] to perturbation of autonomous generalized gradient-like nonlinear semigroups. Hence, the limit problem need not to have a Lyapunov function, nor does Ξ_i^* need to be an equilibrium point. Of course it remains to prove in applications the continuity of the isolated global solutions $\Xi_{i,\eta}^*$ at $\eta = 0$ which is known to hold; e.g, for normally hyperbolic global solutions.

Observe that Theorem 3.4.8 implies that the pullback attractors for $\{S_\eta(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ may be, in some situations, characterized as the union of the unstable sets of isolated global solutions. Hyperbolicity is not required up to this point. Nonetheless, the persistence of the isolated global solutions will require some kind of hyperbolicity (in general normal hyperbolicity).

3.4.2 Processos de evolução assintoticamente autônomos

In this section we will consider asymptotically autonomous evolutions processes. Loosely speaking an evolution process is asymptotically autonomous if it is very close to an autonomous evolution processes when the initial times are very large. This idea leads to the following definition (for a similar definition see [49])

Definição 3.4.9 *Let $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ be an evolution process and $\{S_0(t) : t \geqslant 0\}$ be a semigroup. We say that*

- *$\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ is asymptotically autonomous at $-\infty$ if*

$$S(t+s,s)u_0 \overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} S_0(t)u_0$$

- *$\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ is asymptotically autonomous at $+\infty$ if*

$$S(t+s,s)u_0 \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} S_0(t)u_0$$

uniformly for t in bounded intervals of $[0,\infty)$ e for u_0 in compact subsets of X.

In order to obtain information about an asymptotically autonomous evolution process using the results of the previous sections it is convenient to introduce a new evolution process which is close for all initial times to an autonomous evolution process.

Let $\tau \in \mathbb{R}$, $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ be an evolution process e $\{S_\tau(t) : t \geqslant 0\}$ be a semigroup and construct the following truncated evolution processes

- Forward truncation at time τ

$$S_\tau(t,s) = \begin{cases} S(t,s), & \text{if } s \leqslant t \leqslant \tau, \\ S_\tau(t-\tau)S(\tau,s), & \text{if } s \leqslant \tau \leqslant t, \\ S_\tau(t-s), & \text{if } \tau \leqslant s \leqslant t \end{cases}$$

- Backward truncation at time τ

$$S_\tau(t,s) = \begin{cases} S_\tau(t-s), & \text{if } s \leqslant t \leqslant \tau, \\ S(t,\tau)S_\tau(\tau-s), & \text{if } s \leqslant \tau \leqslant t \\ S(t,s), & \text{if } \tau \leqslant s \leqslant t \end{cases}$$

<u>Teorema</u> 3.4.10 *If $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ is an asymptotically autonomous evolution process at $+\infty$ (at $-\infty$) and $\{S_0(t) : t \geqslant 0\}$ is the associated semigroup then the forward (backward) truncation of it satisfies $\|S_\tau(t+r,r)u - S_0(t+r,r)u\|_X \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformly for $r \in \mathbb{R}$ e for u in compact subsets of X.*

We are now ready to state the main result of this section as a corollary of Theorem 3.4.8.

<u>Teorema</u> 3.4.11 *Let X be a Banach space, $\tau \in (-\infty, \tau_0]$ be a parameter and $\{S_\tau(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ be a nonlinear evolution process in X with a pullback attractor $\{\mathcal{A}_\tau(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Assume that,*

a) $\overline{\cup_{\tau\in[0,1]} \cup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau(t)}$ *is compact.*

b) $S_0(t,s) = S(t-s)$, $t \geqslant s$ *e* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *is a generalized gradient-like nonlinear semigroup with isolated invariant sets* $\{\Gamma^*_{1,0}, \cdots \Gamma^*_{n,0}\}$.

c) $\{S_\tau(t,s) : t \geqslant s \in \mathbb{R}\}$ *has finitely many isolated invariant families*

$$\boldsymbol{\Xi}_\tau = \{\Xi^*_{1,\tau}(\cdot), \cdots, \Xi^*_{n,\tau}(\cdot)\}$$

with traces $\{\Gamma^*_{1,\tau}, \cdots, \Gamma_{n,\tau}\}$, $\tau \in (-\infty, \tau_0]$, *that behave upper e lower semicontinuously as* $\tau \to -\infty$ $(\sup_{1\leqslant i\leqslant n}[\mathrm{dist}(\Gamma^*_{i,\tau}, \Gamma^*_{i,0}) + \mathrm{dist}(\Gamma^*_{i,0}, \Gamma^*_{i,\tau})] \overset{\tau\to-\infty}{\longrightarrow} 0)$.

d) $\|S_\tau(t+s,s)u - S_0(t+s,s)u\|_X \overset{\tau\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ *uniformly for* $s \in \mathbb{R}$ *e for* u *in compact subsets of* X.

e) *there are* $\delta > 0$ *and* $\tau_0 \in (0,1]$ *such that, if* $\tau < \tau_0$, $\xi_\tau : \mathbb{R} \to X$ *is a global solution in* $\{\mathcal{A}_\tau(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *and* $\mathrm{dist}(\xi_\tau(t), \Gamma^*_{i,\tau}) < \delta$ *para todo* $t \leqslant t_0$ $(t \geqslant t_0)$, *then* $\mathrm{dist}(\xi_\tau(t), \Xi^*_{i,\tau}(t)) \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $(\mathrm{dist}(\xi_\tau(t), \Xi^*_{i,\tau}(t)) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0)$.

Then there exists $\tau_0 > 0$ *such that, para todo* $\tau \leqslant \tau_0$, $\{S_\tau(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ *is a generalized gradient-like nonlinear evolution process. Consequently, there exists* $\tau_0 > 0$ *such that*

$$\mathcal{A}_\tau(t) = \cup_{i=1}^n W^u(\Xi^*_{i,\tau})(t), \ t \in \mathbb{R} \ e \ \forall \tau \in (-\infty, \tau_0].$$

Capítulo 4

Dicotomias

A noção de hiperbolicidade é uma noção natural e simples que desempenha um papel fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos. É a noção básica para alguns dos mais importantes resultados conhecidos sobre a estrutura fina de sistemas dinâmicos. A noção que estende a noção de hiperbolicidade para os sistemas dinâmicos não-autônomos é a dicotomia exponencial que trataremos neste capítulo.

A robusteza da hiperbolicidade sob perturbação é a sua característica mais importante e pode ser facilmente provada na maioria dos casos (sob perturbações regulares ou singulares). Para dicotomias exponenciais, a robusteza é um problema desafiador (mesmo no caso regular) que foi primeiramente provado por [48] para equações diferenciais ordinárias (veja também [61, 24, 25, 23] para desenvolvimentos posteriores).

A apresentação que se segue está principalmente baseada no trabalho de [37] no que se refere à obtenção e um resultado geral de preservação da dicotomia sob perturbação. Procuramos apresentar os resultados de maneira geral e completa preenchendo muitas das lacunas deixadas para o leitor em [37].

O resultado a cerca da robusteza da dicotomia sob perturbações para processos de evolução *contínuos* é obtido através do resultado *discreto* correspondente. O resultado que nos permite provar a robusteza da dicotomia discreta sob perturbações é o Teorema

4.1.6 que dá uma caracterização da discotomia discreta[1].

4.1 Dicotomia exponencial para processos discretos

Fixaremos nesta seção um espaço de Banach X com norma $\|\cdot\|_X : X \to [0,\infty)$. Denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ o conjunto das transformações lineares contínuas de X nele mesmo, por $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}_n^- = \{j \in \mathbb{Z} : j \leqslant n\}$, $\mathbb{Z}_n^+ = \{j \in \mathbb{Z} : j \geqslant n\}$ e $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}_0^-$. Denotaremos por $\mathcal{P}_\mathbb{Z}$ o conjunto $\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : n \geqslant m\}$.

A seguir recordamos a definição de processo de evolução discreto linear.

Definição 4.1.1 *Uma família* $\{T_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}_\mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$, *é chamada um* processo de evolução discreto linear *em X se satisfaz*

(i) $T_{m,m} = I$, *para todo* $m \in \mathbb{Z}$,

(ii) $T_{n,p}T_{p,m} = T_{n,m}$, *para todo* $(n,p),(p,m) \in \mathcal{P}_\mathbb{Z}$.

Um processo de evolução discreto linear determina uma seqüência $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ em $\mathcal{L}(X)$ onde $T_n = T_{n+1,n}$. Reciprocamente, dada uma seqüência de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ em $\mathcal{L}(X)$ podemos definir um processo de evolução discreto linear $\{T_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}_\mathbb{Z}\}$ da seguinte maneira

$$T_{m,m} := I, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z},$$

$$T_{n,m} := T_{n-1} \circ \cdots \circ T_m, \text{ para todo } n > m \in \mathbb{Z}$$

Claramente, se $T_n = T$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então o processo de evolução discreto linear associado à $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é $\{T^{n-m} : (n,m) \in \mathcal{P}_\mathbb{Z}\}$ que coincide com o semigrupo linear

[1]Existe um resultado correspondente de caracterização da dicotomia exponencial no caso contínuo mas sua prova usa o caso discreto; como a prova direta do resultado principal no caso contínuo, Teorema 4.2.9, não se torna mais simples utilizando esta caracterizaçao optamos por primeiramente provar a robusteza da dicotomia no caso discreto e posteriormente utilizá-lo para provar a robusteza da dicotomia no caso contínuo.

$\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$. Neste sentido, processos de evolução discreto são uma classe mais ampla do que a dos semigrupos discretos.

Para um dado processo de evolução $\{T_{n,m} : (n, m) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}\}$, um ponto $x \in X$ definimos para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, a função $\mathbb{Z}_m \ni n \mapsto T_{n,m}(x) \in X$ é a *solução* por x do problema discreto de valor inicial

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = T_n x_n, \ n \geqslant m, \\ &x_m = x, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

onde $T_n = T_{n+1,n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Recordamos que uma solução global de $\{T_{n,m} : (n, m) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}\}$ é uma seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_n = T_{n,m}x_m$ sempre que $(n, m) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$.

Definição 4.1.2 *Diremos que um processo de evolução discreto* $\{T_{n,m} : (n, m) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *associado à* $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tem dicotomia exponencial discreta com constante* $M \geqslant 1$ *e expoente* $\omega > 0$ *se existem projeções* $\{Q_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tais que*

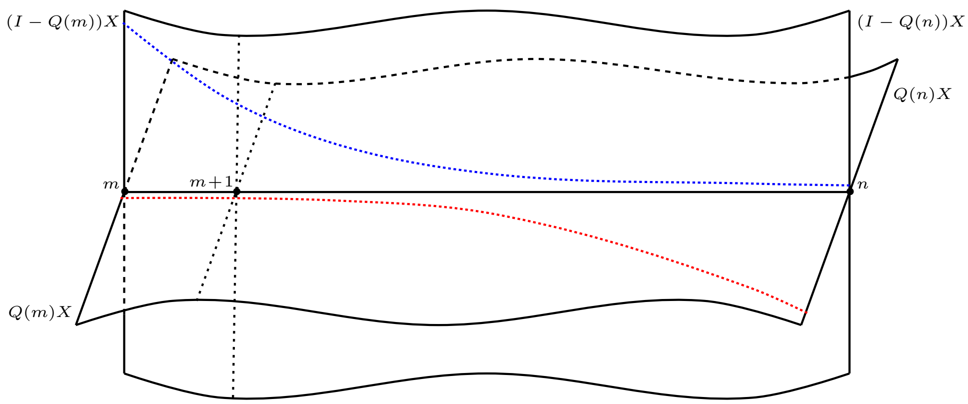
i) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $T_nQ_n = Q_{n+1}T_n$,

ii) Para todo $m > n \in \mathbb{Z}$, $T_{m,n} : R(Q_n) \to R(Q_m)$ *é um isomorfismo com inversa* $T_{n,m} : R(Q_m) \to R(Q_n)$,

iii) Valem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} &\|T_{n,m}(I - Q_m)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\omega(n-m)}, \quad n \geqslant m, \\ &\|T_{n,m}Q_m\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega(n-m)}, \quad n < m. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Normalmente diremos que $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *tem dicotomia exponencial discreta em vez de dizer que o processo de evolução discreto* $\{T_{n,m} : (n, m) \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}\}$ *associado à* $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *tem dicotomia exponencial discreta.*



Note que, se $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M, expoente $\omega > 0$ e projeções $\{Q_n : n \in \mathbb{Z}\}$, então $Q_n T_{n,m} = T_{n,m} Q_m$ para todo $n \geqslant m \in \mathbb{Z}$. Definimos a *função de Green*

$$G_{n,m} = \begin{cases} \ \ T_{n,m}(I - Q_m), & n \geqslant m \\ -T_{n,m} Q_m, & n < m. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

É fácil ver que

- $\|Q_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e
- $\|G_{n,m}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M e^{-\omega|n-m|}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.1.3 *Suponha que $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma seqüência em $\mathcal{L}(X)$. Se $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$, para $n \geqslant m \in \mathbb{Z}$, temos que*

$$x_n = T_{n,m} x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1} y_k, \ \ n > m.$$

Prova: Note que o resultado é válido para $m = n-1$. Suponha que o resultado vale para $m = r$; isto é,

$$x_n = T_{n,r} x_r + \sum_{k=r}^{n-1} T_{n,k+1} y_k$$

e vamos mostrar que o resultado vale para $m = r - 1$. De fato, como

$$x_r = T_{r-1}x_{r-1} + y_{r-1},$$

temos que

$$x_n = T_{n,r}T_{r-1}x_{r-1} + T_{n,r}y_{r-1} + \sum_{k=r}^{n-1} T_{n,k+1}y_k = T_{n,r-1}x_{r-1} + \sum_{k=r-1}^{n-1} T_{n,k+1}y_k$$

e o resultado está provado. ■

<u>Teorema</u> 4.1.4 *Se $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma seqüência limitada em X, então existe uma única solução global limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de*

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n \tag{4.1.4}$$

e esta solução é dada por

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}y_k,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.1.5}$$

Prova: Para ver que uma solução limitada de (4.1.4) é dada por (4.1.5) simplesmente observemos que

$$x_n = T_{n,m}x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1}y_k,\ n > m$$

disto segue que $(I - Q_n)x_n = T_{n,m}(I - Q_m)x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1}(I - Q_{k+1})y_k,\ n > m$. Sabendo que, de $ii)$ na Definição 4.1.2,

$$\|T_{n,m}(I - Q_m)x_m\|_X \leqslant Me^{-(n-m)\omega}\|x_m\|_X,\ n \geqslant m,$$

que $\{x_n\}$ é limitada e que $e^{-\omega} < 1$, temos que $\|T_{n,m}(I - Q_m)x_m\|_X \to 0$ as $m \to -\infty$ e a série

$$\sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1}(I - Q_{k+1})y_k$$

é convergente. Portanto, temos que

$$(I - Q_n)x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1}(I - Q_{k+1})y_k.$$

Por outro lado $Q_r x_r = T_{r,n} Q_n x_n + \sum_{k=n}^{r-1} T_{r,k+1} Q_{k+1} y_k,\ r > n$. Portanto

$$T_{n,r} Q_r x_r = Q_n x_n + \sum_{k=n}^{r-1} T_{n,k+1} Q_{k+1} y_k,\ r > n.$$

Sabendo que, de *iii*) na Definição 4.1.2,

$$\|T_{n,r} Q_r x_r\|_X \leqslant M e^{-(r-n)\omega} \|x_r\|_X,$$

que $\{x_n\}$ é limitada e que $e^{-\omega} < 1$, temos que $\|T_{n,r} Q_r x_r\|_X \to 0$ as $r \to \infty$ e a série

$$\sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1} Q_{k+1} y_k$$

é convergente. Portanto, temos que

$$Q_n x_n = -\sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1} Q_{k+1} y_k.$$

Isto implica que

$$x_n = Q_n x_n + (I - Q_n) x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} y_k.$$

A existência de uma solução limitada é feita simplesmente verificando que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dada por (4.1.5) é limitada e satisfaz (4.1.4). Para ver que é limitada, note que

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_X &\leqslant \sum_{-\infty}^{n-1} \|T_{n,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k\|_X + \sum_{n}^{\infty} \|T_{n,k+1} Q_{k+1} y_k\|_X \\
&\leqslant M \left(\sum_{-\infty}^{n-1} e^{-(n-k-1)\omega} + \sum_{n}^{\infty} e^{-(k+1-n)\omega} \right) \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_X = M\, \frac{1 + e^{-\omega}}{1 - e^{-\omega}} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_X
\end{aligned}$$

e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é limitada. Para ver que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma solução de (4.1.4), note que

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n+1,k+1} y_k = \sum_{-\infty}^{n} T_{n+1,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k - \sum_{n+1}^{\infty} T_{n+1,k+1} Q_{k+1} y_k \\
&= \sum_{-\infty}^{n-1} T_{n+1,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k - \sum_{n}^{\infty} T_{n+1,k+1} Q_{k+1} y_k + y_n \\
&= T_n \left(\sum_{-\infty}^{n-1} T_{n,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k - \sum_{n}^{\infty} T_{n,k+1} Q_{k+1} y_k \right) + y_n \\
&= T_n x_n + y_n.
\end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do teorema. ∎

Segue diretamente do Teorema 4.1.4 que as projeções associadas à dicotomia exponencial discreta são unicamente determinadas.

Corolário 4.1.5 *Se $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta, então as projeções associadas $\{Q_n : n \in \mathbb{Z}\}$ são unicamente determinadas.*

Prova: Suponha que $\{Q_n^{(i)} : n \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2$ são duas famílias de projeções associadas à $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Seja $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com $f_n = 0$ para todo $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = x$. Então, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é a única solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, temos do Teorema 4.1.4 que

$$x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}^{(i)} f_k = G_{n,m}^{(i)} x, \quad i = 1, 2,$$

onde, para $i = 1, 2$

$$G_{n,m}^{(i)} = \begin{cases} T_{n,m}(I - Q_m^{(i)}), & n \geqslant m \\ T_{n,m} Q_m^{(i)}, & n < m. \end{cases}$$

Em particular, $x_m = G_{m,m}^{(i)} x = (I - Q_m^{(i)})x$ e $Q_m^{(1)} x = Q_m^{(2)} x$ para todo $x \in X$. ∎

No que se segue, mostraremos que a recíproca do Teorema 4.1.4 também é verdadeira.

Teorema 4.1.6 *Se $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes*

i) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta;

ii) Para cada seqüência limitada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ em X, existe uma única solução limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Prova: Assumindo $i)$, o Teorema anterior mostra que $ii)$ vale. Suponha que $ii)$ é verdadeira e mostremos $i)$. Seja $B = \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ o espaço de Banach das seqüência limitadas $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com a norma $\|\hat{x}\|_B := \|\hat{x}\|_{\ell_\infty(\mathbb{Z},X)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_X$. A prova será dividida em nove passos

Passo 1: Defina $D(L) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B : \{x_{n+1} - T_n x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B\}$ (que contém as seqüências quase nulas) e a aplicação $L : D(L) \subset B \to B$ por

$$L\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{x_{n+1} - T_n x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Mostremos que L tem inversa limitada. Se $\hat{f} := \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$, existe uma única solução $\hat{x} := \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$ para $x_{n+1} - T_n x_n = f_n$, $n \in \mathbb{Z}$ e $L : D(L) \subset B \to B$ é bijetora. Seja $L^{-1} : B \to B$ definida por

$$L^{-1}\hat{f} = \hat{x}.$$

Se mostrarmos que L é fechada, do Teorema do Gráfico Fechado, seguirá que $L^{-1} \in \mathcal{L}(B)$. Se $\hat{v}_k = \{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D(L)$, $\hat{v} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$ e $\hat{w} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$ são tais que

$$\|\hat{v}_k - \hat{v}\|_B \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\|L\hat{v}_k - \hat{w}\|_B \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

então

$$\|\{T_n x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}} + \hat{w} - \{x_{n+1}^k\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_B \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, como $\|\{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}} - \{x_{n+1}^k\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_B \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, temos que

$$\|\{T_n x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}} + \hat{w} - \{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_B \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Do fato que $\|T_n x_n^k - T_n x_n\|_X \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\{T_n x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$ mostrando que $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D(L)$ e

$$\hat{w} = \{x_{n+1} - T_n x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = L\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = L\hat{v}$$

O que prova que L é fechado.

Passo 2: Neste passo definimos $\{G_{n,m} : m, n \in \mathbb{Z}\}$, damos uma representação para $L^{-1}\hat{x}$ em termos de $\{G_{n,m} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ para os $\hat{x}$ que são seqüências com somente um número finito de elementos não-nulos e usamos isto para definir as projeções $\{Q_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Se $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com $f_n = 0$ para $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = x$, defina $\{G_{n,m}x\}_{n\in\mathbb{Z}} := L^{-1}\hat{f}$. Portanto, se $A \subset \mathbb{Z}$ é um conjunto finito $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $f_n = 0$ se $n \in \mathbb{Z}\backslash A$

$$L^{-1}\hat{f} = \left\{\sum_{k\in A} G_{n,k+1} f_k\right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Note que $G_{n,m} \in \mathcal{L}(X)$ e $\|G_{n,m}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}$ para todo m, n.

Se $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$ é tal que $f_n = 0$ para todo $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = x$, então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{G_{n,m}x\}_{n\in Z} = L^{-1}\hat{f}$ é a solução de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Portanto

$$G_{n+1,m}x = T_n G_{n,m}x + f_n$$

e

$$\begin{aligned} &G_{n+1,m} = T_n G_{n,m}, \quad n \neq m-1, \\ &G_{m,m} - T_{m-1}G_{m-1,m} = I. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Defina $I - Q_m := G_{m,m}$ e mostremos que,

a) para $n \geqslant m$, $G_{n,m} = T_{n,m}(I - Q_m)$ e,

b) para $n < m$, $T_{m,n}G_{n,m} = -Q_m$.

Em ambos os casos procederemos por indução. É claro que $a)$ vale para $n = m$, suponha que $G_{k,m} = T_{k,m}(I - Q_m)$, para algum $k \geqslant m$, então $k \neq m-1$ e de (4.1.6),

$$G_{k+1,m} \overset{(5)}{=} T_k G_{k,m} = T_k T_{k,m}(I - Q_m) = T_{k+1,m}(I - Q_m).$$

No caso $b)$, para $n = m-1$, sabemos de (4.1.6) que

$$T_{m,m-1}G_{m-1,m} = T_{m-1}G_{m-1,m} \overset{(5)}{=} -Q_m.$$

Assumindo que $T_{m,k}G_{k,m} = -Q_m$, para $k \leqslant m-1$ (portanto $k-1 \neq m-1$), temos de (4.1.6) que

$$T_{m,k-1}G_{k-1,m} = T_{m,k}T_{k-1}G_{k-1,m} \overset{(5)}{=} T_{m,k}G_{k,m} = -Q_m.$$

Passo 3: Agora mostremos que, se $x_{n+1} = T_n x_n$, $n \geqslant m$ define uma seqüência limitada, então $Q_m x_m = 0$. Fazendo $x_n = 0$ para $n < m$ temos que

$$x_{n+1} = T_n x_n,\ n \neq m-1$$

$$x_m - T_{m-1}x_{m-1} = x_m,$$

e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$ onde $f_n = 0$ se $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = x_m$. Portanto $x_n = G_{n,m}x_m$ e em particular $x_m = G_{m,m}x_m = (I - Q_m)x_m$, provando que $Q_m x_m = 0$.

Passo 4: Mostremos que Q_m é uma projeção. Para cada $x \in X$ seja $x_n = G_{n,m}x$, então $x_{n+1} = T_n x_n$ para $n \geqslant m$ $(n > m-1)$. Como $\{x_n\}_{n\geqslant m}$ é uma seqüência limitada temos que $Q_m G_{m,m} x = 0 = Q_m(I - Q_m)x$; isto é, $Q_m x = Q_m^2 x$ para todo $x \in X$.

Passo 5: No que segue provaremos que $Q_{m+1}T_m x = T_m Q_m x$ para todo x tal que $Q_m x = 0$. Seja $x_n = G_{n,m}x$, se $Q_m x = 0$, então $0 = Q_m x = (I - G_{m,m})x$ e $x = G_{m,m}x$. Se $x_n = G_{n,m}x$, $x_{n+1} = T_n x_n$ para $n \geqslant m+1$ define uma seqüência limitada, temos (do *Passo 3*) que $Q_{m+1}x_{m+1} = 0$ e

$$Q_{m+1}T_m x = Q_{m+1}T_m x_m = Q_{m+1}x_{m+1} = 0 = T_m Q_m x,$$

para todo $x \in X$ tal que $Q_m x = 0$.

Passo 6: Antes de provarmos que $Q_{m+1}T_m x = T_m Q_m x$ para todo x tal que $x = Q_m x$ mostremos que

$$T_m\big|_{R(Q_m)} : R(Q_m) \to R(Q_{m+1})$$

é um isomorfismo.

Suponha que $\{x_n\}_{n\leqslant m-1}$ seja limitada e $x_{n+1} = T_n x_n$ para $n < m-1$ e façamos $x_n = 0$ para $n > m-1$. Então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma solução limitada de

$$x_{n+1} = T_n x_n + f_n$$

onde $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $f_n = 0$ para $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = -T_{m-1}x_{m-1}$. Portanto

$$x_n = -G_{n,m}T_{m-1}x_{m-1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular,

$$0 = x_m = -G_{m,m}T_{m-1}x_{m-1} = -(I - Q_m)T_{m-1}x_{m-1}$$

e $T_{m-1}x_{m-1} \in R(Q_m)$

Para $x \in R(Q_{m+1})$ seja $y_n = G_{n,m+1}x$. Então, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é limitada e $y_{n+1} = T_n y_n$ para $n < m$. Então $T_{m-1}y_{m-1} = y_m$ e, do raciocínio acima, $y_m = T_{m-1}y_{m-1} \in R(Q_m)$. Ainda mais, $y_{m+1} = G_{m+1,m+1}x = (I - Q_{m+1})x = 0$ pois $x \in R(Q_{m+1})$ e $0 = y_{m+1} = T_m y_m + x$, provando que $x = T_m(-y_m)$. Isto implica que

$$R(Q_{m+1}) \subset T_m(R(Q_m)).$$

Para $x \in R(Q_m)$ seja $y_n = G_{n,m}x$ ($y_m = 0$). Consideremos $\bar{y}_n = y_n$ para $n \leqslant m - 1$ e $\bar{y}_{n+1} = T_n\bar{y}_n$ para $n \geqslant m-1$. Segue que $T_m\bar{y}_m = T_m(T_{m-1}y_{m-1}) = -T_m x$. De sua definição $\{\bar{y}_n\}_{n\leqslant m}$ é limitada e, do que provamos no início deste passo, $T_m\bar{y}_m = -T_m x \in R(Q_{m+1})$. Ainda mais, se $T_m x = 0$, então

$$\bar{y}_{m+1} = T_m\bar{y}_m = -T_m x = 0$$

e $\bar{y}_n = 0$ para $n > m$; isto é, $\{\bar{y}_n\}_{n\geqslant m}$ é limitada e $\bar{y}_{m+1} = T_m\bar{y}_m$. Disto e do Passo 3 temos que $Q_m\bar{y}_m = 0$ e, do fato que $x \in R(Q_m)$, $Q_m x = x = 0$. Isto mostra que $T_m\big|_{R(Q_m)}$ é injetiva e que $T_m(R(Q_m)) \subset R(Q_{m+1})$. Como $R(Q_{m+1}) \subset T_m(R(Q_m))$ segue que $T_m\big|_{R(Q_m)} : R(Q_m) \to R(Q_{m+1})$ é um isomorfismo.

Passo 7: Agora mostremos que se $Q_m x = x$ então $T_m Q_m x = Q_{m+1}T_m x$. Primeiramente notemos que $T_m(I - Q_m)x = 0$ e, do *Passo 6*, $T_m x \in R(Q_{m+1})$ sempre que $x \in R(Q_m)$. Portanto, $Q_{m+1}T_m x = T_m x$ e $T_m Q_m x = Q_{m+1}T_m x$ sempre que $x \in R(Q_m)$.

Isto, juntamente com o *Passo 5*, implica que $T_m Q_n = Q_{m+1}T_n$.

Agora podemos escrever

$$G_{n,m} = -T_{n,m}Q_m, \quad n < m$$

$$G_{n,m} = T_{n,m}(I - Q_m), \quad n \geqslant m.$$

Passo 8: Seja $x \in X$. Se $T_{n,m}x = 0$ para algum $n \geqslant m$, então $T_{p,m}x = 0$ para $p \geqslant n$. Além disso, se $T_{n,m}(I - Q_m)x \neq 0$ então

$$\phi_k^{-1} = \|T_{k,m}(I - Q_m)x\|_X > 0, \quad m \leqslant k \leqslant n$$

e, se $v_k = \phi_k T_{k,m}(I - Q_m)x$, $\|v_k\|_X = 1$ e

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} T_{n,k}(I - Q_k)\, \phi_k\, T_{k,m}(I - Q_m)x &= \sum_{k=m}^{n} G_{n,k}v_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} \phi_k \; T_{n,m}(I - Q_m)x,\end{aligned}$$

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} G_{n,k}v_k \right\|_X = \sum_{k=m}^{n} \phi_k \, \|T_{n,m}(I - Q_m)x\|_X = \phi_n^{-1} \sum_{k=m}^{n} \phi_k.$$

Tomando $\hat{f} = \{f_k\}_{n \in \mathbb{Z}}$ com $f_k = v_{k+1}$, para $m-1 \leqslant k \leqslant n-1$ e $f_k = 0$ caso contrário, então $\|\hat{f}\|_B = 1$ e

$$\| \sum_{k=m}^{n} G_{n,k}v_k\|_X = \| \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}f_k\|_X \leqslant \|L^{-1}\hat{f}\|_B \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}.$$

Portanto $1 < \phi_n^{-1} \sum_{k=m}^{n} \phi_k \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}$. Se $\psi_n = \sum_{k=m}^{n} \phi_k$, temos que

$$\psi_{n-1} = \sum_{k=m}^{n-1} \phi_k = \psi_n - \phi_n \leqslant \psi_n (1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1}).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\phi_n &\geqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1} \sum_{k=m}^{n} \phi_k = \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1} \psi_n \geqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1} \left(1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1}\right)^{-1} \psi_{n-1} \\ &\geqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1} \left(1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1}\right)^{m-n} \psi_m = \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1} \left(1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1}\right)^{m-n} \phi_m\end{aligned}$$

e $\phi_n^{-1} \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)} \left(1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1}\right)^{n-m} \phi_m^{-1}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\|T_{n,m}(I - Q_m)x\|_X = \phi_n^{-1} &\leqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)} (1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1})^{n-m} \|(I - Q_m)x\|_X \\ &= \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)} (1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1})^{n-m} \|G_{m,m}x\|_X \\ &\leqslant \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^2 (1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}^{-1})^{n-m} \|x\|_X\end{aligned}$$

Para o caso $\|T_{n,m}(I - Q_m)x\|_X = 0$ a estimativa é trivial. Isto prova *iii)* na Definição 4.1.2.

Passo 9: Se $\rho_n^{-1} = \|T_{n,m}Q_m x\| > 0$ para $n < m$, então

$$\sum_{k=n+1}^{m} T_{n,k}Q_k\, \rho_k\, T_{k,m}Q_m x = \sum_{k=n+1}^{m} G_{n,k}v_k = \sum_{k=n+1}^{m} \rho_k\; T_{n,m}Q_m x$$

onde $v_k = \rho_k\, T_{k,m}Q_m x$.

Procedendo como no passo anterior, temos

$$\|T_{n,m}Q_m x\|_X \leqslant (1 + \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)})^2 \left(\frac{\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}}{1 + \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}}\right)^{m-n} \|x\|_X,\ n < m.$$

Tomando $M = (1 + \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)})^2 > \|L^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(B)}$ e $e^{-\omega} = \frac{\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}}{1+\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)}} \geqslant 1 - \|L^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(B)}$, temos que $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente ω. ■

No que se segue, utilizamos o Teorema 4.1.6 para mostrar que a dicotomia exponencial discreta é estável por perturbações. Antes disso necessitamos mostrar o resultado do lema técnico que se segue.

Lema 4.1.7 *Se $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $0 < r < r_1 \leqslant 1$*

$$b < \frac{r_1 - r}{1 + r r_1^{-1}}$$

e $\{g_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ é uma seqüência não-negativa em $\mathbb{Z}$ com $\sup\{g_\ell r_1^{-|\ell|} : \ell \in \mathbb{Z}\} < \infty$ *e*

$$g_\ell \leqslant a r_1^{|\ell|} + b \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|\ell-j-1|} g_j, \qquad \text{para todo } \ell \in \mathbb{Z}.$$

Então,

$$g_\ell \leqslant a r_1^{|\ell|} \left(1 - b\frac{1 + r r_1^{-1}}{r_1 - r}\right)^{-1}, \qquad \text{para todo } \ell \in \mathbb{Z}.$$

Prova: Seja $f_\ell = g_\ell r_1^{-|\ell|}$, então

$$f_\ell \leqslant a + b \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|\ell-j-1|} r_1^{|j|-|\ell|} f_j \leqslant a + b \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|\ell-j-1|} r_1^{|j|-|\ell|} \sup\{f_j : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Portanto,

$$\sup\{f_j : j \in \mathbb{Z}\} \leqslant a + b\frac{1+rr_1^{-1}}{r_1 - r}\sup\{f_j : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Consequentemente

$$f_\ell = g_\ell r_1^{-|\ell|} \leqslant \sup\{f_j : j \in \mathbb{Z}\} \leqslant a\left(1 - b\frac{1+rr_1^{-1}}{r_1 - r}\right)^{-1} \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}$$

e

$$g_\ell \leqslant a\left(1 - b\frac{1+rr_1^{-1}}{r_1 - r}\right)^{-1} r_1^{|\ell|} \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}.\blacksquare$$

Teorema 4.1.8 *Suponha que a família* $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tenha dicotomia exponencial discreta com constante* $M \geqslant 1$ *e expoente* $\omega > 0$. *Dados* $M_1 > M$ *e* $0 < \omega_1 < \omega$, *existe* $\epsilon > 0$ *(dependendo somente de* M, M_1, ω *e* ω_1*) tal que, qualquer família* $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *com* $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T_n - S_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$, *tem dicotomia exponencial discreta com constante* M_1 *e expoente* ω_1.

Prova: Do Teorema 4.1.6, a família $\{S_n e^{\omega_1} : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta, se, e somente se, para cada $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, $x_{n+1} = S_n e^{\omega_1} x_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$, tem uma única solução limitada, se, e somente se, para cada $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, $x_{n+1} = T_n e^{\omega_1} x_n + (S_n - T_n)e^{\omega_1} x_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$, tem uma única solução limitada, se, e somente se, para cada $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$,

$$x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} e^{\omega_1(n-k-1)} \left[(S_k - T_k)e^{\omega_1} x_k + f_k\right] \tag{4.1.7}$$

tem uma única solução limitada. Aqui fizemos uso do fato que, se $\{G_{n,m}\}$ é a *função de Green* associada a $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é fácil ver que $\{G_{n,m} e^{\omega_1(n-m)}\}$ é a *função de Green* associada a $\{T_n e^{\omega_1} : n \in \mathbb{Z}\}$ que tem dicotomia exponencial com constante M e exponente $\omega - \omega_1$. Para ver que (4.1.7) tem uma única solução limitada, note que, se $G : \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) \to \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ é dado por

$$G\hat{f} = \left\{\sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} e^{\omega_1(n-k-1)} f_k\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

e $H : \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) \to \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ é dado por

$$H\hat{x} = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} e^{\omega_1(n-k-1)} (S_k - T_k) e^{\omega_1} x_k \right\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

então a equação (4.1.7) se torna

$$(I - H)\hat{x} = G\hat{f}.$$

Após isto, para provar que $\{S_n e^{\omega_1} : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta, precisamos somente mostrar que $\|H\|_{\mathcal{L}(\ell_\infty(\mathbb{Z},X))} < 1$. De fato

$$\|H\|_{\mathcal{L}(\ell_\infty(\mathbb{Z},X))} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{-\infty}^{\infty} \|G_{n,k+1} e^{\omega_1(n-k-1)} e^{\omega_1}(S_k - T_k)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \epsilon e^{\omega_1} M \frac{1 + e^{-(\omega-\omega_1)}}{1 - e^{-(\omega-\omega_1)}} < 1,$$

para todo ϵ satizfazento

$$\epsilon < \frac{e^{-\omega_1} - e^{-\omega}}{M(1 + e^{-(\omega-\omega_1)})}. \tag{4.1.8}$$

Provamos que $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com alguma constante $\bar{M}$ e expoente $\omega_1 > 0$. Vamos escolher ϵ para obter que $\bar{M} = M_1$. Seja $\{S_{n,m} : (n, m) \in \mathcal{P}_\mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ o processo de evolução discreto associado à $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$ e

$$\tilde{G}_{n,m} = \begin{cases} S_{n,m}(I - Q_m), & n \geqslant m \\ -S_{n,m}Q_m, & n < m. \end{cases}$$

Então

$$\tilde{G}_{n,m} = G_{n,m} + \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(S_k - T_k)\tilde{G}_{k,m}$$

uma vez que $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com $f_n = 0$ para todo $n \neq m - 1$ e $f_{m-1} = x$, temos que

$$x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{n,k+1} f_k = \tilde{G}_{n,m} x$$

e

$$x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} \left[(S_k - T_k)x_k + f_k\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(S_k - T_k)\tilde{G}_{k,m}x + G_{n,m}x.$$

Assim,

$$\|\tilde{G}_{n,m}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M e^{-|n-m|\omega_1} + M\epsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|n-k-1|\omega} \|\tilde{G}_{k,m}\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Fazendo $\ell = n - m$, $j = k - m$ e $\|\tilde{G}_{k,m}\|_{\mathcal{L}(X)} = g_{k-m}$, para n, m e k em $\mathbb{Z}$, temos que

$$g_\ell \leqslant Me^{-|\ell|\omega_1} + M\epsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|\ell-j-1|\omega} g_j.$$

e aplicando o Lema 4.1.7, obtemos que

$$\|\tilde{G}_{n,m}\|_{\mathcal{L}(X)} = g_{n-m} \leqslant M\left(1 - M\epsilon\frac{1+e^{\omega_1-\omega}}{e^{-\omega_1}-e^{-\omega}}\right)^{-1} e^{-|n-m|\omega_1} \leqslant M_1 e^{-|n-m|\omega_1}$$

sempre que ϵ satisfaz (4.1.8) e

$$M\left(1 - M\epsilon\frac{1+e^{\omega_1-\omega}}{e^{-\omega_1}-e^{-\omega}}\right)^{-1} \leqslant M_1. \tag{4.1.9}$$

Isto mostra que $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_1 e expoente ω_1 sempre que ϵ satisfaz (4.1.8) e (4.1.9). ∎

<u>Teorema</u> 4.1.9 *Suponha que $\{T_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta com projeções $\{Q_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, constante M e expoente ω para $k = 1, 2$. Se $\|T_n^{(1)} - T_n^{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então*

$$\|Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M^2}{1-e^{-\omega}}\,\epsilon.$$

Prova: Definamos $x_n^{(k)} = G_{n,m}^{(k)} z$ para $z \in X$. Note que

$$x_{n+1}^{(1)} - T_n^{(2)} x_n^{(1)} = \begin{cases} T_n^{(1)} x_n^{(1)} - T_n^{(2)} x_n^{(1)}, & n \neq m-1 \\ T_n^{(1)} x_n^{(1)} - T_n^{(2)} x_n^{(1)} + z, & n = m-1 \end{cases}$$

e

$$x_{n+1}^{(2)} - T_n^{(2)} x_n^{(2)} = \begin{cases} 0, & n \neq m-1 \\ z, & n = m-1. \end{cases}$$

Como $z_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ satisfaz $z_{n+1} = T_n^{(2)} z_n + y_n$ onde $y_n = (T_n^{(1)} - T_n^{(2)}) x_n^{(1)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Da definição de $x_n^{(1)}$ e da hipótese sobre $T_n^{(1)} - T_n^{(2)}$ temos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é limitada e do Teorema 4.1.4 temos que

$$z_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}^{(2)} (T_k^{(1)} - T_k^{(2)}) G_{k,m}^{(1)} z.$$

e consequentemente

$$\|z_n\| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} M^2 e^{-\omega|n-k-1|} e^{-\omega|k-m|} \|T_n^{(1)} - T_n^{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|z\|_X \leqslant \frac{2M^2}{1-e^{-\omega}}\,\epsilon\,\|z\|.$$

Para concluir a demostração, simplesmente notemos que

$$z_m = x_m^{(1)} - x_m^{(2)} = (G_{m,m}^{(1)} - G_{m,m}^{(2)})z = (Q_m^{(2)} - Q_m^{(1)})z. \blacksquare$$

4.2 Dicotomia exponencial para processos contínuos

Nesta seção trataremos de estudar os resultados de preservação de dicotomias para processos lineares $\{T(t,\tau) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ com $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \geqslant s\}$.

4.2.1 Definição e propriedades básicas

Definição 4.2.1 *Diremos que um processo de evolução linear* $\{T(t,\tau) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tem dicotomia exponencial, com constante* $M \geqslant 1$ *e exponente* $\omega > 0$, *se existe uma família de projeções* $\{Q(t) :\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *satisfazendo*

i) $Q(t)T(t,s) = T(t,s)Q(s)$, *para todo* $(t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$,

ii) a restrição de $T(t,s)$ *a* $R(Q(s))$ *é um isomorfismo de* $R(Q(s))$ *sobre* $R(Q(t))$, *cuja inversa denotaremos por* $T(s,t) : R(Q(t)) \to R(Q(s))$, *e*

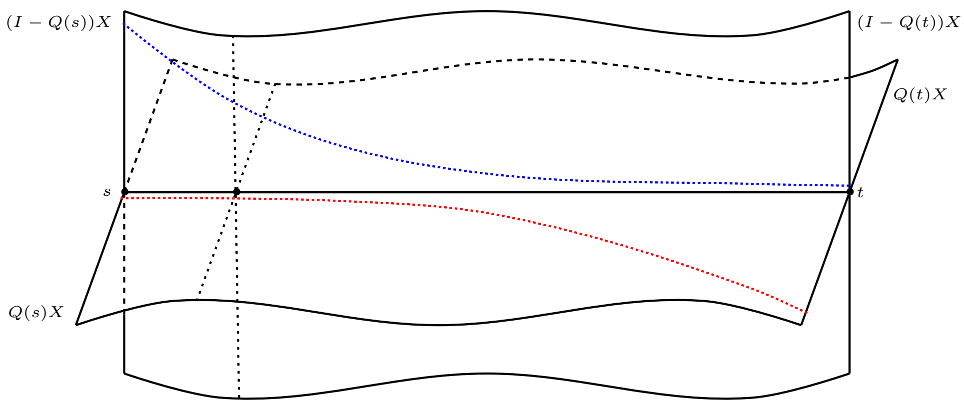
iii) valem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} &\|T(t,s)(I-Q(s))\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\omega(t-s)}, \quad t \geqslant s, \\ &\|T(t,s)Q(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega(t-s)}, \quad t \leqslant s. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Observação 4.2.2

1. *Do fato que existe um isomorfismo entre* $R(Q(t))$ *e* $R(Q(s))$, *estes subespaços de* X *tem a mesma dimensão, para todo* t *e* s *em* $\mathbb{R}$.

2. *Em alguns casos, para tornar a argumentação mais clara, utilizaremos o termo* dicotomia exponencial contínua *para expressar a dicotomia exponencial de um processo de evolução linear* $\{T(t,\tau) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$.



Lema 4.2.3 *Se o processo de evolução linear* $\{T(t,\tau) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tem dicotomia exponencial com projeções* $\{Q(t) : \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$*, então a função* $\mathbb{R} \ni t \mapsto Q(t) \in \mathcal{L}(X)$ *é limitada e fortemente contínua à direita.*

Prova: De (4.2.1) é claro que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|Q(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M$. Para provar que $\mathbb{R} \ni t \mapsto Q(t) \in \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua, simplesmente note que

$$\|Q(s)x - Q(t)x\|_X \leqslant \|(T(s,t) - I)Q(t)x\|_X + \|Q(s)(T(s,t)x - x)\|_X$$

para cada $s \geqslant t$. ■

Se $\{T(t,\tau) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial com projeções $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ temos que

a) $T(t,s)T(s,\tau)Q(\tau) = T(t,\tau)Q(\tau)$, para todo $t, s, \tau \in \mathbb{R}$ e

b) $Q(t)T(t,s)Q(s) = T(t,s)Q(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

O resulado do exemplo a seguir inclui o caso finito dimensional e mostra que a definição de dicotomia exponencial dada nesta seção coincide com a definição de dicotomia exponencial usualmente empregada para problemas em espaços de dimensão finita (veja [23]).

Exemplo 4.2.4 *Seja X um espaço de Banach e $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua. Claramente o problema*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \geqslant \tau$$
$$x(\tau) = x_0$$

tem uma única solução $[\tau, \infty) \ni t \mapsto x(t, \tau, x_0) \in X$. Definindo $T(t, \tau)x_0 = x(t, \tau, x_0)$ para $(t, \tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in X$ temos que $\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ define um processo de evolução. Se $M(t) = T(t, 0)$, então $T(t, \tau) = M(t)M^{-1}(\tau)$.

Proposição 4.2.5 *Se $\{T(t, \tau) : (t, s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial, existem constantes $C \geqslant 1$, $\beta > 0$ e projeção $E \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|M(t)EM^{-1}(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{\beta(t-\tau)}, \ (\tau, t) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$$
$$\|M(t)(I - E)M^{-1}(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{-\beta(t-\tau)}, \ (t, \tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}.$$

Reciprocamente, se tal projeção E existe, então $\{T(t, \tau) : \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial com constante C, exponente β e projeções $Q(t) = M(t)EM^{-1}(t)$.

Prova: *Primeiramente mostremos que $M(t)$ é inversível para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere a seguinte equação em $\mathcal{L}(X)$*

$$\dot{Z} = -ZA(t)$$

e defina $U(t) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ por $U(t)Z = -ZA(t)$ para todo $Z \in \mathcal{L}(X)$. Claramente $t \mapsto U(t)$ é contínua. Portanto, existe uma única solução para

$$\dot{Z} = U(t)Z, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$Z(0) = I.$$

Daí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Z(t)M(t)] = -Z(t)A(t)M(t) + Z(t)A(t)M(t) = 0$$
$$Z(0)M(0) = I.$$

e, consequentemente, $Z(t)M(t) = I$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Agora, se* $R(t) = M(t)Z(t)$, *temos que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t) = A(t)M(t)Z(t) - M(t)Z(t)A(t) = A(t)R(t) - R(t)A(t)$$
$$R(0) = I.$$

Como este problema tem uma única solução, temos que $M(t)Z(t) = I$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Isto mostra que* $Z(t) = M(t)^{-1}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Mostramos que a família* $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ *satisfaz* $T(t,\tau) = M(t)M^{-1}(\tau)$. *Se* $T(t,\tau) = M(t)M^{-1}(\tau)$ *tem dicotomia exponencial, seja* $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *as projeções associadas e defina*

$$E(t) = M^{-1}(t)Q(t)M(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Claramente $E(t)$ *é uma projeção para cada* $t \in \mathbb{R}$ *e, da condição i), na Definição 4.2.1 temos que*

$$Q(t)M(t)M^{-1}(s) = M(t)M^{-1}(s)Q(s), \quad \textit{para todo} \ \ t \geqslant s.$$

e

$$E = E(t) = M^{-1}(t)Q(t)M(t) = M^{-1}(s)Q(s)M(s) = E(s), \quad \textit{for all} \ \ t \geqslant s$$

é uma projeção constante. É fácil ver que $T(t,s)Q(s) = M(t)EM^{-1}(s)$ *e* $T(t,s)(I - Q(s)) = M(t)(I-E)M^{-1}(s)$. *As estimativas seguem imediatamente da dicotomia exponencial de* $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$. *A recíproca segue imediatamente tomando* $Q(t) = M(t)EM^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. ∎

4.2.2 Robusteza da dicotomia exponencial

Nesta seção relacionamos as dicotomias exponenciais discreta e contínua com o objetivo de obter um resultado de robusteza da dicotomia exponencial contínua semelhante ao obtido no Teorema 4.1.8 para dicotomias exponenciais contínuas. Como não temos um análogo contínuo do Teorema 4.1.6, a prova da robusteza das dicotomias exponenciais contínuas é feita da seguinte maneira: (1) Mostramos que, se um processo contínuo possui dicotomia exponencial contínua, suas *discretizações* possuem dicotomias exponenciais discretas, (2) as dicotomias exponenciais discretas dessas *discretizações* são robustas por perturbação e, (3) as dicotomias exponenciais discretas das *discretizações* do processo perturbado implicam a dicotomia exponencial contínua do processo perturbado.

Teorema 4.2.6 *Suponha que $\{T(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ seja um processo de evolução que tenha dicotomia exponencial com constante $M \geqslant 1$, expoente $\omega > 0$ e projeções $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Então, para cada $\ell > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{T(t_0 + (n+1)\ell, t_0 + n\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

tem dicotomia exponencial discreta com projeções $\{Q_n = Q(t_0 + n\ell) : n \in \mathbb{Z}\}$, constante M e expoente $\omega\ell$.

Prova: Seja $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ a família de projeções associada a dicotomia exponencial de $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$. Defina

$$\begin{aligned} T_n &= T(t_0 + (n+1)\ell, t_0 + n\ell), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ Q_n &= Q(t_0 + n\ell), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Claramente

i) $T_n Q_n = Q_{n+1} T_{n+1}$,

ii) $T_n\big|_{R(Q_n)} : R(Q_n) \to R(Q_{n+1})$ é um isomorfismo,

iii) Para todo $n \geqslant m$

$$\begin{aligned} &\|T_{n,m}(I - Q_m)x\|_X = \|T_{n-1} \cdots T_m (I - Q_m)x\| \\ &= \|T(t_0 + n\ell, t_0 + (n-1)\ell) \cdots T(t_0 + (m+1)\ell, t_0 + m\ell)(I - Q(t_0 + m\ell))x\|_X \\ &= \|T(t_0 + n\ell, t_0 + m\ell)(I - Q(t_0 + m\ell))x\|_X \leqslant M e^{-\omega\ell(n-m)} \|x\|_X \end{aligned}$$

iv) Para todo $n < m$, se $(T_{m,n})^{-1}$ denota a inversa de $T_{n,m} : R(Q_m) \to R(Q_n)$,

$$\begin{aligned}\|T_{n,m}Q_m x\|_X &= \|(T_{m,n})^{-1}Q_m x\| \\ &= \|(T(t_0+m\ell, t_0+n\ell))^{-1}Q(t_0+m\ell)x\|_X \\ &= \|T(t_0+n\ell, t_0+m\ell)Q(t_0+m\ell)x\|_X \leqslant Me^{\omega\ell(n-m)}\|x\|_X.\end{aligned}$$

Isto mostra que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente $\omega\ell$ e completa a prova. ∎

Segue imediatamente da unicidade das projeções na dicotomia exponencial discreta e do teorema anterior que

Corolário 4.2.7 *Se o processo de evolução linear $\{T(t,\tau) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial, então a família de projeções $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ associada é única.*

A seguir mostramos que, sob certas condições, vale a recíproca do Teorema 4.2.6.

Teorema 4.2.8 *Suponha que o processo de evolução $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ satisfaça*

$$L_\ell = \sup_{0\leqslant t-\tau\leqslant \ell} \|T(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$$

para algum $\ell > 0$ e que $\{T(t_0+(n+1)\ell, t_0+n\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tenha dicotomia exponencial discreta com constante $M \geqslant 1$ e expoente $\omega\ell > 0$ (independentes de t_0), para cada $t_0 \in \mathbb{R}$. Então, o processo de evolução

$$\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$$

tem dicotomia exponencial com constante KM e expoente ω, onde

$$K = \sup_{0\leqslant t-\tau\leqslant \ell} \{e^{\omega(t-\tau)}\|T(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\}. \tag{4.2.2}$$

Prova: Seja $\{Q_n(t_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a família de projeções associada à dicotomia exponencial discreta de $\{T(t_0+(n+1)\ell, t_0+n\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e defina $Q(t_0) = Q_0(t_0)$.

Seja $\{T_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{T(t+(n+1)\ell, t+n\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, para cada $t\in\mathbb{R}$. Como

$$\{T_n(t+k\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{T_{n+k}(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

tem dicotomia exponencial discreta com projeções $\{Q_n(t+k\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\{Q_{n+k}(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Da unicidade das projeções $Q_{n+k}(t) = Q_n(t+k\ell)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e em particular $Q_k(t) = Q_0(t+k\ell) = Q(t+k\ell)$.

A seguir mostramos que, para $n \geqslant k$,

$$Q(t+n\ell)T(t+n\ell, t+k\ell) = T(t+n\ell, t+k\ell)Q(t+k\ell). \tag{4.2.3}$$

De fato, primeiramente note que

$$\begin{aligned} T(t+n\ell, t+k\ell) &= T(t+k\ell+(n-k)\ell, t+k\ell) \\ &= T(t+k\ell+(n-k)\ell, t+k\ell+(n-k-1)\ell)\ \cdots\ T(t+(k+1)\ell, t+k\ell). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} T(t+n\ell, t+k\ell)Q(t+k\ell) &= T(t+k\ell+(n-k)\ell, t+k\ell)Q_0(t+k\ell) \\ &= Q_{n-k}(t+k\ell)(T(t+k\ell+(n-k)\ell, t+k\ell) \\ &= Q(t+n\ell)T(t+n\ell, t+k\ell) \end{aligned}$$

e (4.2.3) está provada. Agora mostremos que

$$\|T(t,s)(I-Q(s))\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant KMe^{-\omega(t-s)}, \quad t \geqslant s. \tag{4.2.4}$$

Para $t \geqslant s$ escolha $n\in\mathbb{N}$ tal que $s+n\ell \leqslant t < s+(n+1)\ell$. Então

$$\begin{aligned} \|T(t,s)(I-Q(s))\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \|T(t,s+n\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T(s+n\ell,s)(I-Q(s))\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant Me^{-\omega n\ell}\|T(t,s+n\ell)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= Me^{\omega(t-s-n\ell)}\|T(t,s+n\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}e^{-\omega(t-s)} \\ &\leqslant KMe^{-\omega(t-s)}, \end{aligned}$$

e a desigualdade (4.2.4) está provada.

Suponha que $z \in R(Q(s))$ e $t \leqslant s$. Defina

$$T(t,s)z = T(t,s+n\ell)(T(s,s+n\ell)\big|_{R(Q(s+n\ell))})^{-1}z$$

onde $n \in \mathbb{Z}$ é escolhido de forma que $s+(n+1)\ell > t \geqslant s+n\ell$. Com esta definição, mostremos que

$$\|T(t,s)Q(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant KMe^{\omega(t-s)}, \quad t \leqslant s.$$

De Fato,

$$\begin{aligned}
\|T(t,s)Q(s)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \|T(t,s+n\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}\|(T(s,s+n\ell)\big|_{R(Q(s))})^{-1}Q(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\\
&\leqslant Me^{\omega n\ell}\|T(t,s+n\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}\\
&= Me^{-\omega(t-s-n\ell)}\|T(t,s+n\ell)\|_{\mathcal{L}(X)}e^{\omega(t-s)}\\
&\leqslant KMe^{\omega(t-s)}.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$N(Q(t_0)) = \{z \in X : [t_0,\infty) \ni t \mapsto T(t,t_0)z \in X \text{ é limitada}\}. \tag{4.2.5}$$

Se $z \in N(Q(t_0))$, então $Q(t_0)z = 0$ e

$$\|T(t,t_0)z\|_X = \|T(t,t_0)(I-Q(t_0))z\|_X \leqslant KMe^{-\omega(t-t_0)}$$

portanto, $[t_0,\infty) \ni t \mapsto T(t,t_0)z \in X$ é limitada. Por outro lado, se $z \notin N(Q(t_0))$, então

$$\begin{aligned}
\|Q(t_0)z\|_X &= \|T(t_0,t_0+n\ell)Q(t_0+n\ell)T(t_0+n\ell,t_0)z\|_X\\
&\leqslant Me^{-\omega n\ell}\|T(t_0+n\ell,t_0)z\|_X
\end{aligned}$$

ou equivalentemente $\|T(t_0+n\ell,t_0)z\|_X \geqslant M^{-1}e^{\omega n\ell}\|Q(t_0)z\|_X$. Isto prova que a função $[t_0,\infty) \ni t \to T(t,t_0)z \in X$ é ilimitada. Assim, sempre que $z \notin N(Q(t_0))$ temos que $[t_0,\infty) \ni t \mapsto T(t,t_0)z \in X$ é ilimitada. Isto completa a prova de (4.2.5).

A seguir mostramos que

$$T(t,t_0)N(Q(t_0)) \subset N(Q(t)), \quad t \geqslant t_0. \tag{4.2.6}$$

De fato, de (4.2.5) temos que, se $z \in N(Q(t_0))$, então, $[t_0, \infty) \ni s \mapsto T(s, t_0)z \in X$ é limitada e consequentemente $[t, \infty) \ni s \mapsto T(s,t)T(t,t_0)z \in X$ é limitada e, portanto, $T(t, t_0)z \in N(Q(t))$.

Para ver que $T(t,t_0)\big|_{R(Q(t_0))} : R(Q(t_0)) \to X$ é injetivo, $t \geqslant t_0$ suponha que $z \in R(Q(t_0))$ seja tal que $T(t, t_0)z = 0$. Escolhendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 + n\ell \geqslant t$, temos que $T(t_0 + n\ell, t_0)z = 0$ e consequentemente $z = 0$.

Agora provamos que

$$R(Q(t_0)) = \{z \in X : \text{existe uma solução backwards-limitada por } z \text{ em } t = t_0\}. \quad (4.2.7)$$

Se $z \in R(Q(t_0))$ defina $y : \mathbb{R} \to X$ por $y(t) = T(t, t_0 + n\ell)T(t_0 + n\ell, t_0)z$ onde $n \in \mathbb{Z}$ é escolhido de forma que $t_0 + n\ell \leqslant t \leqslant t_0 + (n+1)\ell$. Claramente $y : \mathbb{R} \to X$ é uma solução backwards-limitada por z em $t = t_0$ para $\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}\}$.

Suponha $z \notin R(Q(t_0))$ e que exista uma solução global $y : \mathbb{R} \to X$ por z em $t = t_0$. Claramente $T(t_0, t_0 + n\ell)y(t_0 + n\ell) = z$, $n \leq 0$. Logo,

$$T(t_0, t_0 + n\ell)(I - Q(t_0 + n\ell))y(t_0 + n\ell) = (I - Q(t_0))z, \quad n \leqslant 0,$$

e

$$\|y(t_0 + n\ell)\|_X \geqslant M^{-1}e^{-\omega n\ell}\|(I - Q(t_0))z\|_X \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Mostrando que $y : \mathbb{R} \to X$ não é backwards-limitada e provando (4.2.7).

Resta provar que $T(\tau, t_0)R(Q(t_0)) = R(Q(\tau))$ para todo $\tau \geqslant t_0$. De fato, se $z \in R(Q(t_0))$ seja $y : \mathbb{R} \to X$ uma solução backwards-limitada por z em $t = t_0$. Claramente $y : \mathbb{R} \to X$ é uma solução backwards-limitada por $T(\tau, t_0)z$ em $t = \tau$. Assim, $T(\tau, t_0)z \in R(Q(\tau))$. Por outro lado, se $z \in R(Q(\tau))$, para $\tau \geqslant t_0 \geqslant \tau + n\ell$ temos que $w = T(t_0, \tau + n\ell)T(\tau + n\ell, \tau)z \in R(Q(t_0))$ e $T(\tau, t_0)w = z$.

Segue que

$$T(\tau, t_0)\big|_{R(Q(t_0))} : R(Q(t_0)) \to R(Q(\tau)), \quad (\tau, t_0) \in \mathcal{P},$$

é um isomorfismo. Isto juntamente com (4.2.6) implica que $Q(t)T(t,t_0) = T(t,t_0)Q(t_0)$ para todo $t \geqslant t_0$ e completa a prova. ■

Nosso próximo resultado utiliza o Teorema 4.1.8, trata da robusteza de dicotomia exponencial discreta, juntamente com os Teoremas 4.2.8 e 4.2.6, que relacionam a dicotomia exponencial discreta e a dicotomia exponencial contínua, para obter um resultado de robusteza de dicotomia exponencial contínua.

Teorema 4.2.9 *Suponha que o processo de evolução linear $\{T(t,s) : t \geqslant s \in \mathbb{R}\}$ tenha dicotomia exponencial com constante $M \geqslant 1$ e expoente ω e que*

$$L = \sup\{\|T(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)},\ 0 \leqslant t-s \leqslant 1\} < \infty. \tag{4.2.8}$$

Se $\omega_1 < \omega$ e $M_1 > M$, existe $\epsilon > 0$ (dependendo somente de ω, ω_1, M, M_1 e L) tal que, qualquer processo de evolução linear $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ que satisfaça

$$\sup\{\|T(t,s) - S(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} : 0 \leqslant t-s \leqslant 1\} \leqslant \epsilon$$

tem dicotomia exponencial com constante M_1 e expoente ω_1.

Prova: Seja $\ell > 0$ tal que $Me^{-\omega\ell} < e^{-\omega_1\ell}$. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ seja $t_n = t_0 + n\ell$, $n \in \mathbb{Z}$. Do Teorema 4.2.6 que $\{T(t_{n+1},t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia discreta com constante M e expoente $\omega\ell$. Se

$$\sup\{\|T(t,s) - S(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} : 0 \leqslant t-s \leqslant 1\} \leqslant \epsilon,$$

para $0 \leqslant t-s \leqslant \ell$ seja $\tau_k \in [s,t)$ tal que $\tau_k = s+k$ com $k \in \mathbb{N}$ e $\tau_k + 1 > t$. Então

$$\|T(t,s)-S(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|[T(t,\tau_k)-S(t,\tau_k)]S(\tau_k,s)-T(t,\tau_k)[S(\tau_k,s)-T(\tau_k,s)]\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Como $0 \leqslant t-\tau_k < 1$, temos que

$$\|T(t,\tau_k) - S(t,\tau_k)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \epsilon, \qquad \|T(t,\tau_k)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant L$$

e

$$\|S(\tau_k, s)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(\tau_k, \tau_{k-1}) \cdots S(s+1, s)]\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant (L+\epsilon)^k.$$

Logo,

$$\|T(t,s) - S(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq (L+\epsilon)^k \epsilon + L\|S(\tau_k, s) - T(\tau_k, s)]\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Procedendo de maneira semelhante

$$\begin{aligned}\|S(\tau_k, s) - T(\tau_k, s)\| &\leq \|[S(\tau_k, \tau_{k-1}) - T(\tau_k, \tau_{k-1})]S(\tau_{k-1}, s)\| \\ &\quad + \|T(\tau_k, \tau_{k-1})[S(\tau_{k-1}, s) - T(\tau_{k-1}, s)]\| \\ &\leqslant (L+\epsilon)^{k-1}\epsilon + L\|S(\tau_{k-1}, s) - T(\tau_{k-1}, s)\|.\end{aligned}$$

Segue que, para $0 \leqslant t - s \leqslant \ell$,

$$\|T(t,s) - S(t,s)\| \leqslant [(L+\epsilon)^k + L(L+\epsilon)^{k-1} + \cdots + L^k]\epsilon \leqslant c_\ell \epsilon.$$

Consequentemente,

$$\|T(t_{n+1}, t_n) - S(t_{n+1}, t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant c_\ell \epsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Como $M_1 > M$ e $0 < \omega_1 < \omega$, segue do Teorema 4.1.8 que $\{S(t_{n+1}, t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_1 e expoente $\omega_1 \ell$, para todo ϵ suficientemente pequeno, uniformemente para $s \in \mathbb{R}$.

Do Teorema 4.2.8 segue que $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ tem dicotomia exponencial com constante KM_1 e expoente ω_1, onde K é dado por (4.2.2).

A seguir mostramos que a constante pode ser tomada M_1 em lugar de KM_1 para ϵ suficientemente pequeno. Seja $\tilde{G}(t,s)$ a *função de Green* associada à dicotomia exponencial de $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$, então

$$\|\tilde{G}(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M_1 e^{-\omega_1 |t-s|},$$

sempre que $t = s + n\ell$ (diretamente da dicotomia discreta de $\{T(s+n\ell, s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$), $n \in \mathbb{Z}$. Se $G(t,s)$denota a *função de Green* associada à dicotomia exponencial de $\{T(t,s) : t \geqslant s\}$

e $t_n = t_0 + n\ell$, então

$$\tilde{G}(t_n, t_m) - G(t_n, t_m) = \sum_{-\infty}^{\infty} G(t_n, t_{k+1})(S(t_{k+1}, t_k) - T(t_{k+1}, t_k))\tilde{G}_{k,m}$$

e

$$\|\tilde{G}(t_n, t_m) - G(t_n, t_m)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant c\epsilon.$$

Se $t \geqslant s$ escolha r tal que $0 \leqslant t - r < \ell$ e $\frac{r-s}{\ell} \in \mathbb{N}$, então

$$\|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(S(t,r) - T(t,r))\tilde{G}(r,s) + T(t,r)(\tilde{G}(r,s) - G(r,s))\|_{\mathcal{L}(X)}$$

e

$$\|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant c \sup_{0 \leqslant r-s \leqslant \ell} \|T(r,s)\|_{\mathcal{L}(X)}\, \epsilon + cM_1\epsilon =: R\epsilon..$$

Se $s \geqslant t$ escolha r tal que $0 \leqslant r - s \leqslant \ell$ e $\frac{r-t}{\ell} \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}\|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|(G(t,r) - \tilde{G}(t,r))T(r,s) + \tilde{G}(t,r)(T(r,s) - S(r,s))\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant c \sup_{0 \leqslant r-s \leqslant \ell} \|T(r,s)\|_{\mathcal{L}(X)}\, \epsilon + cM_1\epsilon =: R\epsilon.\end{aligned}$$

Logo, para ϵ suficientemente pequeno e para $0 \leqslant |t-s| \leqslant \ell$, temos que

$$\begin{aligned} e^{\omega_1|t-s|}\|\tilde{G}(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant e^{\omega_1|t-s|}\|G(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} + e^{\omega_1|t-s|}\|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant Me^{-(\omega-\omega_1)|t-s|} + e^{\omega\ell}R\epsilon \leqslant M_1. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Para $|t-s| = \ell$, da escolha de ℓ,

$$e^{\omega_1\ell}\|\tilde{G}(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-(\omega-\omega_1)\ell} + e^{\omega_1\ell}R\epsilon \leqslant 1,$$

para todo ϵ suficientemente pequeno. Assim,

$$\|\tilde{G}(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{-\omega_1\ell}. \tag{4.2.10}$$

Agora, se t e s são números reais, r está entre t e s é tal que $|t-r| < \ell$ e $\frac{|r-s|}{\ell} = m \in \mathbb{Z}$, então

$$\tilde{G}(t,s) = \tilde{G}(t,r)\tilde{G}(r, r \pm \ell) \cdots \tilde{G}(r \pm m\ell, s)$$

e, de (4.2.9) e (4.2.10),

$$\|\tilde{G}(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \|\tilde{G}(t,r)\|_{\mathcal{L}(X)} e^{-\omega_1|\ell(m+1)|} \leqslant M_1 e^{-\omega_1|t-r|} e^{-\omega_1|r-s|} = M_1 e^{-\omega_1|t-s|}.$$

O que conclui a demonstração do teorema. ∎

<u>**Teorema**</u> **4.2.10** *Suponha que o processo de evolução linear* $\{T(t,s) : t \geqslant s \in \mathbb{R}\}$ *tenha dicotomia exponencial com constante* $M \geqslant 1$ *e expoente* $\omega > 0$ *e que*

$$L = \sup\{\|T(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)}, 0 \leqslant t-s \leqslant 1\} < \infty.$$

Seja $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tal que* $\mathbb{R} \ni t \mapsto B(t)x \in X$ *é contínua para cada* $x \in X$*. Se* $\omega > \omega_1 > 0$ *e* $M_1 > M$*, existe* $\epsilon > 0$ *(dependendo de* ω*,* ω_1*,* M*,* M_1 *e* L*) tal que, o processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ *dado por*

$$S(t,s)x_0 = T(t,s)x_0 + \int_s^t T(t,\theta)B(\theta)S(\theta,s)\,\mathrm{d}\theta \tag{4.2.11}$$

tem dicotomia exponencial com constante M_1 *e expoente* ω_1 *sempre*

$$\sup\left\{\int_\tau^t \|B(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\,\mathrm{d}s : \tau+1 \geqslant t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\right\} \leqslant \epsilon.$$

Prova: Note que, para $t \geqslant \tau$,

$$S(t,\tau) - T(t,\tau) = \int_\tau^t T(t,s)B(s)(S(s,\tau)-T(s,\tau))\,\mathrm{d}s + \int_\tau^t T(t,s)B(s)T(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

Portanto, se $\tau + 1 \geqslant t \geqslant \tau \in \mathbb{R}$, temos que

$$\|S(t,\tau) - T(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant L\epsilon \sup_{s\in[\tau,\tau+1]} \|S(s,\tau) - T(s,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} + L^2\epsilon.$$

Escolhendo ϵ tal que $2L\epsilon \leqslant 1$ temos que

$$\sup_{s\in[\tau,\tau+1]} \|S(s,\tau) - T(s,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2L^2\epsilon.$$

O resultado agora segue do Teorema 4.2.9. ∎

<u>Teorema</u> 4.2.11 *Suponha que o processo de evolução linear $\{T_i(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tenha dicotomia exponencial com constante $M \geqslant 1$, expoente $\omega > 0$ e projeções $\{Q_i(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2$. Suponha ainda que*

$$\sup_{0\leqslant t-\tau\leqslant 1} \|T_1(t,\tau) - T_2(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon. \tag{4.2.12}$$

Então,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|Q_1(t) - Q_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M^2}{1-e^{-\omega}}\,\epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Prova: Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, se $t_n = t_0+n$ e $T_n^i = T_i(t_{n+1}, t_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\{T_n^i : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia esponencial discreta com contante M, expoente ω projeções $\{Q_n^i = Q_i(t_0+n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Segue do caso discreto que

$$\|Q_1(t_0+n) - Q_2(t_0+n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M^2}{1-e^{-\omega}}\,\epsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Como isto vale independentemente de t_0 o resultado segue. ■

4.2.3 Perturbações assíncronas

Agora consideramos o caso de perturbações assíncronas (Teorema 45.11 em [60]). Para tanto, seja X um espaço de Banach e $\mathbb{R} \ni t \mapsto D(t) \in \mathcal{L}(X)$ limitada e contínua. Considere a equação

$$\begin{cases} \dot{y} = D(t)y, \\ y(\tau) = y_0 \in X. \end{cases} \tag{4.2.13}$$

É claro que (4.2.13) define um processo $U_D(t,\tau)$ em $\mathcal{L}(X)$, dado por

$$U_D(t,\tau)y_0 = y_0 + \int_\tau^t D(s)U_D(s,\tau)y_0 ds.$$

tal que $\|U_D(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C$ para $0 \leqslant t-\tau \leqslant T$ e $C = C(\tau, T)$.

Seja $\mathscr{K}$ um subconjunto de $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ tal que, se $D(\cdot) \in \mathscr{K}$ então $D(\cdot+\tau) \in \mathscr{K}$ para cada $\tau \in \mathbb{R}$ e $\sup_{D\in\mathscr{K}} \|U_D(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.

Em $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ considere uma métrica $d(\cdot,\cdot)$ tal que, para cada $\tau > 0$

$$\|U_D(\tau,0) - U_{D_0}(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{d(D,D_0)\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Denote por $\mathcal{O}_\epsilon(\mathscr{K}) = \{D \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X)) : d(D, \mathscr{K}) < \epsilon\}$.

O teorema a seguir foi adaptado do [60, Teorema 45.11].

<u>Teorema</u> 4.2.12 *Suponha que $\{U_D(t,s) : t \geq s\}$ tenha dicotomia exponencial com constant $M_1 \geq 1$ e expoente $w_1 > 0$ para cada $D \in \mathscr{K}$ e que exista um $\epsilon_0 > 0$ tal que*

$$\sup\{\|U_D(t,0)\|_{\mathcal{L}(X)} : D \in \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\mathscr{K}),\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Então, dado $\bar{\omega} < \omega_1$, existe $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $\bar{M} > M_1$ tal que $\{U_D(t,s) : t \geq s\}$ tem dicotomia exponencial com constante $K\bar{M}$ (K dado no Teorema 4.2.8) e expoente $\bar{\omega}$ para cada $D \in \mathcal{O}_\epsilon(\mathscr{K})$.

Proof: Denotamos por $\{P_D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ a família de projeções associada à dicotomia exponencial de $\{U_D(t,s) : t \geq s\}$, $D \in \mathscr{K}$ e escrevemos P_D para denotar $P_D(0)$. Para $D, \hat{D} \in \mathscr{K}$ e $d(D, \hat{D})$ pequeno temos que $\|P_D - P_{\hat{D}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ é pequeno.

Consequentemente

$$M(D,\hat{D}) = I + (I - 2P_{\hat{D}})(P_{\hat{D}} - P_D) = P_{\hat{D}}P_D + (I - P_{\hat{D}})(I - P_D)$$

é inversível sempre que $\|P_{\hat{D}} - P_D\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ é suficientemente pequeno.

Escolha $\omega \in (\bar{\omega}, \omega_1)$, $M \in (\bar{M}, M_1)$ e fixe $\tau > 0$ tal que $2M_1 e^{-(\omega_1-\omega)\tau} \leq 1$. Dado $\delta \in (0,1]$, existe $\epsilon > 0$ tal que,

- se $D, \hat{D} \in \mathscr{K}$ e $d(D,\hat{D}) \leq \epsilon$, então $\|I - M(D,\hat{D})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta$ e $\|I - M(D,\hat{D})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta$ e,

- se $B \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$, $\hat{B} \in \mathscr{K}$ e $d(B,\hat{B}) \leq \epsilon$, então $\|U_B(\tau,0) - U_{\hat{B}}(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta$.

Segue que, se $B \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$, $D, \hat{D} \in \mathscr{K}$ e $d(B, \hat{D}) \leq \epsilon$, $d(D, \hat{D}) \leq \epsilon$,

$$\begin{aligned}
&\|U_B(\tau,0) - M(D,\hat{D})U_{\hat{D}}(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\qquad \leq \|U_B(\tau,0) - U_{\hat{D}}(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)} + \|(I - M(D,\hat{D}))U_{\hat{D}}(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\qquad \leq \delta + \|I - M(D,\hat{D})\|_{\mathcal{L}(X\ )} K_0 \leq \delta(1+K_0).
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

onde $K_0 = \sup_{\hat{D}\in\mathscr{K}} \|U_{\hat{D}}(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Seja $B \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ tal que $B_\sigma = B(\sigma + \cdot) \in \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(\mathscr{K})$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, escolha $B^{(n)} \in \mathscr{K}$ tal que $d(B_{n\tau}, B^{(n)}) \leq \frac{\epsilon}{2}$, $d(B_{n\tau}, B_\tau^{(n-1)}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ e defina $P_n = P_{B^{(n)}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Logo, $d(B_\tau^{(n-1)}, B^{(n)}) \leq d(B_\tau^{(n-1)}, B_{n\tau}) + d(B_{n\tau}, B^{(n)}) \leq \epsilon$ e

$$\|U_{B_{(n-1)\tau}}(\tau,0) - U_{B^{(n-1)}}(\tau,0)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta.$$

Agora seja $M_n = M(B_\tau^{(n-1)}, B^{(n)})$, $T_n = M_n U_{B^{(n-1)}}(\tau,0)$ e $S_n = U_{B_{(n-1)\tau}}(\tau,0)$, $n \in \mathbb{Z}$. De (4.2.14)

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T_n - S_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \delta(1+K_0).$$

Além disso, $U_{B^{(n-1)}}(\tau,0)P_{n-1} = P_{B_\tau^{(n-1)}} U_{B^{(n-1)}}(\tau,0)$ (since $P_{B^{(n-1)}}(\tau) = P_{B_\tau^{(n-1)}}(0) =: P_{B_\tau^{(n-1)}}$). Como $M_n = P_n P_{B_\tau^{(n-1)}} + (I - P_n)(I - P_{B_\tau^{(n-1)}})$, temos que

$$T_n P_{n-1} = P_n T_n.$$

Assim, do Teorema 4.2.6, $\|T_n(I - P_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq (1+\delta)M_1 e^{-\omega_1\tau} \leq 2M_1 e^{-\omega_1\tau} \leq e^{-\omega\tau}$ e, para $m > n$,

$$\|T_{m-1} \circ \cdots \circ T_n(I - P_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\omega\tau(m-n)}$$

Semelhantemente, provamos que, para $m < n$

$$\|T_{m-1} \circ \cdots \circ T_n P_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\omega\tau(m-n)} \leq M e^{\omega\tau(m-n)}.$$

Isto prova que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia discreta com constante M e expoente ω. Portanto, para δ suficientemente pequeno obtemos que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia discreta com constante $\bar{M}$ e expoente $\bar{\omega}$ e pelo Teorema 4.2.8, $\{U_D(t,s) : t \geq s\}$ tem dicotomia exponencial para todo $D \in \mathcal{O}_\eta(\mathscr{K})$ com expoente $\bar{\omega}$ e constante $K\bar{M}$. ■.

4.2.4 Critérios para dicotomia exponencial

Seja $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ uma função uniformemente contínua e limitada e considere a equação diferencial

$$\dot{x} = A(t)x, \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.2.15}$$

Suponha que $\cup_{t\in\mathbb{R}}\sigma(A(t)) \bigcap (-\alpha, \beta) = \varnothing$ para alguma escolha de números positivos α e β. Esta condição não é suficiente para que o processo de evolução associado a (4.2.15) tenha dicotomia exponencial. De fato, se

$$A(t) = U^{-1}(t) \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U(t), \qquad U(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

os auto-valores de $A(t)$ são ambos iguais a -1 mas a matriz fundamental de soluções associada a (4.2.15) é

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t[\cos t + \frac{1}{2}\sin t] & e^{-3t}[\cos t - \frac{1}{2}\sin t] \\ \\ e^t[\sin t - \frac{1}{2}\cos t] & e^{-3t}[\sin t + \frac{1}{2}\cos t] \end{bmatrix},$$

que tem uma direção estável e uma instável.

Se além das condições acima temos que de $t \mapsto A(t)$ oscila lentamente, então (4.2.15) tem dicotomia exponencial.

Começaremos mostrando varios resultados preparatórios.

<u>Lema</u> 4.2.13 *Para todo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ com $0 \in \rho(A)$ temos que*

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq (2^n - 1)\,|\det(A)|^{-1}\|A\|^{n-1}_{\mathcal{L}(X)} \tag{4.2.16}$$

Prova: Se $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\det(A - \lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$$

onde os $\lambda_i \in \sigma(A)$ são repetidos de acordo com a sua multiplicidade algébrica. É claro que

$$0 = (\lambda_1 - A)\cdots(\lambda_n - A)$$

e que

$$|\det(A)|A^{-1} = (-A)^{n-1} + a_1(-A)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I.$$

onde $a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $a_2 = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j$, $a_3 = \sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k$, $\ldots$, $a_n = \lambda_1 \ldots \lambda_n = \det(A)$. Since $|\lambda_i| \leq \|A\|$, $1 \leq i \leq n$, we have that

$$|\det(A)|\, \|A^{-1}\| \leq \|A\|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = (2^n - 1)\|A\|^{n-1}. \blacksquare$$

<u>Lema</u> 4.2.14 *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq k \leq n$ e $\alpha \in (0, \infty)$. Se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tem k auto-valores com parte real menor ou igual a $-\alpha$ e $n-k$ auto-valores com parte real maior ou igual a α, então qualquer $B \in \mathcal{L}(X)$ satisfazendo*

$$\|B - A\| \leq (2^n - 1)^{-1}\, 3^{-n+1}\, \epsilon^n\, \|A\|^{-n+1}$$

com $\epsilon \in (0, \alpha)$ tem k auto-valores com parte real menor ou igual a $-\alpha + \epsilon$ e $n - k$ auto-valores com parte real maior ou igual a $\alpha - \epsilon$.

Prova: Se $|\mathrm{Re}\lambda| \leq \alpha - \epsilon$ e $|\lambda| \leq 2\|A\|$, segue de (4.2.16) que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq (2^n - 1)|\det(\lambda - A)|^{-1}\|(\lambda - A)\|^{n-1} \leq (2^n - 1)3^{n-1}\epsilon^{-n}\|A\|^{n-1}$$

e se $|\lambda| > 2\|A\|$, $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \|A\|^{-1} < (2^n - 1)\, 3^{n-1}\epsilon^{-n}\|A\|^{n-1}$. Logo, se $\|B - A\| \leq (2^n - 1)^{-1}\, 3^{-n+1}\epsilon^n\|A\|^{-n+1} < \|(\lambda - A)^{-1}\|^{-1}$, temos que $0 \in \rho(\lambda - B)$ sempre que $|\mathrm{Re}\lambda| < \alpha - \epsilon$, já que $\|(\lambda - B) - (\lambda - A)\| = \|B - A\| < \|(\lambda - A)^{-1}\|^{-1}$. Disto segue que os auto-valores de B tem parte real com módulo maior ou igual a $\alpha - \epsilon$. Se $B(\theta) = \theta B + (1 - \theta)A$ então $\|B(\theta) - A\| \leq \|B - A\|$ para $\theta \in [0, 1]$. Como os auto-valores de $B(\theta)$ dependem continuamente de θ temos que A e B têm o mesmo número de auto-valores no semi-plano à esquerda do eixo imaginário. $\blacksquare$

<u>Lema</u> 4.2.15 *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in (0, \infty)$. Existe uma constante $c = c(n)$ tal que, se todos os auto-valores de $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tem parte real com módulo maior ou igual a α, a projeção espectral P associada aos auto-valores de A com parte real negativa satisfaz*

$$\|P\| \leq (2^n - 1)(3\alpha^{-1}\|A\|)^{n-1}.$$

Prova: O caso $n = 1$ é trivial. Suponha que $n > 1$ e seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ a curva dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) = 2\|A\|(4t-1)\, i : t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1) = 2\|A\| e^{2\pi\,(t-\frac{1}{4})\, i} : t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

É claro que γ contém, em seu interior, os auto-valores de A com parte real negativa. Se $|z| = 2\|A\|$,

$$\|(z-A)^{-1}\| \leq \|A\|^{-1}$$

e

$$\left\| \int_{\gamma_2} (z-A)^{-1} dz \right\| \leq 2\|A\|\pi\|A\|^{-1} = 2\pi.$$

Por outro lado, se $\mathrm{Re} z = 0$,

$$\|(z-A)^{-1}\| \leq (2^n - 1)\, \|z - A\|^{n-1} |\det(z-A)|^{-1} \leq (2^n-1)\,(3\|A\|)^{n-1} \prod_{j=1}^{n} |z - \lambda_j|^{-1}$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os auto-valores de A (repetidos de acordo com sua multiplicidade). Como, da desigualdade de Hölder,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} |iy - \lambda_j|^{-1} dy \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |iy - \lambda_j|^{-n} dy \right)^{\frac{1}{n}} \leq \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}} dy \leq \alpha^{-n+1}\pi,$$

obtemos que

$$\left\| \int_{\gamma_1} (z-A)^{-1} dz \right\| \leq (2^n - 1)\, \pi (3\alpha^{-1}\|A\|)^{n-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z-A)^{-1} dz \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} (z-A)^{-1} dz \right\| \\ &\leq 1 + \frac{2^n - 1}{2} (3\alpha^{-1}\|A\|)^{n-1} \leq (2^n - 1)(3\alpha^{-1}\|A\|)^{n-1} \end{aligned}$$

onde, na última desigualdade utilizamos que $\alpha \leq \|A\|$, que $n \geq 2$ e que $\dfrac{2^n - 1}{2} 3^{n-1} \geq 1$.■

Se $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(X)$ é continuamente diferenciável, satisfaz as condições do lema anterior para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - A(t))^{-1} dz, \tag{4.2.17}$$

então

$$\dot{P}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(z - A(t))^{-1}\dot{A}(t)(z - A(t))^{-1}dz$$

e, procedendo como no lema anterior,

$$\|\dot{P}(t)\| \leq (2^n - 1)^2 3^{2n-2}(\alpha^{-1}\|A(t)\|)^{2n-1}\frac{\|\dot{A}(t)\|}{\|A(t)\|}$$

Lema 4.2.16 *Sejam $M > 0$, $A \in B_M^{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}(0)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\mathrm{Re}\lambda \leq \alpha$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$ e $\epsilon \in (0, 2M)$,*

$$\|e^{At}\| \leq (2^n - 1)(3M\epsilon^{-1})^{n-1}e^{\alpha+\epsilon t},\ t \geq 0.$$

Prova: Se γ é o contorno usado no Lema 4.2.15 temos que

$$e^{(A-(\alpha+\epsilon)I)t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{\lambda t}(\lambda - (A - (\alpha+\epsilon)I)^{-1}d\lambda$$

e, exatamente como no Lema 4.2.15,

$$\|e^{(A-(\alpha+\epsilon)I)t}\| \leq (2^n - 1)(3\epsilon^{-1}\|A\|)^{n-1} \leq (2^n - 1)(3M\epsilon^{-1})^{n-1}.\blacksquare$$

Observação 4.2.17 *Explorando a proximidade de K a 1 no teorema abaixo podemos obter melhores perturbações.*

Lema 4.2.18 *Sejam $\delta > 0$ e $K \geq 1$. Suponha que $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(X)$ satisfaça*

$$\|A(t_1) - A(t_2)\| \leq \delta|t_1 - t_2|,\ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

e, para cada $u \in \mathbb{R}$,

$$\|e^{A(u)t}\| \leq Ke^{\alpha t},\ t \geq 0.$$

Então, a matriz fundamental de soluções $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in \mathcal{L}(X)$ de

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4.2.18}$$

satisfaz

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Me^{\beta(t-s)},\ t \geq s,$$

com $\beta = \alpha + (\delta K \log K)^{\frac{1}{2}}$.

Prova: Como

$$x(t) = e^{A(u)(t-s)}x(s) + \int_s^t e^{A(u)(t-\tau)}[A(\tau) - A(u)]x(\tau)d\tau$$

segue da desigualdade de Gronwal, tomando $u = \frac{t+s}{2}$, que

$$\|x(t)\| \leq Ke^{\alpha(t-s)}e^{\delta K\frac{(t-s)^2}{4}}\|x(s)\|.$$

Para

$$h = 2\left(\frac{\log K}{\delta K}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = h^{-1}\log K = \frac{1}{2}(\delta K \log K)^{\frac{1}{2}}$$

e $s \leq t \leq s+h$ temos que

$$\delta K\frac{(t-s)}{4} \leq \delta K\frac{h}{4} = \gamma$$

e assim, para $s \leq t \leq s+h$,

$$\|x(t)\| \leq Ke^{(\alpha+\gamma)(t-s)}\|x(s)\|.$$

No caso geral, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $s + nh \leq t < s + (n+1)h$, recorde que $K = e^{h\gamma}$ e note que

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq Ke^{(\alpha+\gamma)(t-s-nh)}\|x(s+nh)\| \leq K^2e^{(\alpha+\gamma)(t-s-nh)}e^{(\alpha+\gamma)h)}\|x(s+(n-1)h)\| \\ &= K^2e^{(\alpha+\gamma)(t-s-(n-1)h)}\|x(s+(n-1)h)\| \\ &\leq K^{n+1}e^{(\alpha+\gamma)(t-s)}\|x(s))\| \leq \cdots \\ &\leq Ke^{nh\gamma}e^{(\alpha+\gamma)(t-s)}\|x(s))\| \leq Ke^{(\alpha+2\gamma)(t-s)}\|x(s))\|. \blacksquare\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, vamos apresentar as noções de sistemas cinematicamente equivalentes e redutíveis. Diremos que (4.2.18) é cinematicamente equivalente à

$$\dot{y} = B(t)y \tag{4.2.19}$$

se existe função continuamente diferenciável $\mathbb{R} \ni t \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X)$ com $S(t)$ inversível para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\dot{S} = A(t)S - SB(t).$$

Neste caso, se $x(t) = S(t)y(t)$, então $x(t)$ é uma solução de (4.2.18) se, e somente se, $y(t)$ é uma solução de (4.2.19). Diremos que (4.2.18) é redutível se é cinematicamente equivalente a (4.2.19) com $B(t)$ da forma

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix}$$

onde $B_1(t)$ ($B_2(t)$) é uma matrix quadrada de ordem k com $1 \leq k < n$ (ordem $n-k$).

Lema 4.2.19 *Se P é uma projeção ortogonal e X é uma matrix inversível, existe uma matriz inversível S tal que $SPS^{-1} = XPX^{-1}$ e*

$$\|S\| \leq 2^{\frac{1}{2}}, \quad \|S^{-1}\| \leq \left[\|XPX^{-1}\|^2 + \|X(I-P)X^{-1}\|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, se $J \ni t \mapsto X(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua, ou continuamente diferenciável, podemos tomar $J \ni t \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X)$ contínua, ou continuamente diferenciável.

Prova: Já que as matrizes Hermiteanas positivas possuem uma raiz quadrada Hermiteana positiva, seja $R = R^*$ tal que $R^2 = PX^*XP + (I-P)X^*X(I-P)$. Como P comuta com R^2 segue que P comuta com R. Verifiquemos que a matriz $S = XR^{-1}$ tem as propriedades desejadas. Como

$I = PS^*SP + (I-P)S^*S(I-P)$, temos que $\|\xi\|^2 = \|SP\xi\|^2 + \|S(I-P)\xi\|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Assim,

$$\|S\xi\|^2 \leq \{\|SP\xi\| + \|S(I-P)\xi\|\}^2 \leq 2\{\|SP\xi\|^2 + \|S(I-P)\xi\|^2\} = 2\|\xi\|^2$$

e $\|S\| \leq 2^{\frac{1}{2}}$. Por outro lado

$$(S^{-1})^*S^{-1} = (X^*)^{-1}PX^*XPX^{-1} + (X^*)^{-1}(I-P)X^*X(I-P)X^{-1}$$

e

$$\|(S^{-1})^*S^{-1}\|^2 = \|XPX^{-1}\|^2 + \|X(I-P)X^{-1}\|^2.$$

O restante da prova segue diretamente da definição de S. ∎

Lema 4.2.20 *Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de soluções para* (4.2.18) *e suponha que esta uma projeção ortogonal P tal que $X(t)PX^{-1}(t)$ seja limitada. Então, a equação* (4.2.18) *é cinematicamente semelhante a*

$$\dot{z} = C(t)z \tag{4.2.20}$$

com $C(t)$ Hermiteana, $C(t)P = PC(t)$, e $\|C(t)\| \leq \|A(t)\|$.

Prova: Sejam $R(t)$ e $S(t)$ dadas pelo lema anterior e $B = S^{-1}(AS - \dot{S})$. Então, (4.2.18) e (4.2.19) são cinematicamente equivalentes com $x(t) = S(t)y(t)$. Como $R(t) = S^{-1}(t)X(t) = Y(t)$ é uma matriz fundamental de soluções para (4.2.19); isto é $\dot{R} = BR$, temos que $B = \dot{R}R^{-1}$ comuta com P.

Seja $U(t)$ a matriz fundamental de soluções para

$$\dot{u} = \frac{1}{2}[B(t) - B^*(t)]u$$

tal que $U(t_0) = I$ para algum t_0. Então $U(t)$ é unitário e comuta com P (já que P ($P^* = P$) comuta com $B(t)$ ($B^*(t)$) e da unicidade do problema de Cauchy associado a equação acima).

A mudança de variáveis $y = U(t)z$ transforma (4.2.19) em (4.2.20) onde $C(t) = \frac{1}{2}U^{-1}(t)[B(t) + B^*(t)]U(t)$ é Hermitiana e comuta com P.

Para t fixo existem um maior número real λ e um menor número real μ tais que

$$\lambda I \leq A + A^* \leq \mu I$$

e $\|A + A^*\| = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$. Da defincão de R,

$$\dot{R}R + R\dot{R} = PX^*(A + A^*)XP + (I - P)X^*(A + A^*)X(I - P).$$

Disto e da definição de R segue que

$$\lambda R^2 \leq R\dot{R} + \dot{R}R \leq \mu R^2$$

e portanto

$$\lambda \leq \dot{R}R^{-1} + R^{-1}\dot{R} \leq \mu R^2$$

e $\|B + B^*\| \leq \|A + A^*\|$. Como U é unitário e $\|A^*\| = \|A\|$, isto implica que

$$\|C\| = \frac{1}{2}\|B + B^*\| \leq \|A\|.$$

Logo, $x = T(t)z$ onde $T(t) = S(t)U(t)$ satisfaz

$$\|T(t)\| \leq 2^{\frac{1}{2}},$$
$$\|T(t)^{-1}\| \leq \left\{\|X(t)PX^{-1}(t)\|^2 + \|X(t)PX^{-1}(t)\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} .\blacksquare$$

Se as equações diferenciais (4.2.18) e (4.2.20) são cinematicamente semelhantes uma tem dicotomia exponencial se, e somente se, a outra tem dicotomia exponencial.

Observação 4.2.21 *O teorema abaixo mostra que se $A(t)$ oscila pouco é limitada e cada $A(t_0)$ gera um semigrupo com dicotomia exponencial com constante e expoente independentes de t_0, então (4.2.18) tem dicotomia exponencial.*

Teorema 4.2.22 *Sejam $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ e $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(X)$ contínua, limitada e tal que*

- *$A(t)$ tem k auto-valores com parte real menor ou igual a $-\alpha$ e $n-k$ auto-valores com parte real maior ou igual a β, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Então, dado $\epsilon \in 0, \min\{\alpha,\beta\}$ e um número positivo h fixo existe um $\delta = \delta(M, \alpha+\beta, \epsilon)$ tal que, se

$$\|A(t_2) - A(t_1)\| \leq \delta, \quad \textit{sempre que} \quad |t_2 - t_1| \leq h$$

existe constante $K > 0$ e uma matriz fundamental de soluções $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in \mathcal{L}(X)$ de (4.2.18) tal que

$$\begin{aligned} &\|X(t)\tilde{P}X^{-1}(s)\| \leq Me^{-(\alpha-\epsilon)(t-s)},\ t \geq s, \\ &\|X(t)(I-\tilde{P})X^{-1}(s)\| \leq Me^{(\beta-\epsilon)(t-s)},\ t \leq s, \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

onde $\tilde{P}$ é a projeção canônica sobre as k primeiras coordenadas.

Prova: Fazendo a mudança de variáveis $\tilde{x}(t) = e^{\frac{\alpha-\beta}{2}t}x(t)$, é fácil ver que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\beta = \alpha$.

Suponha inicialmente que $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(X)$ seja continuamente diferenciável e $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\dot{A}(t)\| \leq \delta$. O Caso $k = n$ segue imediatamente do Lema 4.2.18.

Se $P(t)$ é dado por (4.2.17), então

$$\|P(t)\| \leq (2^n - 1)3^{n-1}(\alpha^{-1}\|A\|)^{n-1}$$

e

$$\|\dot{P}(t)\| \leq (2^n - 1)^2 3^{2n-2}(\alpha^{-1}\|A(t)\|)^{2n-1}\frac{\|\dot{A}(t)\|}{\|A(t)\|}$$

e como $P(t)$ é uma projeção

$$\dot{P}(t) = \dot{P}(t)P(t) + P(t)\dot{P}(t), \quad \text{e} \quad P(t)\dot{P}(t)P(t) = 0.$$

Seja $W(t)$ a solução de

$$\begin{aligned} &\dot{W}(t) = [\dot{P}(t)P(t) - P(t)\dot{P}(t)]W(t), \\ &W(t_0) = I. \end{aligned}$$

É fácil ver que $P(t)W(t)$ e $W(t)P(t_0)$ são soluções de

$$\begin{aligned} &\dot{W}(t) = [\dot{P}(t)P(t) - P(t)\dot{P}(t)]W(t), \\ &W(t_0) = P(t_0). \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

e assim $P(t) = W(t)P(t_0)W(t)^{-1}$. Como $P(t_0)$ é semelhante a $\tilde{P}$ temos que $P(t) = \tilde{W}(t)\tilde{P}\tilde{W}(t)^{-1}$ onde $\tilde{W}(t)$ é uma matriz fundamental de soluções para (4.2.22). Segue do Lema 4.2.20 que existe $\mathbb{R} \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ continuamente diferenciável, $T(t)$ inversível, tal que

$$P(t) = T(t)\tilde{P}T(t)^{-1},$$

com $\|T(t)\|\|T(t)^{-1}\| \leq a\|P(t)\|$.

Se $B(t) = [\dot{P}(t)P(t) - P(t)\dot{P}(t)]$, fazendo $W(t) = T(t)Z(t)$ temos que

$$C(t) = T^{-1}(t)B(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t)$$

satisfaz (Lema 4.2.20) $\|C(t)\| \leq \|B(t)\|$ e $\dot{Z} = C(t)Z$. Segue que

$$\|T^{-1}(t)\dot{T}(t)\| \leq a\|P(t)\|\|\dot{P}(t)\|$$

Se em (4.2.18) fazemos a mudança de variáveis $x = T(t)y$ obetemos

$$\dot{y} = [T^{-1}(t)A(t)T(t) - T^{-1}\dot{T}(t)]y \tag{4.2.23}$$

como $A(t)$ comuta com $P(t)$, $P(t)T(t) = T(t)\tilde{P}$ e $T(t)^{-1}P(t) = \tilde{P}T(t)^{-1}$, $D(t)$ comuta com $\tilde{P}$. Portanto a equação

$$\dot{z} = D(t)z \tag{4.2.24}$$

se decompõe em dois sistemas desacoplados de ordens k e $n-k$. Além disso $D(t)$ tem os mesmos auto-valores que $A(t)$ e tem $\tilde{P}$ como projeção espectral associada aos auto-valores com parte real negativa. Consequentemente, podemos aplicar o Lema 4.2.18 duas vezes (trocando t por $-t$ para a parte correspondente a $(I - \tilde{P})$) aos sistemas em que (4.2.24) decompõe. De fato:

$$\dot{D} = -T^{-1}\dot{T}D + T^{-1}\dot{A}T + DT^{-1}\dot{T},$$

temos que

$$\|\dot{D}\| \leq a(\alpha^{-1}\|A(t)\|)^{4n-3}\|A'(t)\|.$$

Segue que existe uma constante positiva $\delta_1 = \delta_1(M, \alpha, \epsilon)$ tal que, se $\delta \leq \delta_1$, a equação (4.2.24) tem uma matriz fundamental de soluções satisfazendo

$$\|Z(t)\tilde{P}Z^{-1}(t)\| \leq K_1 e^{-(\alpha-\frac{\epsilon}{2})}(t-s), \ t \geq s$$

$$\|Z(t)(I-\tilde{P})Z^{-1}(t)\| \leq K_1 e^{(\alpha-\frac{\epsilon}{2})}(t-s), \ t \leq s$$

onde $K_1 = K_1(M, \alpha, \epsilon)$. Portanto, da robusteza da dicotomia exponencial, existe uma constante positiva $\delta_2 = \delta_2(M, \alpha, \epsilon) \leq \delta_1$ tal que, se $\delta \leq \delta_2$, a equação (4.2.23) tem uma matriz fundamental de soluções $Y(t)$ que estisfaz

$$\|Y(t)\tilde{P}Y^{-1}(t)\| \leq K_2 e^{-(\alpha-\frac{\epsilon}{2})}(t-s), \ t \geq s$$

$$\|Y(t)(I-\tilde{P})Y^{-1}(t)\| \leq K_2 e^{(\alpha-\frac{\epsilon}{2})}(t-s), \ t \leq s$$

onde $K_2 = K_2(M, \alpha, \epsilon)$. Como (4.2.18) é cinematicamente semelhante a (4.2.23), isto prova o resultado sob as hipóteses atuais.

Para o caso geral, se

$$A_1(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} A(u)du, \quad A_2(t) = A(t) - A_1(t),$$

então $\|A_1(t)\| \leq M$ e $\|A_1'(t)\| \leq \delta h^{-1}$ para todo t. Por outro lado $A_2(t)$ é contínua e $\|A_2(t)\| \leq \delta$ para todo t.

Pelo Lema 4.2.14 existe uma constante $\delta_3 = \delta_3(M, \epsilon)$ tal que, se $\delta \leq \delta_3$, então $A_1(t)$ tem k auto-valores com parete real menor ou igual a $-\alpha + \frac{\epsilon}{4}$ e $n-k$ auto-valores com parte real maior ou igual a $\alpha - \frac{\epsilon}{4}$, para todo t. Portanto, do que já provamos, se $\delta \leq \delta_4(M, \alpha, \epsilon)$, a equação

$$\dot{x} = A_1(t)x$$

tem uma matriz fundamental de soluções satisfazendo

$$\|X_1(t)\tilde{P}X_1^{-1}(t)\| \leq K' e^{-(\alpha - \frac{\epsilon}{2})}(t-s), \; t \geq s$$

$$\|X_1(t)(I - \tilde{P})X_1^{-1}(t)\| \leq K' e^{(\alpha - \frac{\epsilon}{2})}(t-s), \; t \leq s$$

onde $K' = K'(M, \alpha, \epsilon)$. Usando novamente a robusteza da dicotomia exponencial vemos que, para $\delta = \delta_0(M, \alpha, \epsilon)$ a equação original tem uma matriz fundamental de soluções $X(t)$ satisfazendo (4.2.21). ■

4.2.5 Caracterização da dicotomia exponencial

Recall the definition of nonhomogeneous linear processes

Definição 4.2.23 *Given a continuous function $f : \mathbb{R} \to X$, the family $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ given by*

$$S(t,\tau)u = T(t,\tau)u + \int_\tau^t T(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s, \; t \geq \tau \in \mathbb{R} \tag{4.2.25}$$

is called a non-homogeneous *process associated to f and $\{T(t,\tau) : t \geq \tau\}$. The continuous function $u(\cdot,\tau,x) : [\tau,\infty) \to X$ defined by $u(t,\tau,x) = S(t,\tau)x$, $t \geq \tau$, is called the solution* *of the nonhomogeneous process through u at $t=\tau$. A continuous function $u:\mathbb{R}\to X$ is called a global solution for the nonhomogeneous process $\{S(t,\tau): t\geq\tau\}$ if it satisfies*

$$S(t,\tau)x(\tau)=x(t),\ \textit{for all } t\geq\tau.$$

Clearly $S(t,\tau):X\to X$ is a linear affine continuous transformation for each $t\geq\tau$ and

1) $S(\tau,\tau)=I$,

2) $S(t,\sigma)S(\sigma,\tau)=S(t,\tau)$, for each $t\geq\sigma\geq\tau$, and

3) $(t,\tau)\mapsto S(t,\tau)x$ is continuous for $t\geq\tau,\ x\in X$.

In this section we give a characterisation of exponential dichotomy for a linear process $\{T(t,\tau): t\geq\tau\}\subset\mathcal{L}(X)$ that satisfies

$$\sup_{0\leq t-\tau\leq 1}\|T(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}<\infty \tag{4.2.26}$$

in terms of the solutions of (4.2.25).

It is clear that, if the linear process $\{T(t,\tau): t\geq\tau\}\subset\mathcal{L}(X)$ has exponential dichotomy, then (4.2.26) is satisfied. If $C_b(\mathbb{R},X)$ denotes the set of functions $f:\mathbb{R}\to X$ which are bounded and continuous, consider the following condition

(C) for each $f\in C_b(\mathbb{R},X)$, there is a unique global solution u_f of (4.2.25) with $u_f\in C_b(\mathbb{R},X)$.

Let us first prove that a linear process with exponential dichotomy must satisfy condition (C).

<u>Teorema</u> 4.2.24 *If a linear process $\{T(t,\tau): t\geq\tau\}\subset\mathcal{L}(X)$ has exponential dichotomy, then condition (C) is satisfied. In addition, if $f\in C_b(\mathbb{R},X)$, the unique solution u of (4.2.25) is given by*

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{4.2.27}$$

where

$$G(t,s) = \begin{cases} T(t,s)(I - P(s)), & t \geq s \\ -T(t,s)P(s), & t \leq s. \end{cases}$$

Proof: Let us first show that, if $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$ is a global solution for the nonhomogeneous process $\{S(t,\tau) : t \geq \tau\}$ associated to f and $\{T(t,\tau) : t \geq \tau\}$, then u satisfies (4.2.27). We know that

$$\|T(\tau,t)P(t)u(t)\|_X \leq Me^{-\omega(t-\tau)}\|u(t)\|, \quad t \geq \tau.$$

Since $u : \mathbb{R} \to X$ is bounded we have that

$$\|T(\tau,t)P(t)u(t)\|_X \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

From (4.2.25) and the definition of global solution we have that

$$u(t) = T(t,\tau)u(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)f(s)ds, \quad t \geq \tau \tag{4.2.28}$$

and this implies that

$$P(t)u(t) = T(t,\tau)P(\tau)u(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)P(s)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau$$

and consequently

$$T(\tau,t)P(t)u(t) = P(\tau)u(\tau) + \int_\tau^t T(\tau,s)P(s)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau. \tag{4.2.29}$$

Note that, for $t \geq r \geq \tau$

$$\left\|\int_\tau^t T(\tau,s)P(s)f(s)\,\mathrm{d}s\right\|_X \leq M\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s)\|\;\omega^{-1}[1 - e^{-\omega(t-\tau)}], \quad t \geq \tau,$$

showing that the integral

$$\int_\tau^\infty T(\tau,s)P(s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

is convergent.

Making $t \to \infty$ in (4.2.29) we obtain that

$$P(\tau)u(\tau) = -\int_\tau^\infty T(\tau,s)P(s)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{4.2.30}$$

We also know that

$$\|T(t,\tau)(I-P(\tau))u(\tau)\|_X \le Me^{-\omega(t-\tau)}\|u(\tau)\|, \quad t\ge\tau.$$

Since $u:\mathbb{R}\to X$ is bounded we have that

$$\|T(t,\tau)(I-P(\tau))u(\tau)\|_X \overset{\tau\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

and, since $f:\mathbb{R}\to X$ is bounded, the integral

$$\int_{-\infty}^{t} T(t,s)(I-P(s))f(s)\,\mathrm{d}s$$

is convergent. Also, from (4.2.28),

$$(I-P(t))u(t) = T(t,\tau)(I-P(\tau))u(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t,s)(I-P(s))f(s)\,\mathrm{d}s,\ t\ge\tau. \quad (4.2.31)$$

Making $\tau\to-\infty$ in (4.2.31) we obtain that

$$(I-P(t))u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t,s)(I-P(s))f(s)\,\mathrm{d}s \quad t\in\mathbb{R}. \quad (4.2.32)$$

Joining (4.2.30) and (4.2.32) we obtain (4.2.27).

From what we have just shown the uniqueness follows. It remains to show that the function u given by (4.2.27) is a global bounded solution of $\{S(t,\tau): t\ge\tau\}$. To that end we need to show that u satisfies (4.2.28) which follows from

$$\begin{aligned}
T(t,\tau)u(\tau) &= T(t,\tau)\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau,s)f(s)\,\mathrm{d}s\\
&= T(t,\tau)\int_{-\infty}^{\tau} T(\tau,s)(I-P(s))f(s)\,\mathrm{d}s - T(t,\tau)\int_{\tau}^{\infty} T(\tau,s)P(s)f(s)\,\mathrm{d}s\\
&= -\int_{\tau}^{t} T(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t} T(t,s)(I-P(s))f(s)\,\mathrm{d}s - \int_{t}^{\infty} T(t,s)P(s)f(s)\,\mathrm{d}s\\
&= -\int_{\tau}^{t} T(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{\tau}^{t} T(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s + u(t).
\end{aligned}$$

To see that $u:\mathbb{R}\to X$ is bounded simply note that

$$\|u(t)\|_X \le \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)}\,\mathrm{d}s\ \sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s)\|_X = 2M\omega^{-1}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s)\|_X.$$

■

The following result is a converse of Theorem 4.2.24 and has been proved in [44].

Teorema 4.2.25 *Let* $\{T(t,\tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *be a process satisfying* (4.2.26). *If condition* (C) *is satisfied, the linear process* $\{T(t,\tau) : t \geq \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$ *has exponential dichotomy.*

Let $\{T(t,\tau) : t \geq \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$ be a linear process and, for each $s \in \mathbb{R}$, $\{T_n^s := T(s+n+1, s+n) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Denote by $B = \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ the Banach space of the bounded sequences $v = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ with the norm $\|v\|_B := \sup\{\|v_n\|_X : n \in \mathbb{Z}\}$. Define the map $L^s : D(L^s) \subset B \to B$ by

$$L^s\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{v_n - T_{n-1}^s x_{v-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

The proof of Theorem 4.2.25 is an immediate consequence of Theorem 4.2.8 and of the following lemma taken from [44].

Lema 4.2.26 *If* (4.2.26) *and condition* (C) *hold, then* L^s *is surjective for all* $s \in \mathbb{R}$.

Proof: Given $s \in \mathbb{R}$, we must prove that, for each $v \in B$, there is a unique $w \in B$ such that $L^s w = v$.

Note that, if $v = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$, $z = \{T_{n-1}^s v_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ and $w \in B$ is such that $L^s w = z$, then $L^s(w+z) = L_s v + z = v$.

Note that, if $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ is continuous, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$ and $\int_0^1 \alpha(\theta)\, \mathrm{d}\theta = 1$, the function $f : \mathbb{R} \to X$ defined by

$$f(t) = \alpha(t-n-s+1)T(t, n+s-1)v_{n-1} + (1 - \alpha(t-n-s+1))T(t, n+s-2)v_{n-2}$$

for $t \in [n+s-1, n+s]$, $n \in \mathbb{Z}$, is such that $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$ and

$$T(s+n, s+n-1)v_{n-1} = \int_{s+n-1}^{s+n} T(s+n, \theta) f(\theta)\, \mathrm{d}\theta,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Since condition (C) holds, there exists a unique $g \in C_b(\mathbb{R}, X)$ such that

$$g(s+n) = T(s+n, s+n-1)g(s+n-1) + \int_{s+n-1}^{s+n} T(s+n,\theta) f(\theta)\, \mathrm{d}\theta,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Setting $w_n = g(s+n)$ we have that $w = \{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ solves $L^s w = z$ and that completes the proof. ∎

Capítulo

5

A variedade instável de uma solução global hiperbólica

Seja X um espaço de Banach e considere o processo de evolução não-linear $\{S(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$. Neste capítulo estudaremos o comportamento deste processo de evolução não-linear próximo a soluções globais hiperbólicas.

5.1 Soluções Hiperbólicas

Se $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é contínua na primeira variável e localmente Lipschitz contínua na segunda variável e $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ é um processo de evolução linear que satisfaz (4.2.8), é fácil ver que a equação integral

$$y(t,\tau,x) = T(t,\tau)x + \int_{\tau}^{t} T(t,s)f(s,y(s,\tau,x))\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.1}$$

tem uma única solução local; isto é, para cada $(\tau,x) \in \mathbb{R} \times X$ existe um $\sigma = \sigma(\tau,x) > 0$ e uma única função contínua $y(\cdot,\tau,x) : [\tau,\tau+\sigma) \to X$ que satisfaz (5.1.1) para todo $t \in [\tau,\tau+\sigma)$.

Se supomos que $\sigma(\tau,x) = +\infty$ para cada $(\tau,x) \in \mathbb{R} \times X$ e se definimos $S_f(t,\tau)x = y(t,\tau,x)$, $t \in [\tau,\infty)$, então $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}\}$ é um processo de evolução. Neste caso, nos referiremos a $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}\}$ como o processo de evolução semilinear obtido pela perturbação do processo de evolução linear $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ pela função não-linear $f : \mathbb{R} \times X \to X$; isto é,

$$S_f(t,\tau)x = T(t,\tau)x + \int_\tau^t T(t,s)f(s, S_f(s,\tau)x)\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.2}$$

Seja $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função continuamente diferenciável. Suponha que f, juntamente com o processo de evolução linear $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$, definam um processo de evolução semilinear $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}\}$ e que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global para $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$, consideramos o processo de evolução linear $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_f(t,\tau) = T(t,\tau) + \int_\tau^t T(t,s)D_x f(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.3}$$

Definição 5.1.1 *Diremos que $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global hiperbólica para $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ se $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial.*

No que se segue vamos caracterizar as soluções globais hiperbólicas limitadas. Suponha que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global hiperbólica limitada para o processo de evolução semilinear $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ obtido pela perturbação do processo de evolução linear $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ pela função continuamente diferenciável $f : \mathbb{R} \times X \to X$.

Suponha que $\phi : [\tau, \tau+\sigma] \to X$ seja uma solução da equação integral

$$\phi(t) = T(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s$$

e mostremos que

$$\phi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.4}$$

De fato, se

$$\psi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s,$$

então

$$\begin{aligned}
\psi(t)-\phi(t) &= \int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}s - \int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))\phi(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t\int_s^t T(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))L_f(\theta,s)\,\mathrm{d}\theta[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s\\
&=\int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}s - \int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))\phi(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t T(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))\int_\tau^\theta L_f(\theta,s)[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))[\psi(s)-\phi(s)]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall concluímos que $\phi(t)=\psi(t)$ para todo $t\in[\tau,\tau+\sigma]$.

Suponha ainda que o processo de evolução linear $\{L_f(t,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ dado por (5.1.3) tenha dicotomia exponencial com constante M, expoente ω e projeçoes $\{Q(t):t\in\mathbb{R}\}$. De (5.1.4), da limitação de $\xi:\mathbb{R}\to X$ e da dicotomia de $\{L_f(t,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ temos que, para $t\geqslant\tau$, se $\phi:\mathbb{R}\to X$ é uma solução limitada de (5.1.2), então

$$Q(t)\phi(t)=L_f(t,\tau)Q(\tau)\phi(\tau)+\int_\tau^t L_f(t,s)Q(s)[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s$$

e consequentemente

$$L_f(\tau,t)Q(t)\phi(t)=Q(\tau)\phi(\tau)+\int_\tau^t L_f(\tau,s)Q(s)[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Fazendo $t\to\infty$ temos que

$$Q(t)\phi(t)=-\int_t^\infty L_f(t,s)Q(s)[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Semelhantemente,

$$\begin{aligned}
(I-Q(t))\phi(t)&=L_f(t,\tau)(I-Q(\tau))\phi(\tau)\\
&\quad+\int_\tau^t L_f(t,s)(I-Q(s))[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

fazendo $\tau\to-\infty$ temos que

$$(I-Q(t))\phi(t)=\int_{-\infty}^t L_f(t,s)(I-Q(s))[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Isto implica que

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s$$

onde

$$G_f(t,s) = \begin{cases} L_f(t,s)(I - Q(s)), \ t \geqslant s \\ -L_f(t,s)Q(s), \ t \leqslant s \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Suponha também que

$$\rho(\epsilon) := \sup_{\|x\| \leqslant \epsilon} \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|f(t,\xi(t)+x) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))x\|_X}{\|x\|_X} \stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{5.1.6}$$

Com esta hipótese e a caracterização acima, não é difícil ver que $\xi : \mathbb{R} \to X$ é isolada no conjunto $C_b(\mathbb{R}, X)$ das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em X. De fato, se $\phi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução limitada de (5.1.2) satisfazendo $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X \leqslant \epsilon$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X \leqslant 2M\rho(\epsilon)\omega^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X.$$

Se $\epsilon > 0$ é tal que $2M\rho(\epsilon)\omega^{-1} < 1$ concluímos que $\phi(t) = \xi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

5.1.1 Perturbação de soluções globais hiperbólicas

Seja $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função continuamente diferenciável, $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ um processo de evolução linear. Suponha que f e $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ definam um processo de evolução semilinear; isto é,

$$S_f(t,\tau)x = T(t,\tau)x + \int_\tau^t T(t,s)f(s,S_f(s,\tau)x)\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \geqslant \tau, \ \forall x \in X. \tag{5.1.7}$$

e que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global hiperbólica limitada para $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$. Assim, o processo de evolução linear definido por

$$L_f(t,\tau) = T(t,\tau) + \int_\tau^t T(t,s)D_x f(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

tem dicotomia exponencial com constante M e expoente $\omega > 0$ e

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t,s)[f(s,\xi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\xi(s)]\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.8}$$

Se $\epsilon \in (0,1)$ e $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t)\|_X + 1 = M_1 < \infty$, suponha que

$$\sup_{\|x\|\leqslant M_1} \|f(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty, \tag{5.1.9}$$

que

$$\sup_{\|x\|\leqslant M_1} \|f(t,x) - g(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x) - D_x g(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\epsilon}{4M\omega^{-1}}. \tag{5.1.10}$$

e que g e $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ definam um processo de evolução semilinear $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$. Então, $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ tem uma única solução global limitada $\eta : \mathbb{R} \to X$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t) - \eta(t)\|_X < \epsilon.$$

De fato, se $y : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada de $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$, então

$$\begin{aligned} y(t) &= L_f(t,\tau)y(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[g(s,y(s)) - D_x f(s,\xi(s))y(s)]\,\mathrm{d}s \\ \xi(t) &= L_f(t,\tau)\xi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\xi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\xi(s)]\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

e, se definimos $\phi(t) = y(t) - \xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\phi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.12}$$

onde $\tilde{g}(t,\phi) = g(t,\phi(t) + \xi(t)) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))\phi(t)$. Projetando (5.1.12) com $I - Q(t)$ e tomando o limite quando $\tau \to -\infty$ temos que

$$(I - Q(t))\phi(t) = \int_{-\infty}^t L_f(t,s)(I - Q(s))\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Projetando (5.1.12) com $Q(t)$ temos que, para $t \geqslant \tau$,

$$Q(t)\phi(t) = L_f(t,\tau)Q(\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s$$

e, consequentemente,

$$L_f(\tau,t)Q(t)\phi(t) = Q(\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(\tau,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Tomando o limite quando $t \to \infty$ obtemos que

$$Q(\tau)\phi(\tau) = -\int_\tau^\infty L_f(\tau,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s$$

Isto implica que existe uma única solução global limitada de (5.1.12) em

$$B_\epsilon := \{\phi : \mathbb{R} \to X : \phi \text{ é contínua } \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|_X \leqslant \epsilon\}$$

para ϵ pequeno se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\phi)(t) &= -\int_t^\infty L_f(t,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^t L_f(t,s)(I-Q(s))\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^\infty G_f(t,s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

tem um único ponto fixo em B_ϵ. Usando a dicotomia exponencial de $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ e o Princípio da Contração de Banach obtemos que existe uma única solução global limitada de (5.1.12) em B_ϵ. De fato:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(\phi)(t)\|_X &\leqslant M\int_{-\infty}^\infty e^{-\omega|t-s|}\|\tilde{g}(s,(\phi(s)))\|_X\,\mathrm{d}s \leqslant 2M\omega^{-1}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|g(t,y(t)) - f(t,y(t))\|_X \\
&+ 2M\omega^{-1}\sup_{\|x\|\leqslant\epsilon}\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{\|f(t,\xi(t)+x) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))x\|_X}{\|x\|_X}\epsilon \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2} + 2M\omega^{-1}\rho(\epsilon)\epsilon,
\end{aligned}$$

onde usamos (5.1.6). Escolhendo ϵ tal que $2M\omega^{-1}\rho(\epsilon)\epsilon < \frac{\epsilon}{2}$ temos que $\mathcal{T}$ leva B_ϵ nele mesmo.

Usando (5.1.10) não é difícil ver que, para ϵ pequeno,

$$\|\mathcal{T}(\phi_1)(t) - \mathcal{T}(\phi_2)(t)\|_X \leqslant \frac{1}{2}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X.$$

Isto mostra que existe uma única solução $\nu : \mathbb{R} \to X$ of (5.1.12) em B_ϵ.

Como $\eta = \nu + \xi : \mathbb{R} \to X$ está uniformemente próxima a $\xi : \mathbb{R} \to X$, segue de (5.1.10) e do Teorema 4.2.9 que, para ϵ pequeno,

$$\begin{aligned}
L_g(t,\tau) &= T(t,\tau) + \int_\tau^t T(t,s)D_x g(s,\eta(s))L_g(s,\tau)\ ds \\
&= L_f(t,\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[D_x g(s,\eta(s)) - D_x f(s,\xi(s))][L_g(s,\tau) - L_f(s,\tau)]\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_\tau^t L_f(t,s)[D_x g(s,\eta(s)) - D_x f(s,\xi(s))]L_f(s,\tau)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

tem dicotomia exponencial e consequentemente η é hiperbólica. ■

5.2 Existência de variedades instáveis como gráfico

Agora estamos preparados para estudar o comportamento de soluções de processos de evolução semilineares próximo a uma solução global hiperbólica $\xi : \mathbb{R} \to X$; isto é, a variedades instável desta solução global hiperbólica.

Suponha que $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ seja um processo de evolução semilinear obtido por perturbação do processo de evolução linear $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ por uma função continuamente diferenciável $f : \mathbb{R} \times X \to X$; isto é

$$S_f(t,\tau)x = T(t,\tau)x + \int_\tau^t T(t,s)f(s, S_f(s,\tau)x)\,\mathrm{d}s. \tag{5.2.1}$$

Suponha ainda que $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ satisfaça (**??**) e que that $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global hiperbólica limitada para $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$. Considere ainda o processo de evolução linear $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ associado a ξ por

$$L_f(t,\tau) = T(t,\tau) + \int_\tau^t T(t,s)D_x f(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

Então $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dicotomia exponencial e digamos que M seja a constante, ω o expoente e $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ as projeções desta dicotomia.

Definição 5.2.1 *A variedade instável da solução global hiperbólica ξ de $\{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ é o conjunto*

$$W^u(\xi) = \{\,(\tau,\zeta) \in \mathbb{R} \times X : \text{ existe uma solução global } \eta : \mathbb{R} \to X \text{ de } \{S_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\} \text{ tal que } \eta(\tau) = \zeta \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \|\eta(t) - \xi(t)\|_X = 0\}.$$

Mostraremos que a variedade instável de ξ é dada por

$$(t, \xi(t) + Q(t)x + \Sigma^u(t, Q(t)x)) \in \mathbb{R} \times X \text{ com } (t,x) \in \mathbb{R} \times X \text{ e } x \text{ pequeno.}$$

onde Σ é uma aplicação da forma

$$\mathbb{R} \times X \ni (t,x) \mapsto \Sigma^u(t,x) \in X, \quad Q(t)(\Sigma^u(t,Q(t)x)) = 0 \text{ e } \Sigma^u(t,x) = \Sigma^u(t,Q(t)x).$$

Sabemos que, $y(t)$ é uma solução de (5.2.1) se, e somente se, $y(t) = x(t) + \xi(t)$ onde $x(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} x(t) &= L_f(t,\tau)x(\tau) \\ &+ \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,x(s)+\xi(s)) - f(s,\xi(s)) - D_x f(s,\xi(s))x(s)]\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Se $x(t)$ é uma solução de (5.2.2) escrevemos $x^+(t) = Q(t)x(t)$ e $x^-(t) = x(t) - x^+(t)$. Então

$$\begin{aligned} x^+(t) &= L_f(t,\tau)x^+(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)H(t,x^+,x^-)\,\mathrm{d}s \\ x^-(t) &= L_f(t,\tau)x^-(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)G(t,x^+,x^-)\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

onde

$$H(t,x^+,x^-) = Q(t)[f(t,x^+ + x^- + \xi(t)) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))(x^+ + x^-),$$

$$G(t,x^+,x^-) = (I - Q(t))[f(t,x^+ + x^- + \xi(t)) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))(x^+ + x^-).$$

Como em $(t,0,0)$ as funções H e G são nulas e têm derivadas nulas (com respeito a x^+ e x^-), do fato que H e G são continuamente diferenciáveis, uniformemente com respeito a t, obtemos que, dado $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\|_X = \|x^+(t) + x^-(t)\|_X < \delta$ ($x^+(t) = Q(t)x$, $x^-(t) = x - x^+(t)$), então

$$\begin{aligned} &\|H(t,x^+,x^-)\|_X \leqslant \rho, \qquad \|G(t,x^+,x^-)\|_X \leqslant \rho, \\ &\|H(t,x^+,x^-) - H(t,\tilde{x}^+,\tilde{x}^-)\|_X \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\|_X + \|x^- - \tilde{x}^-\|_X), \\ &\|G(t,x^+,x^-) - G(t,\tilde{x}^+,\tilde{x}^-)\|_X \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\|_X + \|x^- - \tilde{x}^-\|_X). \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Observação 5.2.2 *É possível estender H e G fora da bola de raio δ de forma que as condições* (5.2.4) *valham para todo $x^+ \in X^+$, $x^- \in X^-$. De fato, dada uma função g definida na bola fechada de raio δ de $V \times Z$ e tomando valores em W, onde V, Z, W são espaços de Banach, defina $g_\delta : V \times Z \to W$ por*

$$g_\delta(x^+,x^-) = \begin{cases} g(x^+,x^-), & \|x^+ + x^-\|_X \leqslant \delta \\ g\left(\dfrac{\delta\, x^+}{\|x^+ + x^-\|_X}, \dfrac{\delta\, x^-}{\|x^+ + x^-\|_X}\right), & \|x^+ + x^-\|_X > \delta. \end{cases}$$

A extensão g_δ é globalmente Lipschitz e sua constante de Lipschitz é a constante de Lipschitz de g na bola de raio δ.

As considerações acima sugerem que obtenhamos primeiramente o resultado relativo a existência de variedades instáveis sob a hipótese que (5.2.4) valha para todo $z = (x^+, x^-) \in X$ com $\rho > 0$ oportunamente escolhido. Assumindo ainda que (5.2.4) valha para todo $z = (x^+, x^-) \in X$, provaremos a continuidade das variedades instáveis. Finalmente, concluiremos a existência e continuidade das variedades instáveis locais para o caso em que h satisfaz (5.2.4) somente para $\|x\|_X = \|x^+ + x^-\|_X < \delta$ com $\delta > 0$ oportunamente escolhido.

Assim, por um momento, assumimos que f seja tal que H e G satisfazem (5.2.4) para todo $x^+(t) \in Q(t)X$, $x^-(t) \in (I - Q(t))X$ e $\rho > 0$ que será especificado posteriormente (em (5.2.6)). Seja $W^u(t, 0, 0)$ a variedade instável da solução de equlíbrio $(0, 0)$ de (5.2.3). Mostraremos que existe uma função limitada e Lipschitz contínua $\Sigma^{*,u} : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que $\Sigma^{*,u}(t, x) = \Sigma^{*,u}(t, Q(t)x)$, $Q(t)\Sigma^{*,u}(t, x) = 0$ para todo $x \in X$ e

$$W^u(0, 0) = \{(t, x^+, x^-) : x^- = \Sigma^{*,u}(t, x^+),\ x^+ \in Q(t)X\}.$$

<u>**Observação**</u> **5.2.3** *Observe que estamos buscando uma função $\Sigma^{*,u}$ tal que, se $\tau \in \mathbb{R}$ e $(\zeta, \Sigma^{*,u}(\tau, \zeta)) \in X$, então a solução de (5.2.3) com $x^+(\tau) = \zeta$, $x^-(\tau) = \Sigma^{*,u}(\tau, \zeta)$ é tal que $x(t)$ está no gráfico de $\Sigma^{*,u}(t, \cdot)$ para todo t. Isto significa qud $x^-(t) = \Sigma^{*,u}(t, x^+(t))$ para todo t e portanto (5.2.3) torna-se*

$$\begin{aligned} x^+(t) &= L_f(t, \tau)x^+(\tau) + \int_\tau^t L_f(t, s)H(s, x^+(s), \Sigma^{*,u}(s, x^+(s)))\,\mathrm{d}s \\ x^-(t) &= L_f(t, \tau)x^-(\tau) + \int_\tau^t L_f(t, s)G(s, x^+(s), \Sigma^{*,u}(s, x^+(s)))\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Além disso, a solução $(x^+(t), x^-(t))$ deve tender a zero quando $t \to -\infty$ (em particular, deve ficar limitada quando $t \to -\infty$). Como

$$\begin{aligned} x^-(t) = {}& L_f(t, t_0)(I - Q(t_0))x^-(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t L_f(t, s)(I - Q(s))G(s, x^+(s), \Sigma^{*,u}(s, x^+(s)))\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

fazendo $t_0 \to -\infty$ *temos que*

$$x^-(t) = \varSigma^{*,u}(t, x^+(t)) = \int_{-\infty}^{t} L_f(t,s)(I - Q(s))G(s, x^+(s), \varSigma^{*,u}(s, x^+(s)))\,\mathrm{d}s$$

e, em particular,

$$\begin{aligned}\varSigma^{*,u}(\tau,\zeta) &= \varSigma^{*,u}(\tau, x^+(\tau)) = x^-(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} L_f(\tau,s)(I - Q(s))G(s, x^+(s), \varSigma^{*,u}(s, x^+(s)))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Para mostrar a existência da função $\varSigma^{*,u}(\tau,\cdot)$ utilizaremos o princípio da contração de Banach. Fixemos $D > 0$, $L > 0$, $0 < \vartheta < 1$ e escolhamos $\rho > 0$ tal que

$$\begin{array}{ll} \frac{\rho M}{\omega} \leqslant D, & \frac{\rho M}{\omega}(1+L) \leqslant \vartheta < 1, \\ \dfrac{\rho M^2(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)} \leqslant L, & \rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega - \rho M(1+L)} < \omega. \end{array} \tag{5.2.6}$$

Definição 5.2.4 *Dado* $\eta > 0$, *denotaremos por* $\mathcal{LB}(D,L)$ *o espaço métrico completo das as funções contínuas* $\Sigma : \mathbb{R} \times X \to X$ *que satisfazem*

$$\begin{aligned} &\sup\{\|\varSigma(\tau,x)\|_X,\ (\tau,x) \in \mathbb{R}\times X\} \leqslant D, \\ &\|\varSigma(\tau,x) - \varSigma(\tau,\tilde{x})\|_X \leqslant L\|x - \tilde{x}\|_X \ e \\ &\varSigma(\tau,x) = \varSigma(\tau, Q(\tau)x) \in (I - Q(\tau))X,\ \forall x \in X, \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

para todo $(\tau,x,\tilde{x}) \in \mathbb{R}\times X \times X$, *com a distância entre* Σ *e* $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{LB}(D,L)$ *definida por*

$$|\!|\!|\varSigma(\cdot,\cdot) - \tilde{\varSigma}(\cdot,\cdot)|\!|\!| := \sup\{\|\varSigma(\tau,x) - \tilde{\varSigma}(\tau,x)\|_X,\ (\tau,x) \in \mathbb{R}\times X\}.$$

Teorema 5.2.5 *Se as condições acima estiverem satisfeitas, existirá uma função* $\varSigma^{*,u} \in \mathcal{LB}(D,L)$ *tal que*

$$W^u(0,0) = \{(\tau,w) \in \mathbb{R}\times X : w = (Q(\tau)w, \varSigma^{*,u}(\tau, Q(\tau)w)),\ \tau \in \mathbb{R}\}, \tag{5.2.8}$$

onde $W^u(0,0)$ *é a variedade instável da solução nula de* (5.2.3).

Prova: Para $\tau \in \mathbb{R}$, $\zeta \in Q(\tau)X$ e $\Sigma \in \mathcal{LB}(D,L)$ denote por $x^+(t) = \psi(t,\tau,\zeta,\Sigma)$ a solução de

$$x^+(t) = L_f(t,\tau)x^+(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)H(s,x^+,\Sigma(s,x^+))\,\mathrm{d}s,\ t<\tau,\ x^+(\tau)=\zeta\in Q(\tau)X.$$

e defina

$$\Phi(\Sigma)(\tau,\zeta) = \int_{-\infty}^{\tau} L_f(\tau,s)(I-Q(s))G(s,x^+(s),\Sigma(s,x^+(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{5.2.9}$$

Mostraremos que, se $\rho>0$ satisfaz (5.2.6), a aplicação Φ leva $\mathcal{LB}(D,L)$ nele mesmo, é uma contração estrita e, portanto, possui um único ponto fixo $\mathcal{LB}(D,L)$.

Primeiramente note que, como $\{L_f(t,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial com constante M e expoente ω, segue de (5.2.4) que

$$\|\Phi(\Sigma)(\tau,\zeta)\|_X \leqslant \int_{-\infty}^{\tau}\rho M e^{-\omega(\tau-s)}\,\mathrm{d}s = \frac{\rho M}{\omega}, \tag{5.2.10}$$

e de (5.2.6) temos que $\sup\{\|\Phi(\Sigma)(\tau,Q(\tau)x)\|_X,\ (\tau,x)\in\mathbb{R}\times X\}\leqslant D$.

A seguir, suponha que Σ e $\tilde{\Sigma}$ sejam funções que satisfaçam (5.2.7), ζ, $\tilde{\zeta}\in Q(\tau)X$ e que $x^+(t)=\psi(t,\tau,\zeta,\Sigma)$, $\tilde{x}^+(t)=\psi(t,\tau,\tilde{\zeta},\tilde{\Sigma})$. Então

$$\begin{aligned} x^+(t)-\tilde{x}^+(t) &= L_f(t,\tau)Q(\tau)(\zeta-\tilde{\zeta})\\ &\quad+\int_\tau^t L_f(t,s)Q(s)[H(s,x^+(s),\Sigma(s,x^+(s)))-H(s,\tilde{x}^+(s),\tilde{\Sigma}(s,\tilde{x}^+(s)))]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

e de (5.2.4), (5.2.7) obtemos que

$$\begin{aligned}\|x^+(t)-\tilde{x}^+(t)\|_X &\leqslant Me^{\omega(t-\tau)}\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X\\ &\quad+M\int_t^\tau e^{\omega(t-s)}\|H(s,x^+(s),\Sigma(s,x^+(s)))-H(s,\tilde{x}^+(s),\tilde{\Sigma}(s,\tilde{x}^+(s)))\|_X\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant Me^{\omega(t-\tau)}\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X+\rho M|\!|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!|\!|\int_t^\tau e^{\omega(t-s)}\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\rho M(1+L)\int_t^\tau e^{\omega(t-s)}\|x^+(s)-\tilde{x}^+(s)\|_X\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Se $\phi(t)=e^{-\omega\,(t-\tau)}\|x^+(t)-\tilde{x}^+(t)\|_X$, então

$$\phi(t)\leqslant M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X+\rho M\int_t^\tau e^{\omega(\tau-s)}\,\mathrm{d}s|\!|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!|\!|+\rho M(1+L)\int_t^\tau\phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned}
&\|x^+(t) - \tilde{x}^+(t)\|_X \\
&\quad \leqslant [M\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X e^{\omega\,(t-\tau)} + \rho M \int_t^\tau e^{\omega(t-s)}\,\mathrm{d}s \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|] e^{-\rho M(1+L)(t-\tau)} \\
&\quad \leqslant [M\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \omega^{-1} \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|] e^{(\omega - \rho M(1+L))(t-\tau)}.
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(\Sigma)(\tau,\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tau,\tilde{\zeta})\|_X \\
&\quad \leqslant M \int_{-\infty}^\tau e^{-\omega(\tau-s)} \|G(s, x^+(s), \Sigma(s, x^+(s))) - G(s, \tilde{x}^+(s), \tilde{\Sigma}(s, \tilde{x}^+(s)))\|_X\,\mathrm{d}s \\
&\quad \leqslant \rho M \int_{-\infty}^\tau e^{-\omega(\tau-s)} \Big[(1+L)\|x^+(s) - \tilde{x}^+(s)\|_X + \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|\Big]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Utilizando as estimativas para $\|x^+ - \tilde{x}^+\|_X$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(\Sigma)(\tau,\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tau,\tilde{\zeta})\|_X \\
&\quad \leqslant \frac{\rho M}{\omega}\left[1 + \frac{\rho M(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)}\right] \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\| + \frac{\rho M^2(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Seja

$$I_\Sigma = \frac{\rho M}{\omega}\left[1 + \frac{\rho M(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)}\right] \quad \text{e} \quad I_\zeta = \frac{\rho M^2(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)}.$$

Como $I_\Sigma \leqslant \frac{\rho M}{\omega}(1+L)$, segue de (5.2.6), (5.2.12) que $I_\Sigma \leqslant \vartheta$, $I_\zeta \leqslant L$ e

$$\|\Phi(\Sigma)(\tau,\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tau,\tilde{\zeta})\|_X \leqslant L\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \vartheta \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|. \tag{5.2.13}$$

A desigualdade (5.2.13) para $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ juntamente com (5.2.10) implicam que Φ leva $\mathcal{LB}(D,L)$ nele mesmo. De (5.2.6), a estimativa (5.2.13) com $\zeta = \tilde{\zeta}$ mostra que Φ é uma contração. Logo, existe um único ponto fixo $\Sigma^{*,u} = \Phi(\Sigma^{*,u})$ de Φ em $\mathcal{LB}(D,L)$.

No que se segue provaremos que, if $(x^+(t), x^-(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução global de (5.2.3) que fica limitada quando $t \to -\infty$, então existem constantes $M \geqslant 1$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\|x^-(t) - \Sigma^{*,u}(t, x^+(t))\|_X \leqslant M e^{-\gamma(t-t_0)} \|x^-(t_0) - \Sigma^{*,u}(t, x^+(t_0))\|_X, \quad t_0 \leqslant t. \tag{5.2.14}$$

Fazendo $t_0 \to -\infty$ in (5.2.14) obtemos que $x^-(t) = \Sigma^{*,u}(t, x^+(t))$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Isto também assegura que $\Sigma^{*,u}(t,0) = 0$, já que $(0,0)$ é uma solução estacionária de (5.2.3).

Seja $\zeta(t) = x^-(t) - \Sigma^{*,u}(t, x^+(t))$ e $y^+(s,t)$, $s \leqslant t$, a solução de

$$y^+(s) = L_f(s,t)x^+(t) + \int_t^s L_f(s,\theta) H(\theta, y^+(\theta), \Sigma^{*,u}(\theta, y^+(\theta)))\, \mathrm{d}\theta, \ s \leq t,$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\|y^+(s,t) - x^+(s)\|_X \\
&\quad = \left\| \int_t^s L_f(s,\theta)[H(\theta, y^+(\theta,t), \Sigma^{*,u}(\theta, y^+(\theta,t))) - H(\theta, x^+(\theta), x^-(\theta))]\, \mathrm{d}\theta \right\|_X \\
&\quad \leqslant \rho M \int_s^t e^{\omega(s-\theta)} \left[(1+L)\|y^+(\theta,t) - x^+(\theta)\|_X + \|\zeta(\theta)\|_X \right] \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Se $\psi(s) = e^{-\omega s}\|y^+(s,t) - x^+(s)\|_X$, então

$$\psi(s) \leqslant \rho M(1+L) \int_s^t \psi(\theta)\, \mathrm{d}\theta + \rho M \int_s^t e^{-\omega\theta}\|\zeta(\theta)\|_X\, \mathrm{d}\theta, \quad s \leqslant t.$$

Usando a desigualdade de Gronwall temos que

$$\|y^+(s,t) - x^+(s)\|_X \leqslant \rho M \int_s^t e^{-\omega(\theta-s)}\|\zeta(\theta)\|_X\, \mathrm{d}\theta \ e^{\rho M(1+L)(t-s)}, \quad s \leqslant t. \tag{5.2.15}$$

Se $s \leqslant t_0 \leqslant t$, então

$$\begin{aligned}
\|y^+(s,t) - y^+(s,t_0)\|_X &= \left\| L_f(s,t_0) Q(t_0)[y^+(t_0,t) - x^+(t_0)] \right\|_X \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^s L_f(s,\theta) Q(\theta)[H(\theta, y^+(\theta,t), \Sigma^{*,u}(\theta, y^+(\theta,t))) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - H(\theta, y^+(\theta,t_0), \Sigma^{*,u}(\theta, y^+(\theta,t_0)))]\, \mathrm{d}\theta \right\|_X \\
&\leqslant \rho M^2 e^{\omega(s-t_0)} \ e^{\rho M(1+L)(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\omega(\theta-t_0)}\|\zeta(\theta)\|_X\, \mathrm{d}\theta \\
&\quad + \rho M(1+L) \int_s^{t_0} e^{\omega(s-\theta)}\|y^+(\theta,t) - y^+(\theta,t_0)\|_X\, \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

e, usando a desigualdade de Gronwall, temos que

$$\|y^+(s,t) - y^+(s,t_0)\|_X \leqslant \rho M^2 e^{\omega(s-t_0)} \ e^{\rho M(1+L)(t-s)} \int_{t_0}^t e^{-\omega(\theta-t_0)}\|\zeta(\theta)\|_X\, \mathrm{d}\theta. \tag{5.2.16}$$

Utilizaremos a estimativa acima para estimar $\zeta(t)$. Note que

$$\begin{aligned}
&\zeta(t) - L_f(t,t_0)(I-Q(t_0))\zeta(t_0)\\
&= x^-(t) - \Sigma^{*,u}(t,x^+(t)) - L_f(t,t_0)(I-Q(t_0))[x^-(t_0) - \Sigma^{*,u}(t_0,x^+(t_0))]\\
&= \int_{t_0}^{t} L_f(t,s)(I-Q(s))G(s,x^+(s),x^-(s))\,\mathrm{d}s\\
&- \Sigma^{*,u}(t,x^+(t)) + L_f(t,t_0)(I-Q(t_0))\Sigma^{*,u}(t_0,x^+(t_0))\\
&= \int_{t_0}^{t} L_f(t,s)(I-Q(s))[G(s,x^+(s),x^-(s)) - G(s,y^+(s,t),\Sigma^{*,u}(s,y^+(s,t)))]\,\mathrm{d}s\\
&- \int_{-\infty}^{t_0} L_f(t,s)(I-Q(s))[G(s,y^+(s,t),\Sigma^{*,u}(s,y^+(s,t)))\\
&\qquad\qquad - G(s,y^+(s,t_0),\Sigma^{*,u}(s,y^+(s,t_0)))]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Portanto, de (5.2.15) e (5.2.16), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\zeta(t) &- L_f(t,t_0)(I-Q(t_0))\zeta(t_0)\|_X\\
&\leqslant \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)}\left[\|x^+(s)-y^+(s,t)\|_X + \|x^-(s)) - \Sigma^{*,u}(s,y^+(s,t))\|_X\right]\,\mathrm{d}s\\
&+ \rho M(1+L)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\omega(t-s)}\|y^+(s,t)-y^+(s,t_0)\|_X\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)}\|\zeta(s)\|_X\,\mathrm{d}s\\
&+ \rho^2M^2(1+L)\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)}\int_{s}^{t} e^{-(\omega-\rho M(1+L))(\theta-s)}\|\zeta(\theta)\|_X\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\\
&+ \rho^2M^3(1+L)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\omega(t-s)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\omega-\rho M(1+L))(\theta-s)}\|\zeta(\theta)\|_X\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
\|\zeta(t) &- L_f(t,t_0)(I-Q(t_0))\zeta(t_0)\|_X \leqslant \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)}\|\zeta(s)\|_X\,\mathrm{d}s\\
&+ \rho^2M^2(1+L)e^{-\omega t}\int_{t_0}^{t} e^{-(\omega-\rho M(1+L))\theta}\|\zeta(\theta)\|_X\int_{t_0}^{\theta} e^{(2\omega-\rho M(1+L))s}\,\mathrm{d}\theta\\
&+ \rho^2M^3(1+L)e^{-\omega t}\int_{t_0}^{t} e^{-(\omega-\rho M(1+L))\theta}\|\zeta(\theta)\|_X\int_{-\infty}^{t_0} e^{(2\omega-\rho M(1+L))s}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\\
&\leqslant \left[\rho M + \frac{\rho^2M^2(1+L)}{2\omega-\rho M(1+L)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)}\|\zeta(s)\|_X\,\mathrm{d}s\\
&+ \frac{\rho^2M^3(1+L)}{2\omega-\rho M(1+L)}e^{-\omega(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\omega-\rho M(1+L))(\theta-t_0)}\|\zeta(\theta)\|_X\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
e^{\omega(t-t_0)}\|\zeta(t)\|_X &\leqslant M\|\zeta(t_0)\|_X + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)}{2\omega - \rho M(1+L)}\right]\int_{t_0}^t e^{\omega(s-t_0)}\|\zeta(s)\|_X\,\mathrm{d}s \\
&+ \frac{\rho^2 M^3(1+L)}{2\omega-\rho M(1+L)}\int_{t_0}^t e^{-(2\omega-\rho M(1+L))(s-t_0)}e^{\omega(s-t_0)}\|\zeta(s)\|_X\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant M\|\zeta(t_0)\|_X + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega-\rho M(1+L)}\right]\int_{t_0}^t e^{\omega(s-t_0)}\|\zeta(s)\|_X\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall temos que

$$\|\zeta(t)\|_X \leqslant M\|\zeta(t_0)\|_X\, e^{-\gamma(t-t_0)}, \tag{5.2.17}$$

onde

$$\gamma = \omega - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega-\rho M(1+L)}\right].$$

Isto prova que (5.2.14) e consequentemente

$$W^u(0,0) \subset \{(\tau,w)\in\mathbb{R}\times X : w = (Q(\tau)w, \varSigma^{*,u}(\tau, Q(\tau)w))\}.$$

Agora provamos que $\{(\tau,w)\in\mathbb{R}\times X : w = (Q(\tau)w, \varSigma^{*,u}(\tau,Q(\tau)w))\} \subset W^u(0,0)$. Considere $z_0^+ \in Q(\tau)X$ e a solução $x^{+^*}(t)$ do problema de valor inicial

$$x^+(t) = L_f(t,\tau)x^+(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)H(s,x^+,\varSigma^{*,u}(s,x^+))\,\mathrm{d}s, \quad x^+(\tau) = x_0^+.$$

Isto define uma curva $(x^{+^*}(t), \varSigma^{*,u}(t,x^{+^*}(t)))$, $t\in\mathbb{R}$. De (5.2.9) segue que

$$\varSigma^{*,u}(t,x^{+^*}(t)) = \int_{-\infty}^t L_f(t,s)(I-Q(s))G(s,x^{+^*}(s),\varSigma^{*,u}(s,x^{+^*}(s))\,\mathrm{d}s, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Portanto $\varSigma^{*,u}(t,x^{+^*}(t))$ resolve

$$x^-(t) = L_f(t,\tau)x^-(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)G(s,x^{+^*},\varSigma^{*,u}(s,x^{+^*}))\,\mathrm{d}s,\ t\geqslant\tau\in\mathbb{R},$$

e concluímos que $(x^{+^*}(t), \varSigma^{*,u}(t,x^{+^*}(t)))$, $t\in\mathbb{R}$, é a solução de (5.2.3), passando por $(x_0^+, \varSigma^{*,u}(\tau,x_0^+))$ no instante τ, com $\varSigma^{*,u}(t,x^{+^*}(t)) \to 0$ quando $t\to-\infty$. Como $\varSigma^{*,u}(t,0)$ $= 0$, o raciocínio que nos levou a (5.2.11) pode ser usado para assegurar

$$\|x^+(t)\|_X \leqslant Me^{(\omega-\rho M(1+L))(t-\tau)}\|x^+(\tau)\|_X.$$

Assim, $x^{+^*}(t)\to 0$ quando $t\to-\infty$ e a prova está completa. ∎

5.2.1 Variedades instáveis sob perturbação

Nesta seção provaremos a continuidade das variedades instáveis relativamente a perturbações regulares. Antes que possamos atacar este projeto, primeiramente consideraremos a continuidade das projeções relativamente a perturbações para o caso de perturbações regulares. Vamos dar uma prova alternativa àquela dada no Teorema 4.2.11. Seja $\{T_1 t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ um processo de evolução linear que tem dicotomia exponencial com constante M_1, expoente $\omega_1 > 0$ e projeções $\{Q_1(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Suponha que $L = \sup\{\|T_1(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)}, 0 \leqslant t-s \leqslant 1\} < \infty$. Se $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ é uma família de operadores tais que $\mathbb{R} \ni t \mapsto B(t)x$ é contínua para cada $x \in X$ definimos o processo $\{T_2(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ por

$$T_2(t,\tau) = T_1(t,\tau) + \int_\tau^t T_1(t,s)B(s)T_2(s,\tau)\,\mathrm{d}s. \tag{5.2.18}$$

Usando o Teorema 4.2.10, dados $M_2 > M_1$ e $\omega_2 < \omega_1$ existe $\epsilon > 0$ tal que, se

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \sup_{t\in[\tau,\tau+1]} \|B(s)\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon.$$

então $\{T_2(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial com constante M_2, expoente ω_2 e projeções $\{Q_2(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Nosso objetivo é estimar $Q_1(t) - Q_2(t)$ em termos de B.

Lema 5.2.6 *Sejam $\{Q_i(t) : t \in \mathbb{R}\}$ as projeções associadas à dicotomia exponencial de $\{T_i(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$, $i = 1, 2$. Então*

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \|Q_1(s) - Q_2(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2M_2^2(\omega_1+\omega_2)^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{5.2.19}$$

Prova: Para provar (**??**) observe que

$$Q_2(s) - Q_1(s) = (I - Q_1(s))Q_2(s) - Q_1(s)(I - Q_2(s)). \tag{5.2.20}$$

Agora, para $\zeta \in X$, seja $\mathbb{R} \ni t \mapsto z(t) \in X$, $z(\tau) = Q_2(\tau)\zeta$,

$$z(t) = T_1(t,t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^t T_1(t,s)B(s)z(s)\,\mathrm{d}s.$$

Aplicando $(I - Q_1(t))$ à equação acima e fazendo $t_0 \to -\infty$ temos que

$$(I - Q_1(\tau))Q_2(\tau)\zeta = \int_{-\infty}^{\tau} T_1(\tau, s)(I - Q_1(s))B(s)T_2(s,\tau)Q_2(\tau)\zeta \, \mathrm{d}s, \text{ para todo } \zeta \in X.$$

Disto segue que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \|(I - Q_1(s))Q_2(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M^2(\omega_1 + \omega_2)^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{5.2.21}$$

Para completar a prova seja $\zeta \in X$, $[\tau, \infty) \ni t \mapsto z(t) \in X$, $z(\tau) = (I - Q_2(\tau))\zeta$, a única solução de

$$z(t) = T_1(t,\tau)z(\tau) + \int_{\tau}^{t} T_1(t,s)B(s)z(s) \, \mathrm{d}s.$$

Aplicando $Q_1(\tau)$ à equação acima, temos que

$$T_1(\tau, t)Q_1(t)z(t) = Q_1(\tau)(I - Q_2(\tau)\zeta + \int_{\tau}^{t} T_1(\tau, s)Q_1(s)B(s)z(s) \, \mathrm{d}s, \ .$$

e fazendo $t \to +\infty$ temos que

$$Q_1(\tau)(I - Q_2(\tau))\zeta = -\int_{\tau}^{\infty} T_1(\tau, s)Q_1(s)B(s)T_2(s,\tau)(I - Q_2(\tau)\zeta \, \mathrm{d}s, \text{ for all } \zeta \in X.$$

Disto segue que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \|Q_1(s)(I - Q_2(s))\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M_2^2(\omega_1 + \omega_2)^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{5.2.22}$$

Agora (5.2.19) segue de (5.2.20), (5.2.21), e (5.2.22)

■

Para $i = 1, 2$, considere os problemas

$$S_i(t,\tau)x = T(t,\tau)x + \int_{\tau}^{t} T(t,s)f_i(s, S_i(s,\tau)x) \, \mathrm{d}s. \tag{5.2.23}$$

Suponha que $\xi_i : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global para $\{S_i(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$. Para cada ξ_i considere o processo de evolução linear $\{L_i(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_i(t,\tau) = T(t,\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t,s)D_x f_i(s, \xi_i(s))L_i(s,\tau) \, \mathrm{d}s.$$

Se $\xi_1 : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global hiperbólica de $\{S_1(t,\tau) : t \geq \tau\}$; isto é, $\{L_1(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ tem dicotomia exponencial com constante $M_1 > 0$ e expoente $\omega_1 > 0$, dados $M_2 > M_1$ e $0 < \omega_2 < \omega_1$, do Teorema 4.2.9 e dos resultados da Seção **??**, escolha $\epsilon > 0$ tal, se

$$\sup_{x \in X} \|f_1(t,x) - f_2(t,x)\|_X + \|D_x f_1(t,x) - D_x f_2(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \epsilon, \tag{5.2.24}$$

existe uma solução global $\xi_2 : \mathbb{R} \to X$ de $\{S_2(t,\tau) : t \geq \tau\}$ com

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_X \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$$

e $\{L_2(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ tem dicotomia exponencial com constante M_2 e expoente ω_2. Assim, $\{L_i(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ tem dicotomia exponencial com constante M_i, expoente $\omega_i > 0$ e projeções $\{Q_i(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Sabemos que, $y_i(t)$ é uma solução de (5.2.23) se, e somente se, $y_i(t) = x_i(t) + \xi_i(t)$ onde $x_i(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} x_i(t) &= L_i(t,\tau)x(\tau) \\ &\quad + \int_\tau^t L_i(t,s)[f_i(s, x_i(s) + \xi_i(s)) - f_i(s,\xi_i(s)) - D_x f_i(s,\xi_i(s))x_i(s)]\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

Podemos decompor a solução $x_i(t)$ de (5.2.25) em $x_i(t) = x_i^+(t) + x_i^-(t)$ onde $x_i^+(t) = Q_i(t)(x_i(t))$ e $x_i^-(t) = (I - Q_i(t))(x_i(t))$. Logo

$$\begin{aligned} x_i^+(t) &= L_i(t,\tau)x_i^+(\tau) + \int_\tau^t L_i(t,s)H(s, x_i^+(s), x_i^-(s))\,\mathrm{d}s \\ x_i^-(t) &= L_i(t,\tau)x_i^-(\tau) + \int_\tau^t L_i(t,s)G(s, x_i^+(s), x_i^-(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

onde

$$h_i(t, x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)) = f_i(t, x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)) - f_i(t,\xi_i(t)) - D_x f_i(t,\xi_i(t))(x_i^+ + x_i^-)$$

$$H_i(t, x_i^+, x_i^-) = Q_i(t)h_i(t, x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)),$$

$$G_i(t, x_i^+, x_i^-) = (I - Q_i(t))h_i(t, x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)).$$

__Teorema__ **5.2.7** *Para $D > 0$, $L > 0$, $0 < \theta < 1$ e $\rho > 0$ suponha que* (5.2.6) *esteja satisfeita e que H_i e G_i satisfazem* (5.2.4) *para todo $x_1^+(t) \in Q_i(t)X$ e $x_i^-(t) \in (I - Q_i(t))X$, $i = 1, 2$. Então, pelo Teorema 6.1.7 existe $\Sigma_i^{*,u} : \mathbb{R} \times X \to X$, tal que $Q_i(\Sigma_i^{*,u}(t,x)) = 0$ e $\Sigma_i^{*,u}(t,x) = \Sigma_i^{*,u}(t, Q_i(t)x)$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$ e a variedade instável $W_i^u(0,0)$ da solução de equilíbrio $(0,0)$ de* (5.2.26) *é dada por*

$$W_i^u(0,0) = \{(\tau, w) \in \mathbb{R} \times X : w = (Q_i(\tau)w, \Sigma_i^{*,u}(\tau, Q_i(\tau)w))\};$$

e para todo $x \in X$,

$$\Sigma_i^{*,u}(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\tau} L_i(\tau,s)(I - Q_i(s))G_i(s, x^+(s), \Sigma_i^{*,u}(s, x_i^+(s)))\,\mathrm{d}s,$$

onde $x_i^+ : (-\infty, \tau] \to X$ é a solução de

$$x_i^+(t) = L_i(t,\tau)Q_i(\tau)x + \int_{\tau}^{t} L_i(t,s)Q_i(s)h_i(s, x_i^+(s), \Sigma_i^{*,u}(s, x_i^+(s)))\,\mathrm{d}s, \tag{5.2.27}$$

Além disso, se

$$\left[\frac{\rho M}{\omega_2} + \frac{\rho^2 M^2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2 - \rho M(1+L))}\right] \leqslant \frac{1}{2} \tag{5.2.28}$$

então,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in X} \{\|Q_2(t)x - Q_1(t)x\|_X + \|\Sigma_2^{*,u}(t,x) - \Sigma_1^{*,u}(t,x)\|_X\} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Prova: Somente precisamos provar que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in X} \|\Sigma_2^{*,u}(t,x) - \Sigma_1^{*,u}(t,x)\|_X \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Se $x \in X$, então

$$\begin{aligned}
&\Sigma_2^{*,u}(\tau, Q_2(\tau)x) - \Sigma_1^{*,u}(\tau, Q_1(\tau)x)\\
&= \int_{-\infty}^{\tau} [L_2(\tau,s)(I - Q_2(s)) - L_1(\tau,s)(I - Q_1(s))]h_2(s, x_2^+, \Sigma_2^{*,u}(s, x_2^+))\,\mathrm{d}s\\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} L_1(\tau,s)(I - Q_1(s))[h_2(s, x_2^+, \Sigma_2^{*,u}(s, x_2^+)) - h_2(s, x_1^+, \Sigma_1^{*,u}(s, x_1^+))]\,\mathrm{d}s\\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} L_1(\tau,s)(I - Q_1(s))[h_2(s, x_1^+, \Sigma_1^{*,u}(s, x_1^+)) - h_1(x_1^+, \Sigma_1^{*,u}(s, x_1^+))]\,\mathrm{d}s\\
&=: I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) + I_3(\epsilon).
\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

Recordando que, de (**??**), $\sup_{s\in\mathbb{R}} \|Q_1(s)-Q_2(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M^2(\omega_1+\omega)^{-1}\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e que

$$L_2(t,\tau)(I-Q_2(\tau)) - L_1(t,\tau)(I-Q_2(\tau)) = \int_\tau^t L_1(t,s)B(s)L_2(s,\tau)(I-Q_2(\tau))\,\mathrm{d}s$$

temos que $I_1(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Além disso, $I_3(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ de (5.2.24).

A seguir estimamos $I_2(\epsilon)$. Recorde $x_i^+ : (-\infty,\tau] \to X$ satisfaz (5.2.27). Usando a Desigualdade de Gronwal de maneira semelhante à (5.2.11), segue que

$$\|x_i^+(t)\|_X \leqslant M_i e^{(\omega_i-\rho M_i(1+L))(t-\tau)}\|x\|_X. \tag{5.2.30}$$

Como

$$\begin{aligned}\|I_2(\epsilon)\|_X &\leqslant \rho M_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\left[\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|_X + \|\mathit{\Sigma}_2^{*,u}(s,x_2^+(s)) - \mathit{\Sigma}_1^{*,u}(s,x_1^+(s))\|_X\right]\mathrm{d}s\\ &\leqslant \rho M_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\left[(1+L)\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|_X + \|\mathit{\Sigma}_2^{*,u}(s,x_1^+(s)) - \mathit{\Sigma}_1^{*,u}(s,x_1^+(s))\|_X\right]\mathrm{d}s\\ &\leqslant \rho M_1(1+L)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|_X\,\mathrm{d}s + \frac{\rho M_1}{\omega_1}|\!|\!|\mathit{\Sigma}_2^{*,u} - \mathit{\Sigma}_1^{*,u}|\!|\!|,\end{aligned}$$

onde

$$|\!|\!|\mathit{\Sigma}_2^{*,u} - \mathit{\Sigma}_1^{*,u}|\!|\!| = \sup_{s\in\mathbb{R}}\sup_{x\in X}\|\mathit{\Sigma}_2^{*,u}(s,x) - \mathit{\Sigma}_1^{*,u}(s,x)\|_X. \tag{5.2.31}$$

Segue de (5.2.29) que

$$\begin{aligned}\|\mathit{\Sigma}_2^{*,u}(\tau,Q_2(\tau)x) - \mathit{\Sigma}_1^{*,u}(\tau,Q_1(\tau)x)\|_X &\leqslant o(1) + \tfrac{\rho M_1}{\omega_1}|\!|\!|\mathit{\Sigma}_2^{*,u} - \mathit{\Sigma}_1^{*,u}|\!|\!|\\ +\rho M_1(1+L) &\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|_X\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

A seguir temos que

$$
\begin{aligned}
\|x_2^+(t)-x_1^+(t)\|_X &\leqslant \big\|L_2(t,\tau)Q_2(\tau)x - L_1(t,\tau)Q_1(\tau)x\big\|_X \\
&+\Big\|\int_\tau^t [L_2(t,s)H_2(s,x_2^+(s),\Sigma_2^{*,u}(s,x_2^+(s))) - L_1(t,s)H_1(s,x_1^+(s),\Sigma_1^{*,u}(s,x_1^+(s)))]\,\mathrm{d}s\Big\|_X \\
&\leqslant \big\|L_2(t,\tau)Q_2(\tau)x - L_1(t,\tau)Q_1(\tau)x\big\|_X \\
&+\big\|\int_\tau^t [L_2(t,s)Q_2(s)-L_1(t,s)Q_1(s)]h_1(s,x_1^+(s),\Sigma_1^{*,u}(s,x_1^+(s)))\,\mathrm{d}s\big\|_X \\
&+\big\|\int_\tau^t L_2(t,s)Q_2(s)\left[h_2(s,x_1^+(s),\Sigma_1^{*,u}(s,x_1^+(s))) - h_1(s,x_1^+(s),\Sigma_1^{*,u}(s,x_1^+(s)))\right]\,\mathrm{d}s\big\|_X \\
&+\big\|\int_\tau^t L_2(t,s)Q_2(s)\left[h_2(s,x_2^+(s),\Sigma_2^{*,u}(s,x_2^+(s))) - h_2(s,x_1^+(s),\Sigma_1^{*,u}(s,x_1^+(s)))\right]\,\mathrm{d}s\big\|_X \\
&\leqslant o(1)+\rho M_2\int_t^\tau e^{\omega_2(t-s)}[(1+L)\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|_X+\|\Sigma_2^{*,u}(s,x_1^+(s))-\Sigma_1^{*,u}(s,x_1^+(s))\|_X]\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant o(1)+\frac{\rho M_2}{\omega_2}|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!| + \rho M_2(1+L)\int_t^\tau e^{\omega_2(t-s)}\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|_X\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

e, da desigualdade de Gronwall,

$$
\|x_2^+(t)-x_1^+(t)\|_X \leqslant \big(o(1)+\frac{\rho M_2}{\omega_2}|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!|\big)e^{(\omega_2-\rho M_2(1+L))(t-\tau)}. \tag{5.2.33}
$$

Substituindo (5.2.33) em (5.2.32) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|\Sigma_2^{*,u}(\tau,Q_2(\tau)x)-\Sigma_1^{*,u}(\tau,Q_1(\tau)x)\|_X &\leqslant o(1)+\frac{\rho M_1}{\omega_1}|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!| \\
&+\rho M_1(1+L)\int_{-\infty}^\tau e^{-(\omega_1+\omega_2-\rho M_2(1+L))(\tau-s)}\left[o(1)+\frac{\rho M_2}{\omega_2}|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!|\right]\mathrm{d}s \\
&\leqslant o(1)+\left[\frac{\rho M_1}{\omega_1}+\frac{\rho^2M_1M_2(1+L)}{\omega_2(\omega_1+\omega_2-\rho M_2(1+L))}\right]|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!| \\
&\leqslant o(1)+\left[\frac{\rho M_2}{\omega_2}+\frac{\rho^2M_1M_2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2-\rho M_2(1+L))}\right]|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!|.
\end{aligned} \tag{5.2.34}
$$

Segue de (5.2.28) que $\tilde\theta=\left[\frac{\rho M_2}{\omega_2}+\frac{\rho^2M_1M_2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2-\rho M_2(1+L))}\right]\leq\frac12$ e de (5.2.34) que

$$
|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!| \leqslant o(1)+\tilde\theta|\!|\!|\Sigma_2^{*,u}-\Sigma_1^{*,u}|\!|\!|, \tag{5.2.35}
$$

o que completa a prova. ∎

Capítulo 6

Processos de evolução discretos não-lineares e a propriedade do ponto de sela

Agora consideremos processos de evolução discretos não-lineares. Denotemos por $\mathcal{C}^r(X)$ o conjuntos das transformações não-lineares de X em X, que são r-vezes continuamente diferenciáveis ($\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}^0(X)$).

Definição 6.0.1 *Uma família $\{S_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{C}(X)$ é chamada de processo de evolução discreto se*

i) $S_{n,n} = I$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$,

ii) $S_{n,k}S_{k,m} = S_{n,m}$ *para todo* $n \geqslant k \geqslant m \in \mathbb{Z}$.

Se $\{S_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{C}^r(X)$, $r \in \mathbb{N}$ diremos que é um processo de evolução r-vezes continuamente diferenciável.

Definição 6.0.2 *Seja $\{S_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{C}^1(X)$ um processo de evolução continuamente diferenciável associado à $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma solução global de $\{S_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ e L_n a derivada de S_n em y_n. Dizemos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é hiperbólica se $\{L_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta.*

Agora consideremos a equção de evolução discreta

$$x_{n+1} = T_n x_n + f_n(x_n) \tag{6.0.1}$$

onde $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma seqüência de operadores lineares de X em X e $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma seqüência de aplicações não-lineares de X em X. É claro que dado $\xi \in X$ e $m \in \mathbb{Z}$, existe uma única seqüência $\{x_n : n \geqslant m\}$ que satisfaz $x_m = \xi$ w $x_{n+1} = T_n x_n + f_n(x_n)$, $n \geqslant m$. Em algumas situações podemos também obter a existência de uma seqüência $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ para (6.0.1).

Suponha que $f_n : X \to X$ é uma aplicação não-linear Lipschitz contínua tal que

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{\|f_n(x) - f_n(y)\|_X}{\|x-y\|_X} \leqslant \rho < \infty, \text{ e } \sup_{x\in X} \|f_n(x)\|_X \leqslant N < \infty, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Suponha que $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M, expoente ω e projeções $\{Q_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Suponha que existe uma seqüência de aplicações $\{\Sigma_n : Q_n X \to (I - Q_n)X)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{\|\Sigma_n(Q_n x) - \Sigma_n(Q_n y)\|_X}{\|x-y\|_X} \leqslant L < \infty, \text{ e } \sup_{x\in X} \|\Sigma_n(Q_n x)\|_X \leqslant N < \infty, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}..$$

Se $x_n^+ = Q_n x_n^+$, $n \in \mathbb{Z}$, é a solução da equação de evolução discreta

$$x_{n+1}^+ = T_n x_n^+ + H_n(x_n^+),$$

onde $H_n(x_n^+) = Q_{n+1} f_n(x_n^+ + \Sigma_n(x_n^+))$. Se $m > n$, é claro que

$$x_m^+ = T_{m,n} x_n^+ + \sum_{k=n}^{m-1} T_{m,k+1} H_k(x_k^+) \tag{6.0.2}$$

e como $T_{m,n} : Q_n X \to Q_m X$ é um isomorfismo, temos que (6.0.2) é equivalente à

$$x_n^+ = T_{n,m} x_m^+ - \sum_{k=n}^{m-1} T_{n,k+1} H_k(x_k^+). \tag{6.0.3}$$

Teorema 6.0.3 *Se*

$$\frac{\rho M(1 + L + M)e^{-\omega}}{1 - e^{-\omega}} < 1,$$

para cada $x \in X$ *e* $m \in \mathbb{Z}$ *existe uma única seqüência* $\{x_n^+ \in Q_n X : n \in \mathbb{Z}\}$ *que satisfaz* $x_m^+ = Q_m x$ *e* (6.0.2) *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Prova: A definição de $\{x_n^+ : n \geqslant m\}$ é clara de (6.0.2). Usaremos (6.0.3) para obter $\{x_n^+ : n < m\}$. Seja $\mathcal{Z} = \{\zeta = \{x_n\}_{-\infty \leqslant n \leqslant m} : x_m = Q_m x\}$ com a norma $\|\zeta\|_{\mathcal{Z}} = \sup_{-\infty \leqslant n \leqslant m} \|x_n\|_X$ e defina $\Psi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ por

$$(\Psi\zeta)_n = T_{n,m} Q_m x - \sum_{k=n}^{m-1} T_{n,k+1} H_k(Q_k x_k).$$

Mostremos que $\Psi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ é uma contração. Primeiramente notemos que

$$\|(\Psi\zeta)_n\|_X \leqslant M e^{-\omega(m-n)} \|x\| + MN \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)} \leqslant M \left(\|x\| + \frac{N(M+1)e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}} \right), \ n \leqslant m.$$

Portanto, $\Psi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$. Agora, se $\zeta, \tilde{\zeta} \in \mathcal{Z}$, então

$$\|(\Psi\zeta)_n - (\Psi\tilde{\zeta})_n\|_X \leqslant \rho(1+L+M)M \sum_{k=n}^{m-1} e^{-\omega(n-k-1)} \|x_k - \tilde{x}_k\|_X \leqslant \frac{\rho(1+L+M)Me^{-\omega}}{1-e^{-\omega}} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}}.$$

Isto prova que $\Psi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ é uma contração e portanto, tem um único ponto fixo. ∎

6.1 Existência de variedades instáveis como gráfico

Estamos prontos para estudar o comportamento das soluções de um processo de evolução discreto não-linear $\{S_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{C}(X)$ perto de uma solução global hiprbólica $\xi : \mathbb{Z} \to X$; isto é, as variedades instáveis e estáveis das soluções hiperbólicas.

Suponha que o processo de evolução discreto $\{S_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ dado por uma seqüência $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de operadores não-lineares onde cada $S_n \in \mathcal{C}(X)$ é uma perturbação não-linear de um operador linear limitado $T_n \in \mathcal{L}(X)$ por uma função continuamente diferenciável $f : \mathbb{Z} \times X \to X$; isto é $S_n = T_n + f(n, \cdot)$. Seja $\{T_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ o processo de evolução discreto associado à seqüência $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Portanto, se

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = T_n y_n + f(n, y_n), n \geqslant m \\ &y_m = x \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

então $y_n = S_{n,m}x$ e

$$S_{n,m}x = T_{n,m}x + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1} f(k, S_{k,m}x). \tag{6.1.2}$$

Suponha também que $\xi : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução global hiperbólica para $\{S_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$. Associado à ξ consideremos o processe evolução $\{L_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dada pela seqüência de operadores lineares limitados $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X)$ onde $L_n = T_n + D_x f(n, \xi_n)$. Portanto $\{\ell_n = L_{n,m}x : n \geqslant m\}$ é a solução de

$$\begin{aligned} &\ell_{n+1} = L_n\,\ell_n, \\ &\ell_m = x \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

e

$$L_{n,m} = T_{n,m} + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1} D_x f(k, \xi_k) L_{k,m} \tag{6.1.4}$$

Da hiperbolicidade de ξ temos que $\{L_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com alguma constante M e algum expoente $\omega > 0$.

Definição 6.1.1 *A variedade instável de uma solução hiperbólica* ξ *de* (6.1.2) *é o conjunto*

$$\begin{aligned} W^u(\xi) = \{\, (m,\zeta) \in \mathbb{Z} \times X :\ &\textit{existe uma solução para trás } \{x_n : n \leqslant m\},\ \textit{de } (6.1.2) \\ &\textit{satisfazendo } x_m = \zeta \textit{ é tal que } \lim_{n\to -\infty} \|x_n - \xi_n\|_X = 0\}. \end{aligned}$$

A variedade estável de uma solução hiperbólica $\xi(\cdot)$ *de* (6.1.2) *é o conjunto*

$$\begin{aligned} W^s(\xi) = \{\, (m,\zeta) \in \mathbb{Z} \times X :\ &\textit{a solução } \{x_n : n \geqslant m\} \textit{ de } (6.1.2) \\ &\textit{satisfazendo } x_m = \zeta \textit{ é tal que } \lim_{n\to +\infty} \|x_n - \xi_n\|_X = 0\}. \end{aligned}$$

Mostraremos que as variedades instável e estável de ξ são dadas por aplicações

$$\mathbb{Z} \times X \ni (n,x) \mapsto \varSigma^u(n, Q_n x) \in (I - Q_n)X$$

$$\mathbb{Z} \times X \ni (n,x) \mapsto \varSigma^s(n, (I - Q_n)x) \in Q_n X.$$

Os pontos da variedades instável serão os pontos da forma

$$(n, Q_n x + \varSigma^u(n, Q_n x)) \in \mathbb{Z} \times X \text{ com } (n,x) \in \mathbb{Z} \times X \text{ e } x \text{ pequeno,}$$

e os pontos na variedade estável serão os da forma

$$(n, (I - Q_n)x + \Sigma^s(n, (I - Q_n)x)) \in \mathbb{Z} \times X \text{ com } (n, x) \in \mathbb{Z} \times X \text{ e } x \text{ pequeno.}$$

Sabemos que, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma solução de (6.1.2) se, e somente se, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} + \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ onde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaz

$$x_n = L_{n,m}x_m + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}F(k, x_k). \tag{6.1.5}$$

onde $F(k, x) := f(k, x_k + \xi_k) - f(k, \xi_k) - D_x f(k, \xi_k)x_k$.

Logo, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma solução de (6.1.5) escrevemos $x_n^+ = Q_n x_n$ e $x_n^- = x_n - x_n^+$. Então temos

$$\begin{aligned} x_n^+ &= L_{n,m}x_m^+ + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}H(k, x_k^+, x_k^-) \\ x_n^- &= L_{n,m}x_m^- + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}G(k, x_k^+, x_k^-) \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

onde

$$H(n, x_n^+, x_n^-) = Q_{n+1}[f(n, x_n^+ + x_n^- + \xi_n) - f(n, \xi_n) - D_x f(n, \xi_n)(x_n^+ + x_n^-)],$$

$$G(n, x_n^+, x_n^-) = (I - Q_{n+1})[f(n, x_n^+ + x_n^- + \xi_n) - f(n, \xi_n) - D_x f(n, \xi_n)(x_n^+ + x_n^-)].$$

Como em $(n, 0, 0)$ as funções H e G são nulas com derivadas nulas (com respeito à x_n^+ e x_n^-), da diferenciabilidade contínua de H e G, uniforme com respeito à n, obtemos que dado $\rho > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_X = \|(x^+ + x^-)\|_X < \delta$ e $\|\tilde{x}\|_X = \|(\tilde{x}^+ + \tilde{x}^-)\|_X < \delta$, então

$$\begin{aligned} &\|H(n, x^+, x^-)\|_X \leqslant \rho, \\ &\|G(n, x^+, x^-)\|_X \leqslant \rho, \\ &\|H(n, x^+, x^-) - H(n, \tilde{x}^+, \tilde{x}^-)\|_X \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\|_X + \|x^- - \tilde{x}^-\|_X), \\ &\|G(n, x^+, x^-) - G(n, \tilde{x}^+, \tilde{x}^-)\|_X \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\|_X + \|x^- - \tilde{x}^-\|_X). \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Observação 6.1.2 *É possível estender H e G fora de uma bola de raio δ de tal maneira que as condições* (6.1.7) *valem para todo $x^+ \in X^+$, $x^- \in X^-$. De fato, dada uma função* *à valores em W Lipschitz contínua g na bola de raio δ contida em $X := V \times Z$, onde V, Z, W são espaços de Banach, defina $g_\delta : X \to W$*

$$g_\delta(v,z) = \begin{cases} g(v,z), & \|(v,z)\|_X \leqslant \delta \\ g\left(\dfrac{\delta\, v}{\|(v,z)\|_X}, \dfrac{\delta\, z}{\|(v,z)\|_X}\right), & \|(v,z)\|_X > \delta. \end{cases}$$

A extensão g_δ se torna globalmente Lipschitz e simultaneamente sua constante de Lipschitz é a constante de Lipschitz para g restrita à bola de raio δ.

A consideração acima sugere obtermos primeiramente o resultado sobre a existência de variedades instáveis e estáveis assumindo a hipótese que (6.1.7) são válidas para todo $z = (x^+, x^-) \in X$ com algum $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Também assumindo que (6.1.7) vale para todo $z = (x^+, x^-) \in X$, provaremos a continuidade das variedades instáveis e estáveis. Finalmente, concluiremos a existência e continuidade de variedades instáveis e estáveis locais para o caso quando H, G satisfazem (6.1.7) somente para $\|x\|_X = \|x^+ + x^-\|_X < \delta$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Logo, suponhamos também que H e G satisfazem (6.1.7) para todo $x_n^+ \in Q_n X$, $x_n^- \in (I - Q_n)X$ para um certo $\rho > 0$, que será definido abaixo via (6.1.9). Seja $W^u(n, 0, 0)$ a variedade instável da solução de equilíbrio $(0, 0)$ de (6.1.6). Mostraremos que existe uma função limitada Lipschitz contínua $\Sigma^{*,u}(n, \cdot) : Q_n X \to (I - Q_n)X$ tal que

$$W^u(n, 0, 0) = \{(n, x^+, x^-) : x^- = \Sigma^{*,u}(n, x^+),\ x^+ \in Q_n X\}.$$

Observação 6.1.3 *Observe que estamos procurando por uma função $\Sigma^{*,u}(n, \cdot)$ tal que, se $m \in \mathbb{Z}$ e $(\zeta, \Sigma^{*,u}(m, \zeta)) \in X$, então a solução de* (6.1.6) *tal que $x_m^+ = \zeta$, $x_m^- = \Sigma^{*,u}(m, \zeta)$ é tal que x_n está no gráfico de $\Sigma^{*,u}(n, \cdot)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Isto significa que $x_n^- = \Sigma^{*,u}(n, x_n^+)$ para todo n e logo* (6.1.6) *se torna*

$$\begin{aligned} x_n^+ &= L_{n,m} x_m^+ + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1} H(k, x_k^+, \Sigma^{*,u}(k, x_k^+)) \\ x_n^- &= L_{n,m} x_m^- + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1} G(k, x_k^+, \Sigma^{*,u}(k, x_k^+)) \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

Além disso, a solução (x_n^+, x_n^-) *deve tender a zero quando* $n \to -\infty$ *(em particular, deve permanecer limitada à medida que* $n \to -\infty$*). Como*

$$x_n^- = L_{n,m}(I - Q_m)x_m^- + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}(I - Q_k)G(k, x_k^+, \Sigma^{*,u}(k, x_k^+)),$$

fazendo $m \to -\infty$ *temos que*

$$x_n^- = \Sigma^{*,u}(n, x_n^+) = \sum_{-\infty}^{n-1} L_{n,k+1}(I - Q_k)G(k, x_k^+, \Sigma^{*,u}(k, x_k^+))$$

e, em particular,

$$\Sigma^{*,u}(m, \zeta) = \Sigma^{*,u}(m, x_m^+) = x_m^- = \sum_{-\infty}^{m-1} L_{m,k+1}(I - Q_k)G(k, x_k^+, \Sigma^{*,u}(k, x_k^+)).$$

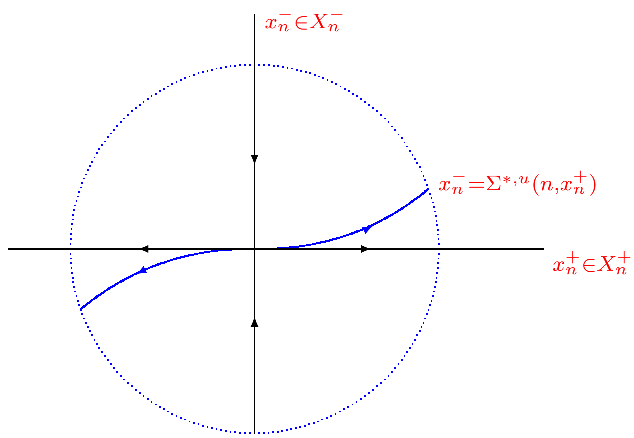


Figura 1

Antes de continuarmos com a prova de que a variedade instável é dada *localmente* como o gráfico de uma função Lipschitz contínua, vamos demonstrar as versões discretas das Desigualdades de Gronwall

<u>Lema</u> 6.1.4 (Lema de Gronwall - Upward) *Para* $m \in \mathbb{Z}$ *e* $t \in (0, \infty)$*, seja* $\mathbb{Z}_m^+ = \{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant m\}$ *e* $r, \psi : \mathbb{Z}_m^+ \to [0, \infty)$ *tal que*

$$\psi(k) \leqslant r(k) + t \sum_{j=m}^{k-1} \psi(j).$$

Então,

$$\psi(k) \leqslant r(k) + t\sum_{j=m}^{k-1} r(j)(1+t)^{k-j-1}.$$

Se r é não-decrescente, então

$$\psi(k) \leqslant r(k)(1+t)^{k-m}.$$

Prova: Defina $v(j) = \sum_{i=m}^{j-1}\psi(i)$. Então $v(j+1) - v(j) = \psi(j) \leqslant r(j) + tv(j)$. Portanto,

$$v(j+1) - (1+t)v(j) \leqslant r(j).$$

Multiplicando esta expressão por $(1+t)^{-j-1}$ obtemos que

$$(1+t)^{-j-1}v(j+1) - (1+t)^{-j}v(j) \leqslant r(j)(1+t)^{-j-1}.$$

Somando de $j = m$ até $j = k-1$ e notando que $v(m) = 0$ temos que

$$(1-t)^{-k}v(k) = \sum_{j=m}^{k-1} r(j)(1+t)^{-j-1}$$

e consequentemente

$$\psi(k) \leqslant r(k) + t\sum_{j=m}^{k-1} r(j)(1+t)^{k-j-1}.$$

O restante da prova é imediato. ∎

__Lema__ **6.1.5 (Lema de Gronwall - Downward)** *Para $m \in \mathbb{Z}$ e $q \in (0,1)$, seja $\mathbb{Z}_m^- = \{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant m\}$ e $p, \phi : \mathbb{Z}_m^- \to [0,\infty)$ tal que*

$$\phi(k) \leqslant p(k) + q\sum_{j=k}^{m-1} \phi(j).$$

Então,

$$\phi(k) \leqslant p(k) + q\sum_{j=k}^{m-1} p(j)(1-q)^{k-j-1}.$$

Se p é não-crescente, então

$$\phi(k) \leqslant p(k)(1-q)^{k-m}.$$

Prova: Defina $v(j) = \sum_{i=j}^{m-1} \phi(i)$. Então $v(j) - v(j+1) = \phi(j) \leqslant p(j) + qv(j)$. Portanto,

$$(1-q)v(j) - v(j+1) \leqslant p(j).$$

Multiplicando esta expressão por $(1-q)^{-j-1}$ obtemos que

$$(1-q)^{-j}v(j) - (1-q)^{-j-1}v(j+1) \leqslant p(j)(1-q)^{-j-1}.$$

Somando de $j = k$ até $j = m-1$ e notando que $v(m) = 0$ temos que

$$(1-q)^{-k}v(k) = \sum_{j=k}^{m-1} p(j)(1-q)^{-j-1}$$

e consequentemente

$$\phi(k) \leqslant p(k) + q\sum_{j=k}^{m-1} p(j)(1-q)^{k-j-1}.$$

O restante da prova é imediato. ∎

Para mostrarmos a existência de uma função $\Sigma^{*,u}(m,\cdot)$ usaremos o princípio da contração de Banach. Para isto fixe $D > 0$, $L > 0$, $0 < \vartheta < 1$ e escolha $\rho > 0$ tal que

$$0 < \nu := -\log(1-\rho M(1+L+M)e^{-\omega}) < \omega,\ 0 < \nu' := \log(1+\rho M(1+L+M)e^{\omega}) < \omega \quad (6.1.9)$$

$$0 < \gamma : -\log\left(1 - \rho M\left[e^{\omega-\nu} + \frac{\rho M(1+L+M)(1+M)}{1-e^{-(2\omega-\nu)}}\right]\right) < \omega.$$

$$\frac{\rho M(1+L+M)e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}} < 1,\ \frac{\rho M^2(1+L+M)e^{\nu}}{1-e^{-(\omega-\nu)}} \leqslant L,\ \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}} \leqslant D$$

$$\frac{\rho M}{1-e^{-\omega}}\left[1 + \frac{\rho M(1+L+M)}{1-e^{-(\omega-\nu)}}\right] \leqslant \vartheta < 1.$$

Definição 6.1.6 *Denote por $\mathcal{LB}(D,L)$ o espaço métrico completo de todas as funções contínuas $\mathbb{Z}\times X \to X$ definidas por $(m,x) \mapsto \Sigma(m, Q_m x) \in (I - Q_m)X$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} &\sup\{\|\Sigma(m,Q_m x)\|_X,\ (m,x) \in \mathbb{Z}\times X\} \leqslant D,\\ &\|\Sigma(m,Q_m x) - \Sigma(m,Q_m\tilde{x})\|_X \leqslant L\|Q_m x - Q_m \tilde{x}\|_X,\ \forall (m,x,\tilde{x}) \in \mathbb{Z}\times X\times X, \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

onde a distância de $\Sigma, \tilde{\Sigma} \in \mathcal{LB}(D,L)$ é definida por

$$|\!|\!|\Sigma(\cdot,\cdot) - \tilde{\Sigma}(\cdot,\cdot)|\!|\!| := \sup\{\|\Sigma(m,Q_m x) - \tilde{\Sigma}(m,Q_m x)\|_X,\ (m,x) \in \mathbb{Z}\times X\}.$$

Teorema 6.1.7 *Suponha que as condições acima estão satisfeitas. Então, existe* $\Sigma^{*,u}(m,\cdot) \in \mathcal{LB}(D,L)$*, tal que a variedade instável* $W^u(m,0,0)$ *de* (6.1.6) *é dada por*

$$W^u(0,0) = \{(m,w) \in \mathbb{Z} \times X : w = (Q_m w, \Sigma^{*,u}(m, Q_m w))\}. \tag{6.1.11}$$

Em adição, se $\{(x_n^+, x_n^-) : n \geqslant m_0\}$*, é uma solução de* (6.1.6)*, então*

$$\|x_n^- - \Sigma^{*,u}(n, x_n^+)\|_X \leqslant M e^{-(\omega-\gamma)(n-m_0)} \|x_{m_0}^- - \Sigma^{*,u}(m_0, x_{m_0}^+)\|_X, \quad n \geqslant m_0. \tag{6.1.12}$$

Prova: Dividiremos a demonstração em "existência de um gráfico na variedade instável" e "atração exponencial e a demonstração de que o gráfico é toda a variedade instável":

Existência de um gráfico na variedade instável

Para $m \in \mathbb{Z}$ e $\zeta \in Q_m X$, arbitrário $\Sigma \in \mathcal{LB}(D,L)$ denote por $x_n^+ = \psi(n,m,\zeta,\Sigma)$ a solução de

$$x_n^+ = L_{n,m} x_m^+ - \sum_{k=n}^{m-1} L_{n,k+1} H(k, x_k^+, \Sigma^{*,u}(k, x_k^+)),\ n < m,\ x_m^+ = \zeta \in Q_m X. \tag{6.1.13}$$

A seguir definimos, para $\Sigma \in \mathcal{LB}(D,L)$,

$$\Phi(\Sigma)(m,\zeta) = \sum_{-\infty}^{m-1} L_{m,k+1}(I - Q_k) G(k, x_k^+, \Sigma(k, x_k^+)),\ (m,\zeta) \in \mathbb{Z} \times Q_m X. \tag{6.1.14}$$

Mostraremos que, para $\rho > 0$ satisfazendo (6.1.9), a aplicação Φ leva $\mathcal{LB}(D,L)$ sobre si mesmo e é uma contração estrita, possuindo portanto um único ponto fixo em $\mathcal{LB}(D,L)$.

Notemos primeiramente que, como $\{L_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente ω, segue de (6.1.7), tem-se

$$\|\Phi(\Sigma)(m,\cdot)\|_X \leqslant \sum_{-\infty}^{m-1} \rho M e^{-\omega(m-k-1)} = \frac{\rho M}{1 - e^{-\omega}}, \tag{6.1.15}$$

e de (6.1.9) temos $\sup\{\|\Phi(\Sigma)(m, Q_m x)\|_X,\ (m,x) \in \mathbb{Z} \times X\} \leqslant D$.

A seguir, suponhamos que Σ e $\tilde{\Sigma}$ são funções satisfazendo (6.1.10), $\zeta, \tilde{\zeta} \in Q_m X$ e denotemos por $x_n^+ = \psi(n,m,\zeta,\Sigma)$, $\tilde{x}_n^+ = \psi(n,m,\tilde{\zeta},\tilde{\Sigma})$. Então

$$x_n^+ - \tilde{x}_n^+ = L_{n,m} Q_m(\zeta - \tilde{\zeta}) - \sum_{k=n}^{m-1} L_{n,k+1} Q_{k+1}[H(k, x_k^+, \Sigma(k, x_k^+)) - H(k, \tilde{x}_k^+, \tilde{\Sigma}(k, \tilde{x}_k^+))],$$

e com (4.1.2) e (6.1.7) obtemos

$$\begin{aligned}
&\|x_n^+ - \tilde{x}_n^+\|_X \leqslant M e^{\omega(n-m)}\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X \\
&+ M\sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)}\|H(k, x_k^+, \Sigma(k, x_k^+)) - H(k, \tilde{x}_k^+, \tilde{\Sigma}(k, \tilde{x}_k^+))\|_X \\
&\leqslant M e^{\omega(n-m)}\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)}\left(\|\Sigma(k, x_k^+) - \tilde{\Sigma}(k, \tilde{x}_k^+)\|_X + \|x_k^+ - \tilde{x}_k^+\|_X\right) \\
&\leqslant M e^{\omega(n-m)}\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)}\left(\|\Sigma(k, \tilde{x}_k^+) - \tilde{\Sigma}(k, \tilde{x}_k^+)\|_X + (1+L)\|x_k^+ - \tilde{x}_k^+\|_X\right) \\
&\leqslant M e^{\omega(n-m)}\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)}\left((1+L)\|x_k^+ - \tilde{x}_k^+\|_X + \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|\right) \\
&\leqslant M e^{\omega(n-m)}\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\| \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)} + \rho M(1+L)\sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)}\|x_k^+ - \tilde{x}_k^+\|_X.
\end{aligned}$$

Seja $\phi_n = e^{-\omega\,(n-m)}\|x_n^+ - \tilde{x}_n^+\|_X$. Então,

$$\phi_n \leqslant M\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(m-k-1)}\|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\| + \rho M(1+L)e^{-\omega}\sum_{k=n}^{m-1}\phi_k.$$

Pelo Lema de Gronwall - Downward

$$\begin{aligned}
&\|x_n^+ - \tilde{x}_n^+\|_X \\
&\leqslant [M\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X e^{\omega\,(n-m)} + \rho M \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)}\|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|](1 - \rho M(1+L)e^{-\omega})^{n-m} \qquad (6.1.16) \\
&\leqslant [M\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \frac{e^{-\omega}}{1 - e^{-\omega}}\|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|](1 - \rho M(1+L)e^{-\omega})^{n-m}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(\Sigma)(m, \zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(m, \tilde{\zeta})\|_X \\
&\qquad \leqslant M \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)}\|G(k, x_k^+, \Sigma(k, x_k^+)) - G(k, \tilde{x}_k^+, \tilde{\Sigma}(k, \tilde{x}_k^+))\|_X \\
&\qquad \leqslant \rho M \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)}\left(\|\Sigma(k, x_k^+) - \tilde{\Sigma}(k, \tilde{x}_k^+)\|_X + \|x_k^+ - \tilde{x}_k^+\|_X\right) \\
&\qquad \leqslant \rho M \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)}\left[(1+L)\|x_k^+ - \tilde{x}_k^+\|_X + \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|\right].
\end{aligned}$$

Notando que (6.1.9) implica $\nu < \omega$ e usando as estimativas para $\|x_n^+ - \tilde{x}_n^+\|_X$ obtemos

$$\|\Phi(\Sigma)(m,\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(m,\tilde{\zeta})\|_X \leqslant \rho M \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)} \Big[(1+L)\|x_k^+ - \tilde{x}_k^+\|_X + |\!|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!|\!|\Big]$$
$$\leqslant \rho M \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)} \Big[(1+L)[M\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \rho M \frac{e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}} |\!|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!|\!|] e^{\nu(m-k)} + |\!|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!|\!|\Big]$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\Sigma)(m,\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(m,\tilde{\zeta})\|_X \\ &\qquad \leqslant \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}} \left[1 + \frac{\rho M(1+L)e^{-(\omega-\nu)}}{1-e^{-(\omega-\nu)}}\right] |\!|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!|\!| + \frac{\rho M^2(1+L)e^{\nu}}{1-e^{-(\omega-\nu)}} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X \\ &\qquad \leqslant I_\Sigma |\!|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!|\!| + I_\zeta \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X. \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

onde

$$I_\Sigma = \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}} \left[1 + \frac{\rho M(1+L)e^{-(\omega-\nu)}}{1-e^{-(\omega-\nu)}}\right] \quad \text{e} \quad I_\zeta = \frac{\rho M^2(1+L)e^{\nu}}{1-e^{-(\omega-\nu)}}.$$

Como de (6.1.9) $I_\Sigma \leqslant \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}}(1 + Le^{-\omega}M) \leqslant \vartheta$ e $I_\zeta \leqslant L$ temos que

$$\|\Phi(\Sigma)(m,\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(m,\tilde{\zeta})\|_X \leqslant L\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_X + \vartheta |\!|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!|\!|. \tag{6.1.18}$$

A desigualdade (6.1.18) com $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ e (6.1.15) implicam que Φ leva $\mathcal{LB}(D,L)$ em $\mathcal{LB}(D,L)$. Além disso, a estimativa (6.1.18) com $\zeta = \tilde{\zeta}$ mostra que Φ é uma contração. Portanto, existe um único ponto fixo $\Sigma^{*,u} = \Phi(\Sigma^{*,u})$ in $\mathcal{LB}(D,L)$.

Atração exponencial e a demonstração de que a variedade instável é um gráfico

No que segue demonstraremos que existem constantes $M \geqslant 1$ e $\omega > \gamma > 0$ tais que, se $\{(x_n^+, x_n^-) : n \geqslant m_0\}$, é uma solução de (6.1.6), então

$$\|x_n^- - \Sigma^{*,u}(n, x_n^+)\|_X \leqslant M e^{-(\omega-\gamma)(n-m_0)} \|x_{m_0}^- - \Sigma^{*,u}(m_0, x_{m_0}^+)\|_X, \quad n \geqslant m_0. \tag{6.1.19}$$

Em particular, se (x_n^+, x_n^-), $n \in \mathbb{Z}$, é uma solução global de (6.1.6) limitada quando $n \to -\infty$, fazendo $m_0 \to -\infty$ em (6.1.19) obteremos que $x_n^- = \Sigma^{*,u}(n, x_n^+)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Isto mostra que qualquer solução para trá limitada deve ser uma gráfico de $\Sigma^{*,u}$. Disto segue também que $\Sigma^{*,u}(n,0) = 0$, pois $(0,0)$ é uam solução estacionáriia de (6.1.6).

Seja $\zeta_n = x_n^- - \Sigma^{*,u}(n, x_n^+)$ e $y_{k,n}^+$, $k \leqslant n$, uma solução de

$$y_k^+ = L_{k,n}x_n^+ - \sum_{j=k}^{n-1} L_{k,j+1}H(j, y_j^+, \Sigma^{*,u}(j, y_j^+)),\ k < n,\ y_{n,n}^+ = x_n^+.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|y_{k,n}^+ - x_k^+\|_X &= \left\|\sum_{j=k}^{n-1} L_{k,j+1}[H(j, y_{j,n}^+, \Sigma^{*,u}(j, y_{j,n}^+)) - H(j, x_j^+, x_j^-)]\right\|_X \\ &\leqslant \rho M \sum_{j=k}^{n-1} e^{\omega(k-j-1)} \left[(1+L)\|y_{j,n}^+ - x_j^+\|_X + \|\zeta_j\|_X\right].\end{aligned}$$

Se $\psi_k = e^{\omega(n-k)}\|y_{k,n}^+ - x_k^+\|_X$, então

$$\psi_k \leqslant \rho M \sum_{j=k}^{n-1} e^{\omega(n-j-1)}\|\zeta_j\|_X + \rho M(1+L)e^{-\omega}\sum_{j=k}^{n-1}\psi_j, \quad k \leqslant n.$$

Usando o Lema de Gronwall - Downward temos

$$\|y_{k,n}^+ - x_k^+\|_X \leqslant \rho M \sum_{j=k}^{n-1} e^{\omega(k-j-1)}\|\zeta_j\|_X\ e^{\nu(n-k)}, \quad k \leqslant n. \tag{6.1.20}$$

Se $k \leqslant m_0 \leqslant n$, então

$$\begin{aligned}\|y_{k,n}^+ - y_{k,m_0}^+\|_X &= \left\|L_{k,m_0}Q_{m_0}[y_{m_0,n}^+ - x_{m_0}^+]\right\|_X \\ &\quad + \left\|\sum_{j=k}^{m_0-1} L_{k,j+1}Q_j[H(j, y_{j,n}^+, \Sigma^{*,u}(j, y_{j,n}^+)) - H(j, y_{j,m_0}^+, \Sigma^{*,u}(j, y_{j,m_0}^+))]\right\|_X \\ &\leqslant \rho M^2 e^{\omega(k-m_0)} \sum_{j=m_0}^{n-1} e^{\omega(m_0-j-1)}\|\zeta_j\|_X\ e^{\nu(n-m_0)} \\ &\quad + \rho M(1+L)e^{-\omega}\sum_{j=k}^{m_0-1} e^{\omega(k-j)}\|y_{j,n}^+ - y_{j,m_0}^+\|_X.\end{aligned}$$

Portanto se $\phi_k = e^{-\omega k}\|y_{k,n}^+ - y_{k,m_0}^+\|_X$,

$$\phi_k \leqslant \rho M^2 \sum_{j=m_0}^{n-1} e^{-\omega(j+1)}\|\zeta_j\|_X\ e^{\nu(n-m_0)} + \rho M(1+L)e^{-\omega}\sum_{j=k}^{m_0-1}\phi_j.$$

e usando o Lema de Gronwall - Downward temos

$$\begin{aligned}\|y_{k,n}^+ - y_{k,m_0}^+\|_X &\leqslant \rho M^2 \sum_{j=m_0}^{n-1} e^{\omega(k-j-1)}\|\zeta_j\|_X\ e^{\nu(n-m_0)}e^{\nu(m_0-k)} \\ &\leqslant \rho M^2 \sum_{j=m_0}^{n-1} e^{\omega(n-j-1)}\|\zeta_j\|_X\ e^{-(\omega-\nu)(n-k)}.\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

Usaremos isto para estimar ζ_n. Note que

$$\begin{aligned}
&\zeta_n - L_{n,m_0}(I - Q_{m_0})\zeta_{m_0} \\
&\quad = x_n^- - \Sigma^{*,u}(n, x_n^+) - L_{n,m_0}(I - Q_{m_0})[x_{m_0}^- - \Sigma^{*,u}(m_0, x_{m_0}^+)] \\
&\quad = \sum_{k=m_0}^{n-1} L_{n,k+1}(I - Q_{k+1})G(k, x_k^+, x_k^-) - \Sigma^{*,u}(n, x_n^+) + L_{n,m_0}(I - Q_{m_0})\Sigma^{*,u}(m_0, x_{m_0}^+) \\
&\quad = \sum_{k=m_0}^{n-1} L_{n,k+1}(I - Q_{k+1})[G(k, x_k^+, x_k^-) - G(k, y_{k,n}^+, \Sigma^{*,u}(k, y_{k,n}^+))] \\
&\quad - \sum_{-\infty}^{m_0-1} L_{n,k+1}(I - Q_{k+1})[G(k, y_{k,n}^+, \Sigma^{*,u}(k, y_{k,n}^+)) - G(k, y_{k,m_0}^+, \Sigma^{*,u}(k, y_{k,m_0}^+))].
\end{aligned}$$

Logo, usando (6.1.20) e (6.1.21), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\zeta_n - L_{n,m_0}(I - Q_{m_0})\zeta_{m_0}\|_X \\
&\quad \leqslant \rho M \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)} \left[\|x_k^+ - y_{k,n}^+\|_X + \|x_k^- - \Sigma^{*,u}(k, y_{k,n}^+)\|_X\right] \\
&\quad + \rho M(1+L) \sum_{-\infty}^{m_0-1} e^{-\omega(n-k-1)} \|y_{k,n}^+ - y_{k,m_0}^+\|_X \\
&\quad \leqslant \rho M \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)} \left[(1+L)\|x_k^+ - y_{k,n}^+\|_X + \|x_k^- - \Sigma^{*,u}(k, x_k^+)\|_X\right] \\
&\quad + \rho M(1+L) \sum_{-\infty}^{m_0-1} e^{-\omega(n-k-1)} \|y_{k,n}^+ - y_{k,m_0}^+\|_X \\
&\quad \leqslant \rho M \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)} \|\zeta_k\|_X + \rho^2 M^2 (1+L) e^{\nu} \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)} \sum_{j=k}^{n-1} e^{\omega(k-j-1)} \|\zeta_j\|_X \; e^{\nu(n-k-1)} \\
&\quad + \rho^2 M^3 (1+L) e^{-(\omega-\nu)} \sum_{-\infty}^{m_0-1} e^{-\omega(n-k-1)} \sum_{j=m_0}^{n-1} e^{\omega(n-j-1)} \|\zeta_j\|_X \; e^{-(\omega-\nu)(n-k-1)} \\
&\quad \leqslant \rho M \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)} \|\zeta_k\|_X + \rho^2 M^2 (1+L) e^{\nu} \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-(\omega-\nu)(n-k-1)} \sum_{j=k}^{n-1} e^{\omega(k-j-1)} \|\zeta_j\|_X \\
&\quad + \rho^2 M^3 (1+L) e^{\nu} \sum_{-\infty}^{m_0-1} e^{-(\omega-\nu)(n-k-1)} \sum_{j=m_0}^{n-1} e^{\omega(k-j-1)} \|\zeta_j\|_X
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \rho M \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)}\|\zeta_k\|_X \\
&+ \rho^2 M^2(1+L)e^{-(\omega-\nu)} \sum_{j=m_0}^{n-1} \|\zeta_j\|_X e^{-(\omega-\nu)(n-j-1)} \sum_{k=m_0}^{j} e^{(\omega-\nu)(k-j)} e^{\omega(k-j)} \\
&+ \rho^2 M^3(1+L)e^{-(\omega-\nu)} \sum_{j=m_0}^{n-1} \|\zeta_j\|_X e^{-(\omega-\nu)(n-j-1)} \sum_{k=-\infty}^{m_0-1} e^{(\omega-\nu)(k-j)} e^{\omega(k-j)} \\
&\leqslant \rho M \sum_{k=m_0}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)}\|\zeta_k\|_X + \rho^2 M^2(1+L)(1+M)\frac{e^{-(\omega-\nu)}}{1-e^{-(2\omega-\nu)}} \sum_{k=m_0}^{n-1} \|\zeta_k\|_X e^{-(\omega-\nu)(n-k-1)} \\
&\leqslant \rho M \left[1 + \rho M(1+L)(1+M)\frac{e^{-(\omega-\nu)}}{1-e^{-(2\omega-\nu)}}\right] \sum_{k=m_0}^{n-1} \|\zeta_k\|_X e^{-(\omega-\nu)(n-k-1)},
\end{aligned}
$$

e portanto, se $\phi_n := e^{(\omega-\nu)(n-m_0)}\|\zeta_n\|_X$, $n \geqslant m_0$,

$$
\phi_n \leqslant M\|\zeta_{m_0}\|_X e^{-\nu(n-m_0)} + \rho M \left[e^{\omega-\nu} + \frac{\rho M(1+L)(1+M)}{1-e^{-(2\omega-\nu)}}\right] \sum_{k=m_0}^{n-1} \phi_k.
$$

Devido ao Lema de Gronwall - Downward temos que

$$
\|\zeta_n\|_X \leqslant M\|\zeta_{m_0}\|_X \, e^{-(\omega-\gamma)(n-m_0)}, \tag{6.1.22}
$$

onde γ é dado em (6.1.9) e $0 < \gamma < \omega$.

Isto prova (6.1.19) e consequentemente

$$
W^u(0,0) \subset \{(m,w) \in \mathbb{Z} \times X : w = (Q_m w, \Sigma^{*,u}(m, Q_m w))\}.
$$

Mostremos agora que $\{(m,w) \in \mathbb{Z} \times X : w = (Q_m w, \Sigma^{*,u}(m, Q_m w))\} \subset W^u(0,0)$. Consideremos $x_1^+ \in \mathcal{Q}_m X$ e a solução x_n^{+*}, $n \leqslant m$ do problema

$$
x_n^+ = L_{n,m}x_m^+ - \sum_{k=n}^{m-1} L_{n,k+1}H(k, x_k^+, \Sigma^{*,u}(k, x_k^+)), \quad x_m^+ = x_1^+.
$$

Isto define uma curva $(x_n^{+*}, \Sigma^{*,u}(n, x_n^{+*}))$, $n \leqslant m$. Relembrando (6.1.14) podemos verificar que

$$
\Sigma^{*,u}(n, x_n^{+*}) = \sum_{-\infty}^{n-1} L_{n,k+1}(I - Q_{k+1})G(k, x_k^{+*}, \Sigma^{*,u}(k, x_k^{+*}), \quad n \leqslant m.
$$

Logo $\Sigma^{*,u}(n,x_n^{+*})$ resolve

$$x_n^- = L_{n,k}x_k^- + \sum_{j=k}^{n-1} L_{n,j+1}G(j,x_j^{+*},\Sigma^{*,u}(j,x_j^{+*})),\ k \leqslant n \leqslant m,$$

e concluímos que $(x_n^{+*},\Sigma^{*,u}(n,x_n^{+*}))$, $n \leqslant m$, é uma solução de (6.1.6), passando por $(x_1^+,\Sigma^{*,u}(m,x_1^+))$ no instante m, com $\Sigma^{*,u}(n,x_n^{+*}) \to 0$ quando $n \to -\infty$. Como $\Sigma^{*,u}(n,0) = 0$, o raciocínio que nos leva à equação (6.1.16) pode ser usado para garantir que

$$\|x_n^+\|_X \leqslant M\|x_m^+\|_X e^{(\omega-\nu)(n-m)}.$$

Como conseqüência $x_n^{+*} \to 0$ quando $n \to -\infty$ e a demonstração está completa. ■

6.1.1 A variedade instável local como um gráfico

Nesta seção usaremos os resultados da Seção 6.1 para obtermos a existência e continuidade das variedades instáveis locais para o caso em que h é somente uma função compacta continuamente diferenciável.

Seja $F : \mathbb{Z} \times X \to X$ uma função continuamente diferenciável que satisfaz $F(0) = 0$ e $F'(0) = 0 \in \mathcal{L}(X)$. Suponha que $\{L_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$que tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente ω. Considere o problema de valor inicial (6.1.5).

Proposição 6.1.8 *Suponha que as condições acima estão satisfeitas. Então, existem vizinhança V de $x = 0$ em X e função $\Sigma^* : \mathbb{Z}\times X \to X$, tal que a variedade instável local $W^u_{\mathrm{loc}}(0)$ é dada por*

$$W^u_{\mathrm{loc}}(n,0) = W^u(n,0) \cap V = \{x \in V : x = (Q_n x, \Sigma^{*,u}(n,Q_n x))\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Em adição, se $\{(x_n^+,x_n^-) : n \geqslant m_0\}$, $(x_{m_0}^+,x_{m_0}^-) \in V$ é uma solução de (6.1.6), então

$$\|x_n^- - \Sigma^{*,u}(n,x_n^+)\|_X \leqslant Me^{-(\omega-\gamma)(n-m_0)}\|x_{m_0}^- - \Sigma^{*,u}(m_0,x_{m_0}^+)\|_X, \quad n \geqslant m_0, \qquad (6.1.23)$$

enquanto $(x_n^+,x_n^-) \in V$.

Prova: De acordo com a Observação 6.1.2 e a Proposição 6.1.7, precisamos garantir somente que, dado $\delta > 0$ existe $0 < \delta' \leqslant \delta$ tal que qualquer solução (x_n^+, x_n^-) na variedade instável que satisfaz $\|x_m^+\|_X + \|x_m^-\|_X < \delta'$ satisfaz $\|x_n^+\|_X + \|x_n^-\|_X < \delta$, para todo $n \leqslant m$. Isto segue facilmente do fato de que x_n^+ é solução de

$$x_n^+ = L_{n,m} x_m^+ + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1} H(k, x_k^+, \varSigma^{*,u}(n, x_n^+)), \quad n \leqslant m,$$

e como anteriormente

$$\|x_n^+\|_X \leqslant M \|x_m^+\|_X e^{(\omega-\nu)(n-m)} \tag{6.1.24}$$

e

$$\|x_n^-\|_X = \|\varSigma^*(x_n^+)\|_X \leqslant ML \|x_m^+\|_X e^{(\omega-\nu)(n-m)}.$$

A demonstração segue agora facilmente. ■

6.2 Existência de variedades estáveis como gráfico

Assumimos novamente que h é tal que H e G satisfazem (6.1.7) para todo $x_n^+ \in Q_n X$, $x_n^- \in (I - Q_n)X$ para um certo $\rho > 0$, que satisfaz (6.1.9). Seja $W^s(n, 0, 0)$ a variedade estável da solução de equilíbrio $(0, 0)$ de (6.1.6). Numa maneira similar a da seção anterior, mostraremos que existe uma função limitada e Lipschitz contínua $\varSigma^{*,s}(n, \cdot) : (I - Q_n)X \to Q_n X$ tal que

$$W^s(n, 0, 0) = \{(n, x^+, x^-) : x^+ = \varSigma^{*,s}(n, x^-),\ x^- \in (I - Q_n)X\}.$$

Observação 6.2.1 *Neste caso estamos procurando por uma função $\varSigma^{*,s}(n, \cdot)$ com a propriedade de que, se $m \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in Q_m X$ e $(\varSigma^{*,s}(m, \zeta), \zeta) \in X$, então a solução $\{x_n\}_{n \geqslant m}$ de (6.1.6) com $x_m^+ = \varSigma^{*,s}(m, \zeta)$, $x_m^- = \zeta$, é tal que x_n é o gráfico de $\varSigma^{*,s}(n, \cdot)$ para todo $n \leqslant m$. Isto significa que $x_n^+ = \varSigma^{*,s}(n, x_n^-)$ para todo $n \geqslant m$. Além disso, a solução (x_n^+, x_n^-) deve tender à zero à medida em que $n \to +\infty$ (em particular, deve permanecer* *limitada enquanto $n \to +\infty$). Como, para $n \leqslant \ell$,*

$$x_n^+ = L_{n,\ell} Q_\ell x_\ell^+ - \sum_{k=n}^{\ell-1} L_{n,k+1} Q_k H(k, \Sigma^{*,s}(x_k^-), x_k^-),$$

fazendo $\ell \to +\infty$ temos que

$$x_n^+ = \Sigma^{*,s}(n, x_n^-) = -\sum_{k=n}^{+\infty} L_{n,k+1} Q_k H(k, \Sigma^{*,s}(k, x_k^-), x_k^-)$$

.

Fix $D > 0$, $L > 0$, $0 < \vartheta < 1$ e choose $\rho > 0$ such that (6.1.9) be satisfied

Definição 6.2.2 *Dado $\eta > 0$, denote por $\mathcal{LB}^s(D,L)$ o espaço métrico completo de todas as funções limitadas e globalmente Lipschitz contínuas $\mathbb{Z} \times X \to X$ definidas por $(m,x) \mapsto \Sigma(m,(I-Q_m)x) \in Q_m X$ satisfazendo, para todo $(m,x,\tilde{x}) \in \mathbb{Z} \times X \times X$,*

$$\begin{aligned} &\sup\{\|\Sigma(m,(I-Q_m)x)\|_X,\ (m,x) \in \mathbb{Z} \times X\} \leqslant D, \\ &\|\Sigma(m,(I-Q_m)x) - \Sigma(m,(I-Q_m)\tilde{x})\|_X \leqslant L\|(I-Q_m)(x-\tilde{x})\|_X, \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

onde a distância entre Σ e $\tilde{\Sigma}$ em $\mathcal{LB}^s(D,L)$ é definida como

$$|\!|\!|\Sigma(\cdot,\cdot) - \tilde{\Sigma}(\cdot,\cdot)|\!|\!| := \sup\{\|\Sigma(m,(I-Q_m)x) - \tilde{\Sigma}(m,(I-Q_m x))\|_X,\ (m,x) \in \mathbb{Z} \times X\}.$$

Teorema 6.2.3 *Suponha que as condições acima estão satisfeitas. Então, existe $\Sigma^{*,s}(m,\cdot) \in \mathcal{LB}^s(D,L)$, tal que a variedade estável $W^s(m,0,0)$ de (6.1.6) é dada por*

$$W^s(0,0) = \{(m,w) \in \mathbb{Z} \times X : w = (\Sigma^{*,s}(m,(I-Q_m)w), (I-Q_m)w)\}. \tag{6.2.2}$$

Prova: Para $m \in \mathbb{Z}$ e $\zeta \in (I-Q_m)X$ arbitrário, $\Sigma \in \mathcal{L}B^s(D,L)$ denote por $x_n^- = \psi(n,m,\zeta,\Sigma)$ a solução de

$$x_n^- = L_{n,m}\zeta + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1} G(k, \Sigma^{*,s}(k,x^-), x^-),\ n > m, \quad x_n^- = \zeta \in (I-Q_m)X. \tag{6.2.3}$$

A seguir definimos, para $\Sigma \in \mathcal{L}B^s(D,L)$,

$$\Phi(\Sigma)(m,\zeta) = -\sum_{m}^{+\infty} L_{m,k+1} Q_k H(k, \Sigma(k,x_k^-), x_k^-),\ (m,\zeta) \in \mathbb{Z} \times Q_m X. \tag{6.2.4}$$

Seguindo o mesmo raciocínio do Teoremo 6.1.7, para $\rho > 0$ satisfazendo (6.1.9), pode ser provado que a aplicação Φ leva $\mathcal{LB}^s(D,L)$ sobre si mesmo e é uma contração estrita, possuindo assim um único ponto fico em $\mathcal{LB}^s(D,L)$.

Notemos primeiramente que, por (6.1.7), temos

$$\|\Phi(\varSigma)(m,\cdot)\|_X \leqslant \rho M \sum_{m}^{+\infty} e^{\omega(m-k-1)} = \frac{\rho M e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}}, \tag{6.2.5}$$

e de (6.1.9) temos $\sup\{\|\Phi(\varSigma)(m,(I-Q_m)x)\|_X,\ (m,x)\in\mathbb{Z}\times X\} \leqslant D$.

A seguir, suponhamos que $\varSigma$ e $\tilde{\varSigma}$ são funções satisfazendo (6.1.10), ζ, $\tilde{\zeta} \in (I-Q_m)X$ e denotemos $x_n^- = \psi(n,m,\zeta,\varSigma)$, $\tilde{x}_n^- = \psi(n,m,\tilde{\zeta},\tilde{\varSigma})$. Então

$$\begin{aligned} x_n^- - \tilde{x}_n^- &= L_{n,m}(I-Q_m)(\zeta-\tilde{\zeta}) \\ &\quad + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}(I-Q_k)[G(k,\varSigma(k,x_k^-),x_k^-) - G(k,\tilde{\varSigma}(k,\tilde{x}_k^-),\tilde{x}_k^-)], \end{aligned}$$

para o qual podemos provar que

$$\|x_n^- - \tilde{x}_n^-\|_X \leqslant M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X e^{-\omega\,(n-m)} + \rho M \sum_{m}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)}[(1+L)\|x_k^- - \tilde{x}_k^-\| + \|\!|\Sigma - \tilde{\Sigma}|\!\|].$$

e consequentemente $\phi_n = e^{\omega\,(n-m)}\|x_n^- - \tilde{x}_n^-\|_X$

$$\phi_n \leqslant \rho M \sum_{m}^{n-1} e^{-\omega(m-k-1)} \|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!\| + M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X + \rho M(1+L)e^{\omega}\sum_{m}^{n-1}\phi_k.$$

e pelo Lema de Gronwall - Upward, se $\nu' = \log(1+\rho M(1+L)e^{\omega})$,

$$\phi_n \leqslant \left(\rho M \sum_{m}^{n-1} e^{-\omega(m-k-1)} \|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!\| + M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X\right) e^{\nu'(n-m)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|x_n^- - \tilde{x}_n^-\|_X &\leqslant \left[M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X e^{-\omega\,(n-m)} + \rho M \sum_{m}^{n-1} e^{-\omega(n-k-1)} \|\!|\varSigma-\tilde{\varSigma}|\!\|\right] e^{\nu'(n-m)} \\ &\leqslant \left[M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X + \tfrac{\rho M}{1-e^{-\omega}}\|\!|\varSigma-\tilde{\varSigma}|\!\|\right] e^{\nu'(n-m)}. \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Logo, chegamos em

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\varSigma)(m,\zeta) - \Phi(\tilde{\varSigma})(m,\tilde{\zeta})\|_X \\ &\qquad \leqslant \frac{\rho M e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}}\left[1 + \frac{\rho M(1+L)}{1-e^{-(\omega-\nu')}}\right] \|\!|\varSigma-\tilde{\varSigma}|\!\| + \frac{\rho M^2(1+L)e^{-\omega}}{1-e^{-(\omega-\nu')}}\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X. \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Seja

$$I_\Sigma = \frac{\rho M e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}}\left[1+\frac{\rho M(1+L)}{1-e^{-(\omega-\nu')}}\right] \quad \text{e} \quad I_\zeta = \frac{\rho M^2(1+L)e^{-\omega}}{1-e^{-(\omega-\nu')}}.$$

Segue de (6.1.9), (6.2.7) que $I_\Sigma \leqslant \vartheta$, $I_\zeta \leqslant L$ e

$$\|\Phi(\Sigma)(m,\zeta)-\Phi(m,\tilde{\Sigma})(\tilde{\zeta})\|_X \leqslant L\|\zeta-\tilde{\zeta}\|_X + \vartheta|\!|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!|\!|. \tag{6.2.8}$$

De (6.2.5) e de (6.2.8) com $\Sigma=\tilde{\Sigma}$ temos que Φ leva $\mathcal{LB}^s(D,L)$ sobre si mesmo. De (6.1.9) e (6.2.8) com $\zeta=\tilde{\zeta}$ concluímos que Φ é uma contração. Portanto Φ tem um único ponto fixo $\Sigma^{*,s}=\Phi(\Sigma^{*,s})$ em $\mathcal{LB}^s(D,L)$.

Agora, se (x_n^-,x_n^+), $n\in\mathbb{Z}_m^+$ $m\in\mathbb{Z}$, é uma solução de (6.1.6) que é limitada quando $n\to+\infty$, então pode ser provado que existem constantes $M\geqslant 1$ e $\gamma>0$ tais que

$$\|x_n^+-\Sigma^{*,s}(n,x_n^-)\|_X \leqslant Me^{\gamma(n-m_0)}\|x_{m_0}^+-\Sigma^{*,s}(m_0,x_{m_0}^-)\|_X, \quad m_0\geqslant n. \tag{6.2.9}$$

Fazendo $m_0\to+\infty$ em (6.1.19) obtemos que $x_n^+=\Sigma^{*,s}(n,x_n^-)$ para cada $n\in\mathbb{Z}$. Isto também garante que $\Sigma^{*,s}(n,0)=0$, pois $(0,0)$ é uma solução estacionária de (6.1.6).

Mostremos agora que $\{(m,w)\in\mathbb{Z}\times X : w=(\Sigma^{*,u}(m,(I-Q_m)w),(I-Q_m)w)\}\subset W^u(0,0)$. Consideremos $x_0^-\in(I-Q_m)X$ e a solução $x_n^{-,*}$ do problema de valor inicial

$$x_n^-=L_{n,m}x_0^-+\sum_{m}^{n-1}L_{n,k+1}G(k,\Sigma^{*,s}(k,x_k^-),x_k^-),\ n>m, \quad x_m^-=x_0^-.$$

Isto define uma curva $(\Sigma^{*,s}(n,x_n^{-,*}),x_n^{-,*})$, $n\geqslant m$. Relembrando (6.2.4) podemos verificar que $\Sigma^{*,s}(n,x_n^{-,*}) = \sum_{m}^{+\infty}L_{n,k+1}Q_kH(k,\Sigma^{*,s}(k,x_k^{-,*},x_k^{-,*})ds$, $n\geqslant m$. Logo $\Sigma^{*,s}(n,x_n^{-,*})$ resolve

$$x_n^+=L_{n,m}x_m^+ + \sum_{m}^{n-1}L_{n,k+1}H(k,\Sigma^{*,s}(k,x_k^{-,*}),x_k^{-,*}),\ n\geqslant m,$$

e concluímos que $(\Sigma^{*,s}(n,x_n^{-,*}),x_n^{-,*})$, $n\geqslant m$, é uam solução de (6.1.6), passando por $(\Sigma^{*,s}(m,x_0^-),x_0^-)$ no instante m, com $\Sigma^{*,s}(n,x_n^{-,*})\to 0$ quando $n\to\infty$. Como $\Sigma^{*,s}(n,0)=0$, o racioncínio que nos leva à (6.2.6) pode ser usado para garantir que

$$\|x_n^-\|_X \leqslant M\|x_0^-\|_X e^{-(\omega-\nu')(n-m)}.$$

Como conseqüência $x_n^{-,*}\to 0$ quando $n\to+\infty$. ∎

6.2.1 A variedade estável local como um gráfico

Nesta sação usaremos os resultados da Seção 6.2 para obter a existência e a continuidade das variedades estáveis locais para o caso no qual h é somente uma função compacta continuamente diferenciável.

Seja $F : \mathbb{Z} \times X \to X$ uma função continuamente diferenciável que satisfaz $F(0) = 0$ e $F'(0) = 0 \in \mathcal{L}(X)$. Suponha que $\{L_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ é um processo de evollução discreto linear que tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente ω. Considere o problema de valor inicial (6.1.5).

Proposição 6.2.4 *Suponha que as condições acima estão satisfeitas. Então, existem vizinhança V de $x = 0$ em X e função $\Sigma^* : \mathbb{Z} \times X \to X$, tais que a variedade estável local $W^s_{\text{loc}}(0)$ é dada por*

$$W^s_{\text{loc}}(n,0) = W^s(n,0) \cap V = \{x \in V : x = (\Sigma^{*,s}(n,(I - Q_n)x),(I - Q_n)x)\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Prova: De acordo com a Observação 6.2.1 e o Teorema 6.2.3, precisamos somente garantir que, dado $\delta > 0$ existe $0 < \delta' \leqslant \delta$ tal que qualquer solução (x_n^+, x_n^-) na variedade estável que satisfaz $\|x_m^+\|_X + \|x_m^-\|_X < \delta'$ satisfaz $\|x_n^+\|_X + \|x_n^-\|_X < \delta$, para todo $n \geqslant m$. Isto é facilmente visto, pois x_n^+ é solução de

$$x_n^- = L_{n,m}\zeta + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1} G(k, \Sigma^{*,s}(k,x^-), x^-)ds,\ n > m, \quad x_m^- \in (I - Q_m)X.$$

como anteriormente

$$\|x_n^-\|_X \leqslant M\|x_m^-\|_X e^{-(\omega-\nu')(n-m)} \tag{6.2.10}$$

e

$$\|x_n^+\|_X = \|\Sigma^{*,s}(n,x_n^-)\|_X \leqslant ML\|x_m^-\|_X e^{-(\omega-\nu)(n-m)}.$$

A prova agora segue facilmente. ■

6.3 Soluções globais hiperbólicas

Seja $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$, $\{f(n,\cdot) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{C}^1(X)$. Se $S_n = T_n + f(n,\cdot)$ e $S_{n,m} = S_{n-1} \circ \cdots \circ S_m$ e $T_{n,m} = T_{n-1} \circ \cdots \circ T_m$, então $\{S_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ é o processo de evolução discreto semilinear obtido como uma perturbação não-linear de um processo de evolução discreto linear $\{T_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ por uma função continuamente diferenciável $f : \mathbb{Z} \times X \to X$; isto é

$$S_{n,m}x = T_{n,m}x + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}\, f(k, S_{k,m}x). \tag{6.3.1}$$

Se $x_n = S_{n,m}x$, $n \geqslant m$, então

$$x_{n+1} = T_n x_n + f(n, x_n). \tag{6.3.2}$$

Suponha também que $\xi : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução global de $\{S_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$. Associado à ξ consideremos o processo de evolução discreto linear $\{L_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_{n,m} = T_{n,m} + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}\, D_x f(k, \xi_k)\, L(k,m). \tag{6.3.3}$$

Se $\ell_n := L_{n,m}x$, $n \geqslant m$, então

$$\ell_{n+1} = (T_n + D_x f(n, \xi_n))\ell_n. \tag{6.3.4}$$

Definição 6.3.1 *Dizemos que $\xi : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução global hiperbólica para o processo de evolução discreto semilinear $\{S_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ se é limitada e o processo de evolução discreto linear $\{L_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta.*

No que segue caracterizaremos as soluções globais hiperbólicas para o processo de evolução discreto semilinear $\{S_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$.

Suponha que $\xi : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução global hiperbólica $\{S_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$; isto é, suponha que o processo de evolução linear $\{L_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ dado por (6.3.3) tem dicotomia exponencial discreta com alguma constante M e algum expoente ω.

Se $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\xi_n\|_X < K < \infty$, suponha que

$$\sup_{\|x\|\leqslant K} \|f(n,x)\|_X + \|D_x f(n,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty, \tag{6.3.5}$$

e que

$$\rho(\delta) := \sup_{\|x\|\leqslant \delta} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|f(n,\xi_n + x) - f(n,\xi_n) - D_x f(n,\xi_n)x\|_X}{\|x\|_X} \xrightarrow{\delta\to 0} 0. \tag{6.3.6}$$

Seja $\phi : \mathbb{Z} \to X$ uma solução limitada de

$$x_{n+1} = T_n x_n + f(n, x_n).$$

Então

$$\phi_n = T_{n,m}\phi_m + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}\, f(k,\phi_k)$$

ou

$$\phi_n = L_{n,m}\phi_m + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}\, [f(k,\phi_k) - D_x f(k,\xi_k)\phi_k]. \tag{6.3.7}$$

É claro do Teorema 4.1.4 que

$$\phi_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G^f_{n,k+1}\, [f(k,\phi_k) - D_x f(k,\xi_k)\phi_k]$$

onde

$$\begin{cases} G^f_{n,k} = L_{n,k}(I - Q_k),\ n \geqslant k, \\ G^f_{n,k} = L_{n,k} Q_k,\ n < k. \end{cases} \tag{6.3.8}$$

Com esta caracterização de soluções globais limitadas, não pe difícil ver que $\xi : \mathbb{Z} \to X$ é isolada no conjunto $C_b(\mathbb{Z}, X)$ das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{Z}$ em X. De fato, se $\phi : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução limitada de (6.3.1) satisfazendo $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\phi_n - \xi_n\|_X \leqslant \delta$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\phi_n - \xi_n\|_X \leqslant M\frac{1+e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}}\rho(\delta) \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\phi_n - \xi_n\|_X.$$

Fazendo δ suficientemente pequeno concluímos que $\phi_n = \xi_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

6.3.1 Perturbação de soluções globais hiperbólicas

Sejam $\{f(n,\cdot) : n \in \mathbb{Z}\}$, $\{g(n,\cdot) : n \in \mathbb{Z}\}$ famílias em $\mathcal{C}^1(X)$ satisfazendo (6.3.6) e (6.3.5), $\{T_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ um processo de evolução discreto linear e considere o processo de evolução discreto não-linear

$$S^f_{n,m}x = T_{n,m}x + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}\, f(k, S^f_{k,m}x), \quad \forall n \geqslant m,\ \forall x \in X \tag{6.3.9}$$

e

$$S^g_{n,m}x = T_{n,m}x + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}\, g(k, S^g_{k,m}x), \quad \forall n \geqslant m,\ \forall x \in X. \tag{6.3.10}$$

Suponha que $\xi : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução global hiperbólica para $\{S^f_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$. Portanto, o processo linear dado por

$$L^f_{n,m} = T_{n,m} + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}\, D_x f(k,\xi_k)\, L^f_{k,m}.$$

tem dicotomia exponencial discreta com alguma constante M e algum expoente $\omega > 0$. Seja $T_n := T_{n+1,n}$ e $L^f_n := L^f_{n+1,n} = T_n + D_x f(n,\xi_n)$. Então,

$$\xi_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G^f_{n,k+1}\,[f(k,\xi_k) - D_x f(k,\xi_k)\xi_k]. \tag{6.3.11}$$

onde $G^f_{n,m} \in \mathcal{L}(X)$ é dado por (6.3.8).

Teorema 6.3.2 *Suponha que f, g satisfaz* (6.3.5) *e* (6.3.6). *Escolha $\delta > 0$ tal que*

$$M\frac{1+e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}}\rho(\delta)\delta < \frac{\delta}{2}. \tag{6.3.12}$$

Se f, g também satisfazem

$$\sup_{\|x\|\leqslant K} \|f(n,x) - g(n,x)\|_X + \|D_x f(n,x) - D_x g(n,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \delta\frac{1-e^{-\omega}}{4M(1+e^{-\omega})}. \tag{6.3.13}$$

então, $\{S^g_{n,m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ tem uma única solução global hiperbólica $\eta : \mathbb{Z} \to X$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\xi_n - \eta_n\|_X < \delta.$$

Prova: Se $y : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução limitada de (6.3.10), então

$$\begin{aligned} y_n &= L^f_{n,m} y_m + \sum_{m}^{n-1} L^f_{n,k+1} \left[g(k, y_k) - D_x f(k, \xi_k) y_k\right] \\ \xi_n &= L^f_{n,m} \xi_m + \sum_{m}^{n-1} L^f_{n,k+1} \left[f(k, \xi_k) - D_x f(k, \xi_k) \xi_k\right] \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

e, se definirmos $\phi_k = y_n - \xi_n$, $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\phi_k = L^f_{n,m} \phi_m + \sum_{m}^{n-1} L^f_{n,k+1} \, \tilde{g}(k, \phi_k). \tag{6.3.15}$$

onde $\tilde{g}(n, \phi_n) = g(n, \phi_k + \xi_n) - f(n, \xi_n) - D_x f(n, \xi_n) \phi_k$. Isto implica que uma solução global limitada de (6.3.10) existe em uma vizinhança pequena de $x = 0$ se, e somente se,

$$\mathcal{T}(\phi)_n = -\sum_{n}^{\infty} L^f_{n,k+1} Q_{k+1} \, \tilde{g}(k, \phi_k) + \sum_{-\infty}^{n-1} L^f_{n,k+1} (I - Q_{k+1}) \, \tilde{g}(k, \phi_k)$$

tem um ponto fixo no conjunto

$$B_\delta := \{\phi : \mathbb{Z} \to X : \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\phi_k\|_X \leqslant \delta\}$$

com δ suficientemente pequeno. Como conseqüência da dicotomia exponencial discreta de $\{L^f_{n,m} : n \geqslant m\}$ e do Princípio da Contração de Banach obtemos que existe uma única solução global limitada de (6.3.10) em B_δ. De fato, de (6.3.6), (6.3.12) e (6.3.13), temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\phi)_n\|_X &\leqslant M \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|n-k|} \|\tilde{g}(k, \phi_k)\|_X \\ &\leqslant M \frac{1 + e^{-\omega}}{1 - e^{-\omega}} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g(n, y_n) - f(n, y_n)\|_X \\ &+ M \frac{1 + e^{-\omega}}{1 - e^{-\omega}} \sup_{\|x\| \leqslant \delta} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|f(n, \xi_n + x) - f(n, \xi_n) - D_x f(n, \xi_n) x\|_X}{\|x\|_X} \delta \\ &\leqslant \frac{\delta}{2} + M \frac{1 + e^{-\omega}}{1 - e^{-\omega}} \rho(\delta) \delta < \delta. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathcal{T}$ leva B_δ em si mesmo.

Usando (6.3.13) n]ao é difícil ver que, para δ suficientemente pequeno,

$$\|\mathcal{T}(\phi)_n - \mathcal{T}(\psi)_n\|_X \leqslant \frac{1}{2} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\phi_n - \psi_n\|_X.$$

Isto mostra que existe uma única solução global limitado $\eta : \mathbb{Z} \to X$ de (6.3.10) em B_δ.

Seja $L_n^g = T_n + D_x g(n, \eta_n)$. Como $\eta : \mathbb{Z} \to X$ é uniformemente próximo de $\xi : \mathbb{Z} \to X$, segue de (6.3.13) e do Teorema 4.1.8 que, para δ suficientemente pequeno,

$$L^g_{n,m} = T_{n,m} + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k}\, D_x g(k, \eta_k)\, L^g_{k,m}$$

tem dicotomia exponencial discreta e consequentemente η é hiperbólica. ∎

6.4 Perturbação das variedades instável e estável

Nesta seção provaremos a continuidade das variedades instáveis relativamente à perturbações regulares. Antes disso, consideremos primeiramente a continuidade das projeções. Seja $\{T^{(1)}_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução linear que tem dicotomia exponencial discreta com constante M, expoente $\omega > 0$ e projeções $\{Q^{(1)}_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Se $\{B_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ é uma família de operadores tal que $\mathbb{Z} \ni n \mapsto B_n x$ é contínua para cada $x \in X$ definimos o processo $\{T^{(2)}_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ por

$$T^{(2)}_{n,m} = T^{(1)}_{n,m} + \sum_{k=m}^{n-1} T^{(1)}_{n,k+1} B_k T^{(2)}_{k,m}, \tag{6.4.1}$$

isto é, $\{T^{(2)}_{n,m} : n \geqslant m\}$ é o processo de evolução linear dado pela equção

$$y_{n+1} = (T^{(1)}_n + B_n) y_n.$$

Usando o Teorema 4.1.8, dado $M_1 > M$ e $\omega_1 < \omega$ existe um $\epsilon > 0$ tal que, se

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|B_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon.$$

então $\{T^{(2)}_{n,m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_1, expoente w_1 e projeções $\{Q^{(2)}_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Relembremos que, do Teorema 4.1.9 temos que

Lema 6.4.1 *Seja* $\{Q_n^{(i)} : n \in \mathbb{Z}\}$ *a projeção associada à dicotomia exponencial discreta de* $\{T_{n,m}^{(i)} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$, $i = 1, 2$. *Então temos que,*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|Q_k^{(1)} - Q_k^{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M_1^2}{1-e^{-\omega_1}} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|B_k\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{6.4.2}$$

Para $i = 1, 2$, consideremos os problemas

$$S_{n,m}^{(i)} x = T_{n,m}^{(i)} x + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}^{(i)} f_k^{(i)}(S_{k,m}^{(i)} x). \tag{6.4.3}$$

Suponha também que $\xi_i : \mathbb{Z} \to X$ é uma solução global de $\{S_{n,m}^{(i)} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$. Associada à ξ_i consideremos o processo de evolução linear $\{L_{n,m}^{(i)} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_{n,m}^{(i)} = T_{n,m}^{(i)} + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}^{(i)} D_x f_k^{(i)}(\xi_k) L_{k,m}. \tag{6.4.4}$$

Suponha que $\{L_{n,m}^{(1)} : n \geqslant m\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante $M_1 > 0$ e expoente $\omega_1 > 0$. Dados $M_2 > M_1$ e $0 < \omega_2 < \omega_1$ escolha ϵ tal que, se

$$\sup_{x\in X} \|f_n^{(1)}(x) - f_n^{(2)}(x)\|_X + \|D_x f_n^{(1)}(x) - D_x f_n^{(2)}(x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon, \tag{6.4.5}$$

então $\{L_{n,m}^{(2)} : n \geqslant m\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_2 e ω_2. Portanto $\{L_{n,m}^{(i)} : n \geqslant m\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_i, expoente $\omega_i > 0$ e projeções $\{Q_n^{(i)} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Sabemos que, $y_n^{(i)}$ é uma solução de (6.4.3) se, e somente se, $y_n^{(i)} = x_n^{(i)} + \xi_n^{(i)}$ onde $x_n^{(i)}$ satisfaz

$$x_n^{(i)} = L_{n,m}^{(i)} x_m + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}^{(i)} [f_k^{(i)}(x_k^{(i)} + \xi_k^{(i)}) - f_k^{(i)}(\xi_k^{(i)}) - D_x f_k^{(i)}(\xi_k^{(i)}) x_k^{(i)}]. \tag{6.4.6}$$

Podemos decompor uma solução $x_n^{(i)}$ de (6.4.6) como $x_n^{+,i} = Q_n^{(i)}(x_n^{(i)})$ e $x_n^{-,i} = (I - Q_n^{(i)})(x_n^{(i)})$. Então

$$\begin{aligned} x_n^{+,i} &= L_{n,m}^{(i)} x_m^{+,i} + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}^{(i)} H_k(x_k^{+,i}, x_k^{-,i}) \\ x_n^{-,i} &= L_{n,m}^{(i)} x_m^{-,i} + \sum_{m}^{n-1} L_{n,k+1}^{(i)} G_k(x_k^{+,i}, x_k^{-,i}) \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

onde

$$h_n^{(i)}(x_n^{i,+}+x_n^{i,-}+\xi_n^{(i)}) = f_n^{(i)}(x_n^{i,+}+x_n^{i,-}+\xi_n^{(i)}) - f_n^{(i)}(\xi_n^{(i)}) - D_x f_n^{(i)}(\xi_n^{(i)})(x_n^{i,+}+x_n^{i,-})$$

$$H_n^{(i)}(x_n^{i,+},x_n^{i,-}) = Q_n^{(i)} h_n^{(i)}(x_n^{i,+}+x_n^{i,-}+\xi_n^{(i)}),$$

$$G_n^{(i)}(x_n^{i,+},x_n^{i,-}) = (I-Q_n^{(i)}) h_n^{(i)}(x_n^{i,+}+x_n^{i,-}+\xi_n^{(i)}).$$

Seja $D>0$, $L>0$, $0<j<1$, $\rho>0$ satisfazendo (6.1.9) e suponha (6.1.7) para todo $x_n^{i,+}\in Q_n^{(i)}X$ e $x_n^{i,-}\in (I-Q_n^{(i)})X$.

Teorema 6.4.2 *Para $i=1,2$, suponha que as condições acima estão satisfeitas e* (6.1.9) *vale, logo existe uma função $\Sigma_i^{*,u}: X_i^+ \to X_i^-$, tal que a variedade instável $W_i^u(0,0)$ da solução de equilíbrio $(0,0)$ de* (6.4.7) *é dada por*

$$W_i^u(0,0) = \{(m,w)\in\mathbb{Z}\times X : w = (Q_m^{(i)}w, \Sigma_i^{*,u}(m, Q_m^{(i)}w))\};$$

também, para qualquer $\zeta\in X_i^+$,

$$\Sigma_i^{*,u}(m,\zeta) = \sum_{-\infty}^{m-1} L_{m,k+1}^{(i)}(I-Q_{k+1}^{(i)}) G_k^{(i)}(x_k^{+,i}, \Sigma_i^{*,u}(k, x_k^{+,i})).$$

Ainda mais, se $\{(x_n^{+,i},x_n^{-,i}) : n\geqslant m_0\}$, $(x_{m_0}^{+,i},x_{m_0}^{-,i})\in V$ é uma solução de (6.1.6), *então*

$$\|x_n^{-,i} - \Sigma_i^{*,u}(n,x_n^{+,i})\|_X \leqslant Me^{-(\omega-\gamma)(n-m_0)}\|x_{m_0}^{-,i} - \Sigma_i^{*,u}(m_0,x_{m_0}^{+,i})\|_X, \quad n\geqslant m_0. \quad (6.4.8)$$

Se em adição

$$\left[\frac{\rho M}{1-e^{-\omega}} + \frac{\rho^2 M^2(1+L)}{1-e^{-(2\omega-\nu)}}\right] \leqslant \frac{1}{2}$$

então, para qualquer $r>0$,

$$\sup_{n\leqslant m} \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\leqslant r}} \left\{\|Q_n^{(2)}x - Q_n^{(1)}x\|_X + \|\Sigma_2^{*,u}(n,Q_n^{(2)}x) - \Sigma_1^{*,u}(Q_n^{(1)}x)\|_X\right\} \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Prova: Note que precisamos mostrar somente que

$$\sup_{n\leqslant m} \sup_{\substack{x\in X^+\\ \|x\|_X\leqslant r}} \|\Sigma_2^{*,u}(n,Q_n^{(2)}x) - \Sigma_1^{*,u}(Q_n^{(1)}x)\|_X \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Se $x \in Q_m^{(1)} X$ com $\|x\|_X \leqslant r$, então

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_2^{*,u}(m, Q_m^{(2)} x) - \Sigma_1^{*,u}(Q_m^{(1)} x) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{m-1} [T_{n,k+1}^{(2)}(I - Q_{k+1}^{(2)}) - T_{n,k+1}^{(1)}(I - Q_{k+1}^{(1)})] h_k^{(2)}(x_k^{+,2}, \Sigma_2^{*,u}(k, x_k^{+,2})) \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{m-1} T_{n,k+1}^{(1)}(I - Q_{k+1}^{(1)}) [h_k^{(2)}(x_k^{+,2}, \Sigma_2^{*,u}(k, x_k^{+,2})) - h_k^{(2)}(x_k^{+,1}, \Sigma_1^{*,u}(x_k^{+,1}))] \qquad (6.4.9) \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{m-1} T_{n,k+1}^{(1)}(I - Q_{k+1}^{(1)}) [h_k^{(2)}(x_k^{+,1}, \Sigma_1^{*,u}(x_k^{+,1})) - h_k^{(1)}(x_k^{+,1}, \Sigma_1^{*,u}(x_k^{+,1}))] \\
&=: I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) + I_3(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Relembrando que $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|Q_k^{(1)} - Q_k^{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M^2}{1-e^{-(\omega_1+\omega)}} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|B_k\|_{\mathcal{L}(X)}$ e que

$$T_{n,m}^{(2)}(I - Q_m^{(2)}) - T_{n,m}^{(1)}(I - Q_m^{(2)}) = \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1}^{(1)} B_k T_{k,m}^{(2)}(I - Q_m^{(2)})$$

temos

$$\|T_{n,m}^{(2)}(I - Q_m^{(2)}) - T_{n,m}^{(1)}(I - Q_m^{(2)})\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \epsilon \sum_{k=m}^{n-1} \|T_{n,k+1}^{(1)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T_{k,m}^{(2)}(I - Q_m^{(2)})\|_{\mathcal{L}(X)}$$

e $I_1(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Além disso, $I_3(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ de (6.4.5).

A seguir, vamos estimar $I_2(\epsilon)$. Lembremos que

$$x_n^+ = T_{n,m}^{(2)} Q_m^{(2)} x + \sum_{m}^{n-1} T_{n,k+1}^{(2)} Q_k^{(2)} h_k(x_k^+, \Sigma_2^{*,u}(k, x_k^+)),$$

do qual analogamente ao caso de (6.1.16) conseguimos

$$\|x_n^+\|_X \leqslant M e^{(\omega-\nu)(n-m)} \|Q_m^{(2)} x\|_X. \qquad (6.4.10)$$

Quando $\epsilon = 0$ podemos ainda assumir, sem perda de generalidade, que $M = 1$.

Como

$$
\begin{aligned}
\|I_3(\epsilon)\|_X &\leqslant \rho M \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)} \left[\|x_k^+ - x_k^{+,0}\|_X + \|\Sigma_2^{*,u}(k, x_k^+) - \Sigma_1^{*,u}(x_k^{+,0})\|_X\right] \\
&\leqslant \rho M \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)} \left[(1+L)\|x_k^+ - x_k^{+,0}\|_X + \|\Sigma_2^{*,u}(k, Q_k^{(2)} x_k^{+,0}) - \Sigma_1^{*,u}(x_k^{+,0})\|_X\right] \\
&\leqslant \rho M (1+L) \sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)} \|x_k^+ - x_k^{+,0}\|_X + \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}} \|\!|\Sigma_2^{*,u} - \Sigma_1^{*,u}\|\!|_r,
\end{aligned}
$$

onde

$$\|\varSigma_2^{*,u} - \varSigma_1^{*,u}\|_r = \sup_{k\leqslant m} \sup_{\substack{x_k^{+,0}\in X_0^+ \\ \|x_k^{+,0}\|_X\leqslant r}} \|\varSigma_2^{*,u}(k, Q_k^{(2)} x_k^{+,0}) - \varSigma_1^{*,u}(x_k^{+,0})\|_X. \tag{6.4.11}$$

Substituindo isto em (6.4.9) temos

$$\begin{aligned} \left\|\varSigma_2^{*,u}(m, Q_m^{(2)} x) - \varSigma_1^{*,u}(Q_m^{(1)} x)\right\|_X &\leqslant o(1) + \tfrac{\rho M}{1-e^{-\omega}} \|\varSigma_2^{*,u} - \varSigma_1^{*,u}\|_r \\ +\rho M(1+L) &\sum_{-\infty}^{m-1} e^{-\omega(m-k-1)} \|x_k^+ - x_k^{+,0}\|_X. \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

Temos também

$$\begin{aligned} &\|x_n^+ - x_n^{+,0}\|_X \leqslant \left\|T_{n,m}^{(2)} Q_m^{(2)} z - T_{n,m}^{(1)} Q_m^{(1)} z\right\|_X \\ &+\Big\| \sum_m^{n-1} [T_{n,k+1}^{(2)} Q_k^{(2)} h_k(x_k^+, \varSigma_2^{*,u}(k, x_k^+)) - T_{n,k+1}^{(1)} Q_k^{(1)} h_k(x_k^{+,0}, \varSigma_1^{*,u}(x_k^{+,0}))]\Big\|_X \\ &\leqslant \left\|T_{n,m}^{(2)} Q_m^{(2)} z - T_{n,m}^{(1)} Q_m^{(1)} z\right\|_X \\ &+ \Big\|\sum_m^{n-1} [T_{n,k+1}^{(2)} Q_k^{(2)} - T_{n,k+1}^{(1)} Q_k^{(1)}] h_k(x_k^{+,0}, \varSigma_1^{*,u}(x_k^{+,0}))\Big\|_X \\ &+\Big\| \sum_m^{n-1} T_{n,k+1}^{(2)} Q_k^{(2)} \left[h_k(x_k^{+,0}, \varSigma_1^{*,u}(x_k^{+,0})) - h_k(x_k^{+,0}, \varSigma_1^{*,u}(x_k^{+,0}))\right]\Big\|_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+\Big\| \sum_m^{n-1} T_{n,k+1}^{(2)} Q_k^{(2)} \left[h_k(x_k^+, \varSigma_2^{*,u}(k, x_k^+)) - h_k(x_k^{+,0}, \varSigma_1^{*,u}(x_k^{+,0}))\right]\Big\|_X \\ &\leqslant o(1) + \rho M \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)} [(1+L)\|x_k^+ - z_k^{+,0}\|_X + \|\varSigma_2^{*,u}(k, Q_k^{(2)} x_k^{+,0}) - \varSigma_1^{*,u}(x_k^{+,0})\|_X] \\ &\leqslant o(1) + \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}} \|\varSigma_2^{*,u} - \varSigma_1^{*,u}\|_r + \rho M(1+L) \sum_{k=n}^{m-1} e^{\omega(n-k-1)} \|x_k^+ - z_k^{+,0}\|_X \end{aligned}$$

e, de desigualdade de Gronwall,

$$\|x_n^+ - x_n^{+,0}\|_X \leqslant \big(o(1) + \frac{\rho M}{\omega} \|\varSigma_2^{*,u} - \varSigma_1^{*,u}\|_r\big) e^{(\omega-\nu)(n-m)}. \tag{6.4.13}$$

Aplicando (6.4.13) em (6.4.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\varSigma_2^{*,u}(m,Q_m^{(2)}z)-\varSigma_1^{*,u}(Q_m^{(1)}z)\|_X &\leqslant o(1)+\frac{\rho M}{1-e^{-\omega}}\|\!|\varSigma_2^{*,u}-\varSigma_1^{*,u}\|\!|_r \\
&+\rho M(1+L)\sum_{-\infty}^{m}e^{-(2\omega-\nu)(m-k)}\left[o(1)+\frac{\rho M}{1-e^{-\omega}}\|\!|\varSigma_2^{*,u}-\varSigma_1^{*,u}\|\!|_r\right] \\
&\leqslant o(1)+\left[\frac{\rho M}{1-e^{-\omega}}+\frac{\rho^2M^2(1+L)}{1-e^{-(2\omega-\nu)}}\right]\|\!|\varSigma_2^{*,u}-\varSigma_1^{*,u}\|\!|_r \\
&=: o(1)+\frac{1}{2}\|\!|\varSigma_2^{*,u}-\varSigma_1^{*,u}\|\!|_r.
\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

Segue de (6.4.14) que

$$\|\!|\varSigma_2^{*,u}-\varSigma_1^{*,u}\|\!|_r \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0 \tag{6.4.15}$$

e a demonstração está completa. ∎

Capítulo 7

Hiperbolicidade e continuidade de atratores

7.1 Semigrupos lineares e dicotomia exponencial discreta

Dado $T \in \mathcal{L}(X)$ definimos um processo de evolução linear da seguinte maneira

$$T_{n,m} = T^{n-m} \text{ para } n > m \text{ e } T_{n,n} = I.$$

Definição 7.1.1 *Dizemos que $x = 0$ é hiperbólico se $\{T_{n,m} := T^{n-m}, n \geqslant m,\ n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta; isto é, existem constantes $M > 0$ e $\omega > 0$ e projeção $Q \in \mathcal{L}(X)$ tais que*

i) $TQ = QT$,

ii) $T : R(Q) \to R(Q)$ *é um isomorfismo com inversa* $T^{-1} : R(Q) \to R(Q)$,

iii) As seguintes estimativas valem

$$\begin{aligned} &\|T^n(I-Q)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\omega n}, \quad n \geqslant 0, \\ &\|T^nQ\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega n}, \quad n < 0. \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Note que, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M, expoente $\omega > 0$ e projeção Q, então $QT^n = T^nQ$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, definimos

$$G_{n,m} = \begin{cases} T^{n-m}(I-Q), & n \geqslant m \\ -T^{n-m}Q, & n < m. \end{cases} \tag{7.1.2}$$

E é fácil ver que

- $\|G_{n,m}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\omega|n-m|}$ para todo $n \geqslant m \in \mathbb{Z}$.

Lema 7.1.2 *Suponha que $T \in \mathcal{L}(X)$. Se $x_{n+1} = Tx_n + y_n$, para $n > m \in \mathbb{Z}$, temos que*

$$x_n = T^{n-m}x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T^{n-k-1}y_k$$

Teorema 7.1.3 *Se $\{T^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma seqüência limitada em X, então existe uma única solução limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de*

$$x_{n+1} = Tx_n + y_n \tag{7.1.3}$$

e esta solução é dada por

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}y_k. \tag{7.1.4}$$

Teorema 7.1.4 *Se $T \in \mathcal{L}(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes*

i) $\{T^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta

ii) Para cada seqüência limitada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ em X, existe uma única solução limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $x_{n+1} = Tx_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Corolário 7.1.5 *Se $\{T^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta, então a projeção associada Q é unicamente determinada.*

Teorema 7.1.6 *Suponha que $\{T^{n-m} : (n,m) \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente $\omega > 0$. Dado $M_1 > M$ e $0 < \omega_1 < \omega$, existe $\epsilon > 0$ (dependendo somente de M, M_1, ω e ω_1) tal que, qualquer família $\{S^{n-m} : (n,m) \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{L}(X)$ com $\|T-S\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$, tem dicotomia exponencial discreta com constante M_1 e expoente ω_1.*

Teorema 7.1.7 *Suponha que* $\{T_{(k)}^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ *tem dicotomia exponencial discreta com projação* $Q_{(k)}$*, constante* M *e expoente* ω *para* $k = 1, 2$*. Se* $\|T_{(1)} - T_{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \epsilon$*, então*

$$\|Q_{(1)} - Q_{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M^2}{1 - e^{-\omega}}\,\epsilon.$$

7.2 Variedades instáveis de equilíbrios hiperbólicos

Definição 7.2.1 *Seja* $S \in C(X)$*,* x^* *um ponto fixo de* S*. Se* S *for diferenciável em* x^* *e* $L = S'(x^*)$*, diremos que* x^* *é hiperbólico se* $\{L^n : n \in \mathbb{Z}\}$ *tem dicotomia exponencial discreta.*

Agora consideremos a equação de evolução discreta

$$x_{n+1} = Tx_n + f(x_n) \tag{7.2.1}$$

onde $T \in \mathcal{L}(X)$ e f é uma aplicação não-linear de X em X.

7.2.1 Existência de variedades instáveis como um gráfico

Agora estamos prontos para estudar o comportamento de soluções de um semigrupo nã-linear $\{S^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(X)$ próximo a um equilíbrio hiperbólico x^*; isto é, as variedades instável e estável do equilíbrio hiperbólico.

Suponha que o operador não-linear $S \in \mathcal{C}(X)$ é uma perturbação não-linear de um operador linear limitado $T \in \mathcal{L}(X)$ por uma função continuamente diferenciável $f : X \to X$; isto é $S = T + f(\cdot)$. Seja $\{T^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ um semigrupo linear associado à T. Portanto, se

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = Ty_n + f(y_n), n \geqslant m \\ &y_m = x \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

então $y_n = S^{n-m}x$ e

$$S^{n-m}x = T^{n-m}x + \sum_{m}^{n-1} T^{n-k-1} f(S^{k-m}x). \tag{7.2.3}$$

Suponha também que x^* é um equilíbrio hiperbólico para $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$. Associado à x^* consideremos o semigrupo linear $\{L^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por um operador linear limitado $L \in \mathcal{L}(X)$ onde $L = T + D_x f(x^*)$. Portanto,

$$L^{n-m} = T^{n-m} + \sum_{m}^{n-1} T^{n-k-1} D_x f(x^*) L^{k-m}. \tag{7.2.4}$$

Como estamos assumindo que x^* é hiperbólico, $\{L^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com alguma constante M e algum expoente $\omega > 0$.

Definição 7.2.2 *A variedade instável de um equilíbrio hiperbólico x^* de (7.2.3) é o conjunto*

$$W^u(x^*) = \{\, \zeta \in X : \text{ existe uma solução para trás } \{x_n : n \leqslant 0\}, \text{ de } (7.2.3)$$
$$\text{satisfazendo } x_0 = \zeta \text{ e tal que } \lim_{n \to -\infty} \|x_n - x^*\|_X = 0\}.$$

A variedade estável de um equilíbrio hiperbólico x^* de (7.2.3) é o conjunto

$$W^s(x^*) = \{\, \zeta \in X : \text{ a solução } \{x_n : n \geqslant 0\} \text{ de } (7.2.3)$$
$$\text{satisfazendo } x_0 = \zeta \text{ é tal que } \lim_{n \to +\infty} \|x_n - x^*\|_X = 0\}.$$

Sabemos que, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma solução de (7.2.3) se, e somente se, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{x_n + x^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ onde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaz

$$x_n = L^{n-m} x_m + \sum_{m}^{n-1} L^{n-k-1} F(x_k). \tag{7.2.5}$$

onde $F(x) := f(x + x^*) - f(x^*) - D_x f(x^*) x$.

Logo, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma solução de (7.2.5) escrevemos $x_n^+ = Q x_n$ e $x_n^- = x_n - x_n^+$. Então temos

$$\begin{aligned} x_n^+ &= L^{n-m} x_m^+ + \sum_{m}^{n-1} L^{n-k-1} H(x_k^+, x_k^-) \\ x_n^- &= L^{n-m} x_m^- + \sum_{m}^{n-1} L^{n-k-1} G(x_k^+, x_k^-) \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

onde

$$H(x_n^+, x_n^-) = QF(x_n^+ + x_n^-) \ \text{ e } \ G(x_n^+, x_n^-) = (I - Q)F(x_n^+ + x_n^-).$$

Como em $(0,0)$ as funções H e G são nulas com derivadas nulas (com respeito a x_n^+ e x_n^-), da diferenciabilidade contínua de H e G, uniforme com respeito a n, obtemos que dado $\rho > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_X = \|(x^+ + x^-)\|_X < \delta$ e $\|\tilde{x}\|_X = \|(\tilde{x}^+ + \tilde{x}^-)\|_X < \delta$, então

$$\begin{aligned}
&\|H(x^+, x^-)\|_X \leqslant \rho, \\
&\|G(x^+, x^-)\|_X \leqslant \rho, \\
&\|H(x^+, x^-) - H(\tilde{x}^+, \tilde{x}^-)\|_X \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\|_X + \|x^- - \tilde{x}^-\|_X), \\
&\|G(x^+, x^-) - G(\tilde{x}^+, \tilde{x}^-)\|_X \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\|_X + \|x^- - \tilde{x}^-\|_X).
\end{aligned} \tag{7.2.7}$$

Observação 7.2.3 *Como mencionado na Observação 6.1.2, é possível estender H e G fora de uma bola de raio δ de tal maneira que as condições* (7.2.7) *são válidas para todo $v \in X^+$, $z \in X^-$.*

As considerações acima sugerem obter primeiramente o resultado relacionado à existência das variedades instáveis e estáveis sobre as hipóteses de que (7.2.7) valem para todo $z = (x^+, x^-) \in X$ com algum $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Também assumido que (7.2.7) valem para todo $z = (x^+, x^-) \in X$, provaremos a continuidade das variedades instáveis e estáveis. Finalmente, concluiremos a existência das variedades instável e estável locais para o caso em que H, G satisfazem (7.2.7) somente para $\|x\|_X = \|x^+ + x^-\|_X < \delta$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Logo, suponhamos que H e G satisfazem (7.2.7) para todo $x_n^+ \in QX$, $x_n^- \in (I - Q)X$ com certo $\rho > 0$, que será definido abaixo via (7.2.9). Seja $W^u(0,0)$ a variedade instável da solução de equilíbrio $(0,0)$ para (7.2.6). Mostraremos que existe uma função limitada e Lipschitz contínua $\Sigma^{*,u}(\cdot) : QX \to (I - Q)X$ tal que

$$W^u(0,0) = \{(x^+, x^-) : x^- = \Sigma^{*,u}(x^+), \ x^+ \in QX\}.$$

Observação 7.2.4 *Observe que estamos procurando por uma função* $\Sigma^{*,u}(\cdot)$ *tal que, se* $(\zeta, \Sigma^{*,u}(\zeta)) \in X$*, então a solução* (7.2.6) *tal que* $x_m^+ = \zeta$*,* $x_m^- = \Sigma^{*,u}(\zeta)$ *é tal que* x_n *está no gráfico de* $\Sigma^{*,u}(\cdot)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$*. Isto significa que* $x_n^- = \Sigma^{*,u}(x_n^+)$ *para todo* n *e logo* (7.2.6) *se torna*

$$\begin{aligned} x_n^+ &= L^{n-m} x_m^+ + \sum_{m}^{n-1} L^{n-k-1} H(x_k^+, \Sigma^{*,u}(x_k^+)) \\ x_n^- &= L^{n-m} x_m^- + \sum_{m}^{n-1} L^{n-k-1} G(x_k^+, \Sigma^{*,u}(x_k^+)) \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Também, a solução (x_n^+, x_n^-) *deve tender a zero quando* $n \to -\infty$ *(em particular, deve permanecer limitada quando* $n \to -\infty$*). Como*

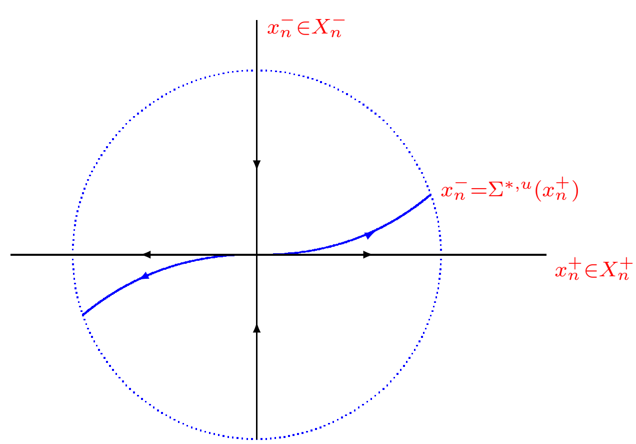
$$x_n^- = L^{n-m}(I-Q)x_m^- + \sum_{m}^{n-1} L^{n-k-1}(I-Q)G(x_k^+, \Sigma^{*,u}(x_k^+)),$$

fazendo $m \to -\infty$ *temos que*

$$x_n^- = \Sigma^{*,u}(x_n^+) = \sum_{-\infty}^{n-1} L^{n-k-1}(I-Q)G(x_k^+, \Sigma^{*,u}(x_k^+))$$

e, em particular,

$$\Sigma^{*,u}(\zeta) = \Sigma^{*,u}(x_m^+) = x_m^- = \sum_{-\infty}^{m-1} L_{m,k+1}(I-Q)G(x_k^+, \Sigma^{*,u}(x_k^+)).$$



Para mostrarmos a existência da função $\Sigma^{*,u}(\cdot)$ usaremos o Princípio da Contração de Banach. Para este fim, fixemos $D>0$, $L>0$, $0<\vartheta<1$ e escolha $\rho>0$ tal que

$$0<\nu:=-\log(1-\rho M(1+L+M)e^{-\omega})<\omega,\ 0<\nu':=\log(1+\rho M(1+L+M)e^{\omega})<\omega$$

$$0<\gamma:-\log\left(1-\rho M\left[e^{\omega-\nu}+\frac{\rho M(1+L+M)(1+M)}{1-e^{-(2\omega-\nu)}}\right]\right)<\omega.$$

$$\frac{\rho M(1+L+M)e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}}<1,\ \frac{\rho M^2(1+L+M)e^{\nu}}{1-e^{-(\omega-\nu)}}\leqslant L,\ \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}}\leqslant D,\ \frac{\rho M}{1-e^{-\omega}}\left[1+\frac{\rho M(1+L+M)}{1-e^{-(\omega-\nu)}}\right]\leqslant\vartheta<1. \tag{7.2.9}$$

<u>Definição</u> 7.2.5 *Dado $\eta>0$, denote por $\mathcal{LB}(D,L)$ o espaço métrico completo de todas as funções contínuas $\mathbb{Z}\times X\to X$ definidas por $(x)\mapsto\Sigma(Qx)\in(I-Q)X$ satisfazendo*

$$\begin{aligned}&\sup\{\|\Sigma(Qx)\|_X,\ (x)\in\mathbb{Z}\times X\}\leqslant D,\\ &\|\Sigma(Qx)-\Sigma(Q\tilde{x})\|_X\leqslant L\|Qx-Q\tilde{x}\|_X,\ \forall(x,\tilde{x})\in\mathbb{Z}\times X\times X,\end{aligned} \tag{7.2.10}$$

onde a distância de $\Sigma,\tilde{\Sigma}\in\mathcal{LB}(D,L)$ é definida por

$$|\!|\!|\Sigma(\cdot,\cdot)-\tilde{\Sigma}(\cdot,\cdot)|\!|\!|:=\sup\{\|\Sigma(Qx)-\tilde{\Sigma}(Qx)\|_X,\ (x)\in\mathbb{Z}\times X\}.$$

<u>Teorema</u> 7.2.6 *Suponha que as condições saõ satisfeitas. Então, existe $\Sigma^{*,u}(\cdot)\in\mathcal{LB}(D,L)$, tal que a variedade instável $W^u(0,0)$ de (7.2.6) é dada por*

$$W^u(0,0)=\{(w)\in\mathbb{Z}\times X: w=(Qw,\Sigma^{*,u}(Qw))\}. \tag{7.2.11}$$

Em adição, se $\{(x_n^+,x_n^-):n\geqslant 0\}$ é uma solução de (7.2.6), então

$$\|x_n^- -\Sigma^{*,u}(x_n^+)\|_X\leqslant Me^{-(\omega-\gamma)\,n}\|x_0^- -\Sigma^{*,u}(x_1^+)\|_X,\quad n\geqslant 0. \tag{7.2.12}$$

7.2.2 A variedade local como um gráfico

Nesta seção usaremos os resultados da Seção 6.1 para obter a existência e continuidade das variedades instáveis locais para o qual no qual h é somente uma função compacta continuamente diferenciável.

Seja $F : X \to X$ uma função continuamente diferenciável que satisfaz $F(0) = 0$ e $F'(0) = 0 \in \mathcal{L}(X)$. Suponha que $\{L^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$ é um processo de evolução discreto linear que tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente ω. Considere o problema de valor inicial (7.2.5).

Proposição 7.2.7 *Suponha que as condições acima estão satisfeitas. Então, existe uma vizinhança V de $x = 0$ em X em uma função $\Sigma^* : X \to X$, tal que tal que a variedade instável local $W^u_{\mathrm{loc}}(0)$ é dada por*

$$W^u_{\mathrm{loc}}(0) = W^u(0) \cap V = \{x \in V : x = (Qx, \Sigma^{*,u}(Qx))\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Em adição, se $\{(x_n^+, x_n^-) : n \geqslant 0\}$, $(x_1^+, x_0^-) \in V$ é uma solução de (7.2.6)*, então*

$$\|x_n^- - \Sigma^{*,u}(x_n^+)\|_X \leqslant Me^{-(\omega-\gamma)\,n}\|x_0^- - \Sigma^{*,u}(0, x_1^+)\|_X, \quad n \geqslant 0, \tag{7.2.13}$$

enquanto $(x_n^+, x_n^-) \in V$.

7.3 Continuidade do conjunto de equilíbrio

Seja $\eta \in [0,1]$ um parâmetro. Para cada $\eta \in [0,1]$, seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $\mathcal{E}_\eta$ seu conjunto de equilíbrio. Nesta seção nosso objetivo é estudar as semicontinuidades superior e inferior (veja Definição 1.2.1) da família $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$. Neste processo, o Lema 1.2.2 tem um papel fundamental.

A semicontinuidade superior da família $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é obtida sobre hipóteses naturais e representa que os conjuntos $\mathcal{E}_\eta$ não *explodem* (se tornam maiores que $\mathcal{E}_0$) em $\eta = 0$.

Teorema 7.3.1 (Semicontinuidade superior) *Seja $[0,1] \ni \eta \mapsto T_\eta x \in X$ uma função contínua, uniformemente subconjuntos compactos de X, em $\eta = 0$. Se $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{E}_\eta}$ é compacto, então a família $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua superiormente $\eta = 0$.*

Prova: Simplesmente notemos que para cada seqüência $\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$ em $[0,1]$ com $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uma seqüência correspondente $\{x^*_{\eta_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente (da compacidade de $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{E}_\eta}$), que denotamos igual. Se $x^*_{\eta_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$, segue das propriedades continuidade da família $\{T_\eta : \eta \in [0,1]\}$ at $\eta = 0$ que

$$x^* \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} x^*_{\eta_n} = T_{\eta_n} x^*_{\eta_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T_0 x^*.$$

Portanto $T_0 x^* = x^*$ e $x^* \in \mathcal{E}_0$. Segue do Lema 1.2.2 que a família $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. ∎

A semicontinuidade inferior é um problema muito mais complicado. Ela requer hipóteses adicionais para evitar que a família $\mathcal{E}_\eta$ colapse ficando *menor* que $\mathcal{E}_0$.

Primeiramente estudaremos condições sobre as quais um ponto em um conjunto de equilíbrio $\mathcal{E}_0$ para um semigrupo $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é isolado e pode ser aproximado por pontos em $\mathcal{E}_\eta$.

Lema 7.3.2 *Seja $T_0 \in C(X)$ e $x^* \in \mathcal{E}_0$ um ponto fixo de T_0. Se T_0 é diferenciável em x^* e $1 \notin \sigma(T'(x^*))$, então x^* é isolada. Consequentemente, se $\mathcal{E}_0$ é compacto, então $\mathcal{E}_0$ é finito.*

Prova: Como x^* é um ponto fixo para T_0, e $1 \notin \sigma(T_0'(x^*))$, temos que $y + x^*$ é um ponto fixo para T_0 se, e somente se, y é um ponto fixo para a aplicação $\Phi(y) = (I - T_0'(x^*))^{-1}(T_0(y+x^*) - T_0(x^*) - T_0'(x^*)y)$. Note que $y = 0$ é um ponto fixo para Φ e que

$$\|\Phi(y)\|_X \leqslant \|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T_0(y+x^*) - T_0(x^*) - T_0'(x^*)y\|_X$$

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_X \leqslant \|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T_0(y+x^*) - T_0(z+x^*) - T_0'(x^*)(y-z)\|_X$$

Da diferenciabilidade de T_0 em x^*, existe um $\delta > 0$ tal que,

$$\|T_0(y+x^*) - T_0(z+x^*) - T_0'(x^*)(y-z)\|_X \leqslant \frac{1}{2\|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \|y-z\|_Z,\ \forall\, y,z \in \overline{B_\delta(0)}.$$

Segue que Φ leva $\overline{B_\delta(0)}$ em $\overline{B_\delta(0)}$ e que é uma contração em $\overline{B_\delta(0)}$. Portanto Φ tem um único ponto fixo em $\overline{B_\delta(0)}$.

Como conseqüência, x^* é o único ponto fixo de T_0 em $\overline{B_\delta(0)}$ e x^* é um ponto de equilíbiro isolado de T_0. ■

<u>Teorema</u> 7.3.3 *Seja T_η, $\eta \in [0,1]$ uma família de aplicações em $C^1(X)$. Suponha que $x_0^* \in \mathcal{E}_0$ é tal que $1 \notin \sigma(T'(x_0^*))$, que*

$$\lim_{\eta\to 0} \|T_\eta(x^*) - T_0(x^*)\|_X = 0, \tag{7.3.1}$$

e que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{\eta\to 0} \left(\sup_{y\in B_\delta(x^*)} \|T_\eta'(y) - T_0'(x^*)\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \leqslant \epsilon. \tag{7.3.2}$$

Suponha também que, para algum $\eta_0 \in (0,1]$, dado $\rho > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|T_\eta(y) - T_\eta(z) - T_\eta'(z)(y-z)\|_X \leqslant \rho \|y-z\|_X,\ \ y,z \in B_\epsilon(x^*),\ \forall\, \eta \in [0,\eta_0]. \tag{7.3.3}$$

Então, existe um $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tal que T_η tem um único ponto fixo x_η^* em $B_\delta(x^*)$ para cada $\eta \in [0,\eta_0]$. Ainda mais $x_\eta^* \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} x^*$.

Prova: Primeiramente notemos que x_η^* é um ponto fixo para T_η se, e somente se, é um ponto fixo para a aplicação

$$\Phi_\eta(y) = (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_0'(x^*)y].$$

Provemos que, sobre algumas hipóteses, existe um $\delta > 0$ tal que Φ_η é uma contração de $\overline{B_\delta(x^*)}$ em $\overline{B_\delta(x^*)}$, para todo $\eta \in [0,\eta_0]$.

Primeiramente notemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_\eta(y) - x^* &= (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_0(x^*) - T_0'(x^*)(y-x^*)] \\
&= (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(x^*) - T_\eta'(x^*)(y-x^*)] \\
&+ (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta'(x^*) - T_0'(x^*)](y-x^*) \\
&+ (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta(x^*) - T_0(x^*)]
\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que (8.0.3) vale com $\rho\|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{2}$ e $\eta_1 < \eta_0$ em (8.0.1) tal que

$$\|(I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta(x^*) - T_0(x^*)]\|_X \leqslant \frac{\delta}{4},\ \forall\, \eta \in [0, \eta_1],$$
$$\|(I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta'(x^*) - T_0'(x^*)]\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{4},\ \forall\, \eta \in [0, \eta_1],$$

temos que $\Phi_\eta(\overline{B_\delta(x^*)}) \subset \overline{B_\delta(x^*)}$, $\forall\, \eta \in [0, \eta_1]$.

Procedendo numa maneira similar obtemos

$$\begin{aligned}\Phi_\eta(y) - \Phi_\eta(z) &= (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(z) - T_0'(x^*)(y - z)]\\ &= (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(z) - T_\eta'(z)(y - z)]\\ &+ (I - T_0'(x^*))^{-1}[T_\eta'(z) - T_0'(x^*)](y - z)\end{aligned}$$

Escolhendo $0 < \delta' \leqslant \delta$ tal que (8.0.3) vale com $\rho\|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{4}$ tal que (8.0.2) vale com $\epsilon\,\|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{4}$ temos que, existe um $0 < \eta_2 < \eta_1$ tal que $\Phi_\eta(\overline{B_{\delta'}(x^*)}) \subset \overline{B_{\delta'}(x^*)}$ e que Φ_η é uma contração (uniforme) $\overline{B_{\delta'}(x^*)}$ para todo $\eta \in [0, \eta_2]$.

Isto prova que T_η tem um único ponto fixo x_η^* em $\overline{B_{\delta'}(x^*)}$ para todo $\eta \in [0, \eta_2]$.

Falta somente mostrar que x_η^* converge para x^* mas esta é uma convergência simples, do fato que, dado $\delta'' < \delta'$, existe $\eta_1'' < \eta_1'$ tal que $\|x_\eta^* - x^*\|_X \leqslant \delta''$ para todo $\eta \in [0, \eta_1'']$. ∎

O seguinte resultado é uma conseqüência imediata do Teorema 8.0.3 e do Lema 1.2.2.

Teorema 7.3.4 (Semicontinuidade inferior) *Seja T_η, $\eta \in [0, 1]$ uma família de aplicações $C^1(X)$. Suponha que $\mathcal{E}_0$ é compacto, que $1 \notin \cup_{x_0^* \in \mathcal{E}_0} \sigma(T'(x_0^*))$, que, para cada $x_0^* \in \mathcal{E}_0$,*

$$\lim_{\eta \to 0} \|T_\eta(x_0^*) - T_0(x_0^*)\|_X = 0, \tag{7.3.4}$$

e, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{\eta \to 0} \left(\sup_{y \in B_\delta(x_0^*)} \|T_\eta'(y) - T_0'(x_0^*)\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \leqslant \epsilon. \tag{7.3.5}$$

Suponha também que, para cada $x_0^* \in \mathcal{E}_0$ existe um $\eta_0 \in (0, 1]$ com a propriedade de que, dado $\rho > 0$ existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$\|T_\eta(y) - T_\eta(z) - T_\eta'(z)(y - z)\|_X \leqslant \rho\|y - z\|_X,\ y, z \in B_\epsilon(x_0^*),\ \forall\, \eta \in [0, \eta_0]. \tag{7.3.6}$$

Então família $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$.

7.4 Perturbação das variedades instáveis e estáveis

Nesta seção mostraremos a continuidade das variedades instáveis relativamente a perturbações regulares. Antes de mirarmos este objetivo consideraremos primeiro a continuidade das projeções. Seja $\{T_{(1)}^{n-m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução linear que tem dicotomia exponencial discreta com constante M, expoente $\omega > 0$ e projeções $Q^{(1)}$. Se $B \in \mathcal{L}(X)$ definimos $\{T_{(2)}^{n-m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ por

$$T_{(2)}^{n-m} = T_{(1)}^{n-m} + \sum_{k=m}^{n-1} T_{(1)}^{n-k-1} B T_{(2)}^{k-m}, \tag{7.4.1}$$

isto é, $\{T_{(2)}^{n-m} : n \geqslant m\}$ é o semigrupo linear dado pela equação

$$y_{n+1} = (T_{(1)} + B) y_n.$$

Usando o Teorema 4.1.8, dado $M_1 > M$ e $\omega_1 < \omega$ existe um $\epsilon > 0$ tal que, se

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon.$$

então $\{T_{(2)}^{n-m} : (n,m) \in \mathcal{P}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_1, expoente w_1 e projeção $Q^{(2)}$.

Lembremos que, de Teorema 4.1.9 temos que

Lema 7.4.1 *Seja* $Q_{(i)}$ *a projeção associada a dicotomia exponencial discreta de* $\{T_{(i)}^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2$. *Então temos que,*

$$\|Q_{(1)} - Q_{(2)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M_1^2}{1 - e^{-\omega_1}} \|B\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{7.4.2}$$

Para $i = 1, 2$, considere os problemas

$$S_{(i)}^{n-m} x = T_{(i)}^{n-m} x + \sum_{m}^{n-1} T_{(i)}^{n-k-1} f^{(i)}(S_{(i)}^{k-m} x). \tag{7.4.3}$$

Suponha também que x_i^* é uma solução de equilíbrio para $\{S_{(i)}^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\}$. Associada à ξ_i consideremos o processo de evolução linear $\{L_{(i)}^{n-m} : n \geqslant m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_{(i)}^{n-m} = T_{(i)}^{n-m} + \sum_{m}^{n-1} T_{(i)}^{n-k-1} D_x f^{(i)}(x_i^*) L_{k,m}. \tag{7.4.4}$$

Suponha que $\{L_{n,m}^{(1)} : n \geqslant m\}$ tem uma dicotomia exponencial discreta com constante $M_1 > 0$ e expoente $\omega_1 > 0$. Dado $M_2 > M_1$ e $0 < \omega_2 < \omega_1$ escolha ϵ tal que, se

$$\sup_{x \in X} \|f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x)\|_X + \|D_x f^{(1)}(x) - D_x f^{(2)}(x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon, \tag{7.4.5}$$

então $\{L_{n,m}^{(2)} : n \geqslant m\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_2 e ω_2. Portanto $\{L_{(i)}^{n-m} : n \geqslant m\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_i, expoente $\omega_i > 0$ e projeções $Q_{(i)}$.

Sabemos que, $y_n^{(i)}$ é uma solução de (7.4.3) se, e somente se, $y_n^{(i)} = x_n^{(i)} + x_i^*$ onde $x_n^{(i)}$ satisfaz

$$x_n^{(i)} = L_{(i)}^{n-m} x_m^{(i)} + \sum_{m}^{n-1} L_{(i)}^{n-k-1} F^{(i)}(x_k^{(i)}). \tag{7.4.6}$$

onde $F^{(i)}(x) := f^{(i)}(x + x_i^*) - f^{(i)}(x_i^*) - D_x f^{(i)}(x_i^*)x$.

Podemos decompor uma solução $x^{(i)}$ de (7.4.6) como $x_n^{+,i} = Q_{(i)}(x^{(i)})$ e $x_n^{-,i} = (I - Q_{(i)})(x^{(i)})$. Então

$$\begin{aligned} x_n^{+,i} &= L_{(i)}^{n-m} x_m^{+,i} + \sum_{m}^{n-1} L_{(i)}^{n-k-1} H(x_k^{+,i}, x_k^{-,i}) \\ x_n^{-,i} &= L_{(i)}^{n-m} x_m^{-,i} + \sum_{m}^{n-1} L_{(i)}^{n-k-1} G(x_k^{+,i}, x_k^{-,i}) \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

onde

$$\begin{aligned} H_{(i)}(x_n^{i,+}, x_n^{i,-}) &= Q_{(i)} F^{(i)}(x_n^{i,+} + x_n^{i,-}), \\ G_{(i)}(x_n^{i,+}, x_n^{i,-}) &= (I - Q_{(i)}) F^{(i)}(x_n^{i,+} + x_n^{i,-}). \end{aligned}$$

Seja $D > 0$, $L > 0$, $0 < j < 1$, $\rho > 0$ satisfaz (7.2.9) e suponha (7.2.7) para todo $x_n^{i,+} \in Q_{(i)}X$ e $x_n^{i,-} \in (I - Q_{(i)})X$.

Teorema 7.4.2 *Para $i = 1, 2$, suponha que as condições acima estão satisfeitas e* (7.2.9) *vale, existindo assim uma função $\Sigma_i^{*,u} : X_i^+ \to X_i^-$, tal que a variedade instável $W_i^u(0,0)$ da solução de equilíbrio $(0,0)$ de* (7.4.7) *é dada por*

$$W_i^u(0,0) = \{w \in X : w = (Q_{(i)}w, \Sigma_i^{*,u}(Q_{(i)}w))\};$$

também, para qualquer $\zeta \in X_i^+$,

$$\Sigma_i^{*,u}(\zeta) = \sum_{-\infty}^{m-1} L_{m,k+1}^{(i)}(I - Q_{(i)})G_{(i)}(x_k^{+,i}, \Sigma_i^{*,u}(x_k^{+,i})).$$

Ainda mais, se $\{(x_n^{+,i}, x_n^{-,i}) : n \geqslant 0\}$, é uma solução de (7.2.6), *então*

$$\|x_n^{-,i} - \Sigma_i^{*,u}(x_n^{+,i})\|_X \leqslant Me^{-(\omega-\gamma)\,n}\|x_0^{-,i} - \Sigma_i^{*,u}(x_0^{+,i})\|_X, \quad n \geqslant 0. \tag{7.4.8}$$

Se em adição

$$\left[\frac{\rho M}{1 - e^{-\omega}} + \frac{\rho^2 M^2(1+L)}{1 - e^{-(2\omega-\nu)}}\right] \leqslant \frac{1}{2}$$

então, para qualquer $r > 0$,

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leqslant r}} \left\{\|Q_{(2)}x - Q_{(1)}x\|_X + \|\Sigma_2^{*,u}(Q_{(2)}x) - \Sigma_1^{*,u}(Q_{(1)}x)\|_X\right\} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

7.5 Semicontinuidade inferior de atratores

Teorema 7.5.1 (Semicontinuidade inferior) *Seja X um espaço de Banach e $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, $\eta \in [0,1]$, uma família de processos de evolução discreta em X que satisfazem* (8.0.3) *e* (8.0.1)

a) para cada $\eta \in [0,1]$ $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$. e $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$ é compacto.

b) $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo com um atrator do tipo gradiente e todos os seus equilíbrios são hiperbólicos.

c) $\|T_\eta^n u - T_0^n u\|_X \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ *uniformemente* u *em subconjuntos compactos de* X*, para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Então,

1) Existe um $\eta_0 > 0$ *tal que, para todo* $\eta \in [0, \eta_0]$,

$$\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$$

e $\sup_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}} \|y_i^{*,\eta} - y_i^{*,0}\|_X \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$

2) Existe um $\delta > 0$ *tal que, se* $W^u_{\rm loc}(y_j^{*,\eta}) := W^u(y_j^{*,\eta}) \cap B_\delta(y_j^{*,0})$*, então*

$$\{W^u_{\rm loc}(y_j^{*,\eta}) : \eta \in [0,1]\}$$

é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

3) Existem constantes $M_0 > 0$*,* $\varrho > 0$*,* $\eta_0 > 0$ *e, para cada* $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$*, uma vizinhança* V_i *de* $y_i^{*,0}$ *tal que, para qualquer* $u_0 \in V_i$*, enquanto* $T_\eta^n u_0 \in V_i$

$$\mathrm{dist}(T_\eta^n u_0, W^u(y_i^{*,\eta})) \leqslant M_0 e^{-n\varrho}, \ \forall\, \eta \in [0, \eta_0].$$

4) $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$.

Assumindo também que $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ *é gradiente-like temos que*

5) Existe um $\eta_0 > 0$ *tal que* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é gradiente-like para todo* $\eta \in [0, \eta_0]$ *e*

$$A_\eta = \cup_{i=1}^n W^u(y_i^{*,\eta}).$$

Se, em adição a todas as hipóteses acima, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *satisfaz que, para cada conjunto limitado* B*, existe* $c = c(B)$ *e* $L > 0$ *tal que*

$$d(T_\eta^n u, T_\eta^n v) \leqslant c e^{nL} d(u, v), \ \text{para todo } u, v \in B, \ n \in \mathbb{N}, \tag{7.5.1}$$

Então,

6) Para todo $B \subset \mathcal{Z}$ *limitado existe um* $c(B) > 0$ *tal que*

$$\mathrm{dist}(T^n u_0, \mathcal{A}) \leqslant c(B) e^{-n\varrho}, \ \text{para todo } u_0 \in B. \tag{7.5.2}$$

Capítulo 8

Apêndice: Continuidade de pontos fixos

Let $\eta \in [0,1]$ be a parameter. For each $\eta \in [0,1]$, let S_η be a map in $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{E}_\eta$ be its set of fixed points. In this section, our aim is to study the upper and lower semicontinuity (see Definition 1.2.1) of the family $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$. Lema 1.2.2 plays a central role.

The upper semicontinuity of the family $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ is obtained under natural assumptions e it represents that the sets $\mathcal{E}_\eta$ do not *explode* (become larger then $\mathcal{E}_0$) at $\eta = 0$.

Teorema 8.0.1 (Upper Semicontinuity) *Let $[0,1] \ni \eta \mapsto S_\eta x \in X$ be continuous, uniformly in compact subsets of X, at $\eta = 0$. If S_η has a set of fixed points $\mathcal{E}_\eta$ for each $\eta \in [0,1]$ e $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{E}_\eta}$ is compact, then the family $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ is upper semicontinuous at $\eta = 0$.*

Prova: Simply note that for each sequence $\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $[0,1]$ with $\eta_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a corresponding sequence $\{x^*_{\eta_n} : n \in \mathbb{N}\}$ has a convergent subsequence (from the compactness of $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{E}_\eta}$), which we denote the same. If $x^*_{\eta_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$, it follows that from the continuity properties of the family $\{S_\eta : \eta \in [0,1]\}$ at $\eta = 0$ that

$$x^* \stackrel{n\to\infty}{\longleftarrow} x^*_{\eta_n} = T_{\eta_n} x^*_{\eta_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T_0 x^*.$$

Hence $T_0 x^* = x^*$ e $x^* \in \mathcal{E}_0$. It follows from Lema 1.2.2 that the family $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ is upper semicontinuous at $\eta = 0$. ■

The lower semicontinuity is a much more complicated matter. It requires additional assumptions to avoid that the family $\mathcal{E}_\eta$ collapses becoming *smaller* than $\mathcal{E}_0$.

First we study conditions under which a point in the set of fixed points $\mathcal{E}_0$ for a semigroup T_0 is isolated e can be approximated by points in $\mathcal{E}_\eta$.

Lema 8.0.2 *Let $T_0 \in C(X)$ e $x^* \in \mathcal{E}_0$ be a fixed point of T_0. If T_0 is differentiable in x^* and $1 \notin \sigma(T'(x^*))$, then x^* is isolated. Consequently, if $\mathcal{E}_0$ is compact, then $\mathcal{E}_0$ is finite.*

Prova: Since x^* is a fixed point for T_0, and $1 \notin \sigma(T_0'(x^*))$, we have that $y + x^*$ is a fixed point for T_0 if e only if y is a fixed point for the map $\Phi(y) = (I - T_0'(x^*))^{-1}(T_0(y + x^*) - T_0(x^*) - T_0'(x^*)y)$. Note that $y = 0$ is a fixed point for Φ e that

$$\|\Phi(y)\|_X \leqslant \|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T_0(y + x^*) - T_0(x^*) - T_0'(x^*)y\|_X$$

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_X \leqslant \|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T_0(y + x^*) - T_0(z + x^*) - T_0'(x^*)(y - z)\|_X$$

From the differentiability of T_0 in x^*, there is a $\delta > 0$ such that, para todo $y, z \in \overline{B_\delta(0)}$,

$$\|T_0(y + x^*) - T_0(z + x^*) - T_0'(x^*)(y - z)\|_X \leqslant \frac{1}{2\|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \|y - z\|_Z.$$

It follows that Φ takes $\overline{B_\delta(0)}$ into itself and that it is a contraction in $\overline{B_\delta(0)}$. Hence Φ has a unique fixed point in $\overline{B_\delta(0)}$.

As a consequence of that, x^* is que unique fixed point of T_0 in $\overline{B_\delta(0)}$ e x^* is an isolated equilibrium point of T_0. ■

Teorema 8.0.3 *Let S_η, $\eta \in [0,1]$ be a family of maps in $C^1(X)$. Assume that $x_0^* \in \mathcal{E}_0$ is such that $1 \notin \sigma(T'(x_0^*))$, that*

$$\lim_{\eta \to 0} \|S_\eta(x^*) - T_0(x^*)\|_X = 0, \tag{8.0.1}$$

and that, given $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\limsup_{\eta\to 0}\left(\sup_{y\in B_\delta(x^*)}\|S'_\eta(y)-T'_0(x^*)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)\leqslant \epsilon. \tag{8.0.2}$$

Assume also that, for some $\eta_0 \in (0,1]$, given $\rho > 0$ there is a $\epsilon > 0$ such that

$$\|S_\eta(y)-S_\eta(z)-S'_\eta(z)(y-z)\|_X \leqslant \rho\|y-z\|_X,\ \ y,z\in B_\epsilon(x^*),\ \forall\,\eta\in[0,\eta_0]. \tag{8.0.3}$$

Then, there is a $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ such that S_η has a unique fixed point x^*_η in $B_\delta(x^*)$ for each $\eta \in [0,\eta_0]$. Furthermore $x^*_\eta \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} x^*$.

Prova: First note that x^*_η is a fixed point for S_η if e only if it is a fixed point for the map

$$\Phi_\eta(y) = (I - T'_0(x^*))^{-1}[S_\eta(y) - T'_0(x^*)y].$$

Let us prove that, under the above assumptions, there is a $\delta > 0$ such that Φ_η is a contraction from $\overline{B_\delta(x^*)}$ into itself, para todo $\eta \in [0,\eta_0]$.

First note that

$$\begin{aligned}\Phi_\eta(y)-x^* &= (I-T'_0(x^*))^{-1}[S_\eta(y)-T_0(x^*)-T'_0(x^*)(y-x^*)]\\ &= (I-T'_0(x^*))^{-1}[S_\eta(y)-S_\eta(x^*)-S'_\eta(x^*)(y-x^*)]\\ &+ (I-T'_0(x^*))^{-1}[S'_\eta(x^*)-T'_0(x^*)](y-x^*)\\ &+ (I-T'_0(x^*))^{-1}[S_\eta(x^*)-T_0(x^*)]\end{aligned}$$

Choosing $\delta > 0$ such that (8.0.3) holds with $\rho\|(I-T'_0(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{2}$ and $\eta_1 < \eta_0$ in (8.0.1) such that

$$\begin{aligned}&\|(I-T'_0(x^*))^{-1}[S_\eta(x^*)-T_0(x^*)]\|_X \leqslant \frac{\delta}{4},\ \forall\,\eta\in[0,\eta_1],\\ &\|(I-T'_0(x^*))^{-1}[S'_\eta(x^*)-T'_0(x^*)]\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{4},\ \forall\,\eta\in[0,\eta_1],\end{aligned}$$

we have that $\Phi_\eta(\overline{B_\delta(x^*)}) \subset \overline{B_\delta(x^*)}$, $\forall\,\eta\in[0,\eta_1]$.

Proceeding in a similar way we have that

$$\begin{aligned}\Phi_\eta(y)-\Phi_\eta(z) &= (I-T'_0(x^*))^{-1}[S_\eta(y)-S_\eta(z)-T'_0(x^*)(y-z)]\\ &= (I-T'_0(x^*))^{-1}[S_\eta(y)-S_\eta(z)-S'_\eta(z)(y-z)]\\ &+ (I-T'_0(x^*))^{-1}[S'_\eta(z)-T'_0(x^*)](y-z)\end{aligned}$$

Choosing $0 < \delta' \leqslant \delta$ such that (8.0.3) holds with $\rho\|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{4}$ such that (8.0.2) holds with $\epsilon\,\|(I - T_0'(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{4}$ we have that, there is a $0 < \eta_2 < \eta_1$ such that $\Phi_\eta(\overline{B_{\delta'}(x^*)}) \subset \overline{B_{\delta'}(x^*)}$ e that Φ_η is a (uniform) contraction in $\overline{B_{\delta'}(x^*)}$ para todo $\eta \in [0, \eta_2]$.

This proves that S_η has a unique fixed point x_η^* in $\overline{B_{\delta'}(x^*)}$ para todo $\eta \in [0, \eta_2]$.

It remains only to prove that x_η^* converges to x^* but that is a simple consequence of the fact that, given $\delta'' < \delta'$, there exists $\eta_1'' < \eta_1'$ such that $\|x_\eta^* - x^*\|_X \leqslant \delta''$ para todo $\eta \in [0, \eta_1'']$. ■

The following result is an immediate consequence of Theorem 8.0.3 e of Lema 1.2.2.

Teorema 8.0.4 (Lower Semicontinuity) *Let S_η, $\eta \in [0,1]$ be a family of maps in $C^1(X)$. Assume that $\mathcal{E}_0$ is compact, that $1 \notin \cup_{x_0^* \in \mathcal{E}_0} \sigma(T'(x_0^*))$, that, for each $x_0^* \in \mathcal{E}_0$,*

$$\lim_{\eta \to 0} \|S_\eta(x_0^*) - T_0(x_0^*)\|_X = 0, \tag{8.0.4}$$

and, given $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\limsup_{\eta \to 0} \left(\sup_{y \in B_\delta(x_0^*)} \|S_\eta'(y) - T_0'(x_0^*)\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \leqslant \epsilon. \tag{8.0.5}$$

Assume also that, for each $x_0^* \in \mathcal{E}_0$ there is a $\eta_0 \in (0,1]$ with the property that, given $\rho > 0$ there is a $\epsilon > 0$ such that

$$\|S_\eta(y) - S_\eta(z) - S_\eta'(z)(y - z)\|_X \leqslant \rho\|y - z\|_X,\ \ y, z \in B_\epsilon(x_0^*),\ \forall\, \eta \in [0, \eta_0]. \tag{8.0.6}$$

Then the family $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ is lower semicontinuous at $\eta = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] E. R. Aragão-Costa, T. Caraballo, A. N. Carvalho and J. A. Langa, Stability of gradient semigroups under perturbations, *Nonlinearity* **24** 2099-2117 (2012).

[2] E. R. Aragão-Costa, A. N. Carvalho, G. Planas and P. Marin, Gradient-like nonlinear semigroups with infinitely many equilibria and applications to cascade systems. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **42** (2) 345-376 (2013).

[3] J. Arrieta and A. N. Carvalho *Spectral Convergence and Nolinear Dynamics of Reaction Diffusion Equations Under Perturbations of the Domain*. Journal of Differential Equations, 199 (1) 143-178 (2004).

[4] J. Arrieta, A. N. Carvalho, G. Lozada-Cruz, Dynamics in dumbbell domains II. The Limiting Problem, Journal of Differential Equations 247 (2009), 174-202.

[5] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors in Evolutionary Equations* Studies in Mathematics and its Applications **25**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.

[6] B. Bollobás, *Linear Analysis: Introductory Course*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge UK (1990).

[7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, (2) (1987).

[8] S. M. Bruschi, A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, Tomasz Dlotko, Uniform exponential dichotomy and continuity of attractors for singularly perturbed damped wave equations, J. Dynam. Differential Equations 18, 767-814 (2006).

[9] A. N. Carvalho, Contracting sets and dissipation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **125A** 1305-1329 (1995).

[10] A. N. Carvalho and J. W. Cholewa, Exponential global attractors for semigroups in metric spaces with applications to differential equations, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **31** (6) 1641-1667 (2012).

[11] A. N. Carvalho, J. A. Langa, Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: Continuity of local stable and unstable manifolds, *J. Differential Equations* **233** 622-653 (2007).

[12] A. N. Carvalho, J. A. Langa, An extension of the concept of gradient systems which is stable under perturbation, *J. Differential Equations*, **246** (7) 2646-2668 (2009).

[13] A. N. Carvalho, J. A. Langa and J. C. Robinson, Lower Semicontinuity of attractors for non-gradient dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **29** (6) 1765-1780 (2009).

[14] A. N. Carvalho, J. A. Langa and Robinson, J. C. Finite-dimensional global attractors in Banach spaces, *Journal of Differential Equations*, **249** (12) 3099-3109 (2010).

[15] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J.C. Robinson and A. Suárez Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system, *Journal of Differential Equations*, **236** (2007) 570–603.

[16] A. N. Carvalho and S. Piskarev, A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems, *Numerical Functional Analysis and Optimization* **27** (7-8) 785 - 829 (2006).

[17] A. N. Carvalho and S. Sonner, Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: Theoretical results, Submitted for publication.

[18] D. Cheban, P. E. Kloeden and B. Schmalfuß, The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory* **2** 125–144 (2002)

[19] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik (2002) *Attractors for Equations of Mathematical Physics* (Providence, AMS Colloquium Publications vol. 49, A.M.S).

[20] J.W. Cholewa, T. Dlotko, Global Attractors in Abstract Parabolic Problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[21] J. W. Cholewa, R. Czaja and G. Mola, Remarks on the fractal dimension of bi-space global and exponential attractors. Boll. Unione Mat. Ital. (9) 1 (2008), no. 1, 121-145.

[22] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1978).

[23] W. A. Coppel *Dichotomies in stability theory.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 629. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[24] W. A. Coppel, Dichotomies and reducibility, *J. Differential Equations* **3** 500-521 (1967).

[25] Ju. L. Daleckiıı and M.G. Kreıın, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, American Math. Soc. Transl., Providence RI, 1974.

[26] Desheng Li, P.E. Kloeden, Equi-attraction and the continuous dependence of attractors on parameters. *Glasg. Math. J.* **46** (2004), no. 1, 131–141.

[27] Desheng Li, P.E. Kloeden, P. E. Equi-attraction and the continuous dependence of pullback attractors on parameters. *Stoch. Dyn.* **4** (2004), no. 3, 373–384.

[28] L. Dung and B. Nicolaenko, Exponential attractors in Banach spaces, *J. Dynam. Differential Equations* **13** (4) (2001) 791-806.

[29] A. Eden, C. Foias, B. Nikolaenko and R. Temam, *Exponential attractors for dissipative evolution equations*, Research in Applied Mathematics, John Willey & Sons (1994).

[30] D. E. Edmunds and H. Triebel, Function Spaces, Entropy Numbers and Differential Operators, Cambridge University Tracts **120**, Cambridge University Press (1996).

[31] M. Efendiev, A. Miranville and S. Zelik, Exponencial attractors and finite-dimensional reduction for nonautonomous dynamical systems, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **135A**, 703-730, 2005.

[32] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics **85**, Cambridge University Press (1985).

[33] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons (1984).

[34] J. K. Hale *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25** (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).

[35] J. K. Hale, L. Magalhães and W. M. Oliva *Dynamics in Infinite Dimensions*, Applice Mathematical Sciences **47**, Second Edition, Springer Verlag (2002).

[36] J. K. Hale and G. Raugel, *Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications*, Ann. Mat. Pura Appl. **154** (4) (1989), 281–326.

[37] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[38] D. Henry, *Semigroups*, Handwritten Notes. IME-USP, São Paulo SP, Brazil, 1981.

[39] M. Hurley, Chain recurrence, semiflows and gradients, *J. Dyn. Diff. Equations* **7** 437–456 (1995).

[40] W. Hurewicz & H. Wallman, *Dimension Theory* Princeton University Press (1948).

[41] J. P. Kahane, *Measures et dimensions, Turbulence and the Navier Stokes equation*, Lecture Notes in Mathematics **565** Springer-Verlag, New York, (1976).

[42] M. A. Krasnosel'skii, P.P. Zabreiko. *Geometrical methods of nonlinear analysis.* Translated from the Russian by Christian C. Fenske. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 263. Springer-Verlag, Berlin (1984)

[43] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*, Leizioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Campridge, UK (1991)

[44] Y. Latushkin, T. Randolf & Schnaubelt, R.: Exponential Dichotomy and Mild Solutions of Nonautonomous Equations in Banach Spaces Journal of Dynamics and Differential Equations **10**, 489-510 (1998)

[45] J.A. Langa, J.C. Robinson & A. Suárez, Stability, instability, and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations, Nonlinearity **15** (2002), no. 3, 887–903.

[46] J. Mallet-Paret, Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright, *J. Differential Equations*, **22** 331–348 (1976).

[47] R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics **898** 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.

[48] J. L. Massera and J. J. Schäffer, Linear differential equations and functional analysis I, Ann. of Math. **67** (1958), 517-573.

[49] K. Mischaikow, H. Smith and H. R. Thieme, Asymptotically autonomous semiflows: chain recurrent and Lyapunov functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (5) 1669–1685 (1995).

[50] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Pearson Education (2000).

[51] D.E. Norton, The fundamental theorem of dynamical systems, *Comment. Math., Univ. Carolinae* **36** (3) 585–597 (1995).

[52] M. Patrão, Morse decomposition of semiflows on topological spaces, *J. Dyn. Diff. Equations* **19** (1) (2007), 181–198.

[53] M. Patrão and Luiz A.B. San Martin, Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups, *J. Dyn. Diff. Equations* **19** (1) (2007), 155–180.

[54] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[55] G. Raugel, Global Attractors in Partial Differential Equations, in Handbook of Dynamical Systems, volume 2, B. Fiedler editor, (2002), Elsevier Sciences, B. V., pp 885–982.

[56] G. Raugel, Global attractors in partial differential equations; in: Handbook of dynamical systems **2** 885–982, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[57] K. P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag (1987).

[58] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems, From Basic Facts to Actual Calculations*, Cambridge University Pres, Cabridge UK (2001).

[59] A. Rodríguez-Bernal and A. Vidal–López, Existence, uniqueness and attractivity properties of positive complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **18** (2-3) 537–567

[60] G. R. Sell, Y. You, Dynamics of Evolutionary Equations, Springer, New York, 2000.

[61] J. J. Schäffer, Norms and determinants of linear mappings, Math. Z. **118** 331-339 (1970).

[62] Temam, R. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences **68**, Springer-Verlag (1997)