Sistemas dinâmicos não lineares
Vigésima-Oitava Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

12 de Dezembro de 2022

Continuidade das soluções globais hiperbólicas

Nesta seção provaremos a continuidade das variedades instáveis relativamente a perturbações.
Para $i = 1, 2$, considere os problemas

$$T_{f_i}(t,\tau)x = L(t,\tau)x + \int_\tau^t L(t,s)f_i(s, T_{f_i}(s,\tau)x)\,\mathrm{d}s. \qquad (1)$$

Suponha que $\xi_i : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global para $\{T_{f_i}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$. Para cada ξ_i considere o processo de evolução linear $\{L_{f_i}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_{f_i}(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s)D_x f_i(s,\xi_i(s))L_{f_i}(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

Se $\xi_1 : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global hiperbólica de $\{T_{f_1}(t,\tau) : t \geq \tau\}$; isto é, $\{L_{f_1}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial com constante $M_1 > 0$ e expoente $\omega_1 > 0$, dados $M_2 > M_1$ e $0 < \omega_2 < \omega_1$, dos resultados anteriores, escolha $\epsilon > 0$ tal, se

$$\sup_{x \in X} \|f_1(t,x) - f_2(t,x)\|_X + \|D_x f_1(t,x) - D_x f_2(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \epsilon, \quad (2)$$

existe uma solução global $\xi_2 : \mathbb{R} \to X$ de $\{T_{f_2}(t,\tau) : t \geq \tau\}$ com

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_X \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

e $\{L_{f_2}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia com constante M_2 e expoente ω_2. Assim, $\{L_{f_i}(t,\tau)\}$ tem dicotomia com constante M_i, expoente $\omega_i > 0$ e projeções $\{Q_i(\cdot)\}$.

Terminologia e notação

Sabemos que, $y_i(t)$ é uma solução de (1) se, e somente se, $y_i(t) = x_i(t) + \xi_i(t)$ onde $x_i(t)$ satisfaz

$$x_i(t) = L_{f_i}(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)[f_i(s, x_i(s)+\xi_i(s)) - f_i(s,\xi_i(s)) - D_x f_i(s,\xi_i(s))x_i(s)]\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Podemos decompor a solução $x_i(t)$ de (3) em $x_i(t) = x_i^+(t) + x_i^-(t)$ onde $x_i^+(t) = Q_i(t)(x_i(t))$ e $x_i^-(t) = (I - Q_i(t))(x_i(t))$.

Logo

$$\begin{aligned} x_i^+(t) &= L_{f_i}(t,\tau)x_i^+(\tau) + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)H(s,x_i^+(s),x_i^-(s))\,\mathrm{d}s \\ x_i^-(t) &= L_{f_i}(t,\tau)x_i^-(\tau) + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)G(s,x_i^+(s),x_i^-(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4}$$

onde

$$\begin{aligned} h_i(t,x_i^+&+x_i^-+\xi_i(t)) \\ &= f_i(t,x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)) - f_i(t,\xi_i(t)) - D_x f_i(t,\xi_i(t))(x_i^+ + x_i^-) \\ H_i(t,x_i^+,x_i^-) &= Q_i(t)h_i(t,x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)), \\ G_i(t,x_i^+,x_i^-) &= (I - Q_i(t))h_i(t,x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)). \end{aligned}$$

A continuidade das variedades instáveis

Teorema

Para $D > 0$, $L > 0$, $0 < \theta < 1$, $\rho > 0$, H_i *e* G_i *como antes, existe* $\Sigma_i^u : \mathbb{R} \times X \to X$ *tal que* $Q_i(\Sigma_i^u(t,x)) = 0$ *e* $\Sigma_i^u(t,x) = \Sigma_i^u(t, Q_i(t)x)$, *para todo* $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$ *e a variedade instável* $W_i^u(0,0)$ *do equilíbrio* $(0,0)$ *de* (4) *é dada por*

$$W_i^u(0,0) = \{(\tau, w) \in \mathbb{R} \times X : w = (Q_i(\tau)w, \Sigma_i^u(\tau, Q_i(\tau)w))\},$$

onde, para todo $x \in X$,

$$\Sigma_i^u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\tau} L_{f_i}(\tau, s)(I - Q_i(s)) G_i(s, x^+(s), \Sigma_i^u(s, x_i^+(s)))\, \mathrm{d}s,$$

e $x_i^+ : (-\infty, \tau] \to X$ *é a solução de*

$$\begin{aligned} x_i^+(t) &= L_{f_i}(t,\tau)Q_i(\tau)x \\ &\quad + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)Q_i(s)h_i(s, x_i^+(s), \Sigma_i^u(s, x_i^+(s)))\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{5}$$

Além disso, se

$$\left[\frac{\rho M}{\omega_2} + \frac{\rho^2 M^2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2 - \rho M(1+L)}\right] \leqslant \frac{1}{2} \tag{6}$$

então,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in X} \{\|Q_2(t)x - Q_1(t)x\|_X + \|\Sigma_2^u(t,x) - \Sigma_1^u(t,x)\|_X\} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Prova: Somente precisamos provar que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\ \sup_{x\in X} \|\Sigma_2^u(t,x) - \Sigma_1^u(t,x)\|_X \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Se $x \in X$, então

$$\begin{aligned}
&\Sigma_2^u(\tau, Q_2(\tau)x) - \Sigma_1^u(\tau, Q_1(\tau)x)\\
&= \int_{-\infty}^{\tau} [L_{f_2}(\tau,s)(I-Q_2(s)) - L_{f_1}(\tau,s)(I-Q_1(s))] h_2(s, x_2^+, \Sigma_2^u(s,x_2^+))\mathrm{d}s\\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} L_{f_1}(\tau,s)(I-Q_1(s))[h_2(s,x_2^+,\Sigma_2^u(s,x_2^+)) - h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))]\mathrm{d}s \quad (7)\\
&+ \int_{-\infty}^{\tau} L_{f_1}(\tau,s)(I-Q_1(s))[h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+)) - h_1(x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))]\mathrm{d}s\\
&=: I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) + I_3(\epsilon).
\end{aligned}$$

Como $\sup_{s\in\mathbb{R}} \|Q_1(s) - Q_2(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2\frac{M_1+M_2}{\omega_1+\omega} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e

$$L_{f_2}(t,\tau)(I - Q_2(\tau)) - L_{f_1}(t,\tau)(I - Q_1(\tau))$$

$$= L_{f_1}(t,\tau)[Q_1(\tau) - Q_2(\tau)] + \int_\tau^t L_{f_1}(t,s)B(s)L_{f_2}(s,\tau)(I - Q_2(\tau))\,\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau.$$

Disto obtemos que existem constantes $\bar{M}$ e $\bar{\omega}$ tal que

$$\|L_{f_2}(t,\tau)(I - Q_2(\tau)) - L_{f_1}(t,\tau)(I - Q_1(\tau))\| \leqslant \bar{M}e^{\bar{\omega}(t-\tau)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|$$

Por outro lado, se $M = \max\{M_1, M_2\}$ e $\omega = \min\{\omega_1, \omega_2\}$,

$$\|L_{f_2}(t,\tau)(I - Q_2(\tau)) - L_{f_1}(t,\tau)(I - Q_1(\tau))\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\omega(t-\tau)}.$$

Por interpolação obtemos que $I_1(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Além disso, $I_3(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ de (2).

A seguir estimamos $I_2(\epsilon)$. Recorde $x_i^+ : (-\infty, \tau] \to X$ satisfaz (5). Usando a Desigualdade de Gronwal

$$\|x_i^+(t)\|_X \leqslant M_i e^{(\omega_i - \rho M_i(1+L))(t-\tau)} \|x\|_X. \tag{8}$$

Como

$$
\begin{aligned}
&\|I_2(\epsilon)\| \\
&\leqslant \rho M_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\big[\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|+\|\Sigma_2^u(s,x_2^+(s))-\Sigma_1^u(s,x_1^+(s))\|\big]\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \rho M_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\big[(1+L)\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|+\|\!|\Sigma_2^u-\Sigma_1^u|\!\|\big]\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \rho M_1(1+L)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|\,\mathrm{d}s+\frac{\rho M_1}{\omega_1}\|\!|\Sigma_2^u-\Sigma_1^u|\!\|,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\|\!|\Sigma_2^u-\Sigma_1^u|\!\| = \sup_{s\in\mathbb{R}}\sup_{x\in X}\|\Sigma_2^u(s,x)-\Sigma_1^u(s,x)\|. \tag{9}
$$

Segue de (7) que

$$\begin{aligned}\|\Sigma_2^u(\tau, Q_2(\tau)x) - \Sigma_1^u(\tau, Q_1(\tau)x)\| \leqslant o(1) + \frac{\rho M_1}{\omega_1}\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\| \\ + \rho M_1(1+L)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)}\|x_2^+(s) - x_1^+(s)\|_X \, \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{10}$$

A seguir temos que

$$
\begin{aligned}
&\|x_2^+(t) - x_1^+(t)\|_X \leqslant \left\|L_{f_2}(t,\tau)Q_2(\tau)x - L_{f_1}(t,\tau)Q_1(\tau)x\right\|_X \\
&+\left\|\int_\tau^t [L_{f_2}(t,s)H_2(s,x_2^+,\Sigma_2^u(s,x_2^+)) - L_{f_1}(t,s)H_1(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))]\,\mathrm{d}s\right\|_X \\
&\leqslant \left\|L_{f_2}(t,\tau)Q_2(\tau)x - L_{f_1}(t,\tau)Q_1(\tau)x\right\|_X \\
&+ \left\|\int_\tau^t [L_{f_2}(t,s)Q_2 - L_{f_1}(t,s)Q_1]h_1(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))\,\mathrm{d}s\right\|_X \\
&+\left\|\int_\tau^t L_{f_2}(t,s)Q_2\left[h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+)) - h_1(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))\right]\,\mathrm{d}s\right\|_X \\
&+\left\|\int_\tau^t L_{f_2}(t,s)Q_2\left[h_2(s,x_2^+,\Sigma_2^u(s,x_2^+)) - h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))\right]\,\mathrm{d}s\right\|_X \\
&\leqslant o(1) + \rho M_2 \int_t^\tau e^{\omega_2(t-s)}[(1+L)\|x_2^+ - x_1^+\|_X + \|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\|_X]\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant o(1) + \frac{\rho M_2}{\omega_2}\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\| + \rho M_2(1+L)\int_t^\tau e^{\omega_2(t-s)}\|x_2^+ - x_1^+\|_X\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

e, da desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} &\|x_2^+(t) - x_1^+(t)\|_X \\ &\qquad \leqslant \left(o(1) + \frac{\rho M_2}{\omega_2} \|\!| \Sigma_2^u - \Sigma_1^u \|\!| \right) e^{(\omega_2 - \rho M_2(1+L))(t-\tau)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Substituindo (11) em (10) obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\|\Sigma_2^u(\tau, Q_2(\tau)x) - \Sigma_1^u(\tau, Q_1(\tau)x)\|_X \leqslant o(1) + \frac{\rho M_1}{\omega_1}\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\| \\
&+ \rho M_1(1+L)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\omega_1+\omega_2-\rho M_2(1+L))(\tau-s)}\left[o(1) + \frac{\rho M_2}{\omega_2}\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\|\right]\mathrm{d}s \\
&\leqslant o(1) + \left[\frac{\rho M_1}{\omega_1} + \frac{\rho^2 M_1 M_2(1+L)}{\omega_2(\omega_1+\omega_2-\rho M_2(1+L))}\right]\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\| \\
&=: o(1) + \left[\frac{\rho M_2}{\omega_2} + \frac{\rho^2 M_1 M_2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2-\rho M_2(1+L))}\right]\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\|.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Segue de (6) que $\tilde{\theta} = \left[\frac{\rho M_2}{\omega_2} + \frac{\rho^2 M_1 M_2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2 - \rho M_2(1+L))}\right] \leqslant \frac{1}{2}$ e de (12) que

$$\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\| \leqslant o(1) + \tilde{\theta}\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\|, \tag{13}$$

o que completa a prova.$\square$

As variedades instáveis locais

De (8) e das propriedades de Σ^{u} obtemos que existe $\rho' < \rho$ de modo que toda a solução sobre a variedade instável local (em $B_{\rho'}(0,0)$) nunca deixe $B_{\rho}(0,0)$. Desta forma, a variedades instável local também é dada como um gráfico e se comporta de maneira contínua com o parâmetro.

Aplicação à continuidade de atratores

Teorema

Seja Λ um espaço métrico, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em Λ com $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$. Considere a família $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, $n \in \mathbb{N}$, de processos de evolução. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tenha um atrator pullback $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ e que (1), (2) e (3) estejam satisfeitas.
Se

- *Existe uma seqüência de soluções separadas do passado $\{\xi_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $\{\mathcal{A}_{\lambda_0}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ tal que*

$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*(\cdot))(t)}.$$

- *Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma seqüência $\{\xi^*_{j,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $\xi^*_{j,n} : \mathbb{T} \to X$ solução global de $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tal que, o conjunto instável local de $\xi^*_{j,n}$ se comporta continuamente quando $n \to \infty$; isto é, existem $\delta_j > 0$ e $t_j \in \mathbb{T}$ tais que,*

$$\mathrm{dist}_H(W^u_{\delta_j}(\xi^*_j)(t), W^u_{\delta_j}(\xi^*_{j,n})(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\ t \leqslant t_j.$$

Então a família $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), t \in \mathbb{T}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é semicontínua superiormente e inferiormente; isto é, para cada intervalo limitado I de $\mathbb{T}$

$$\sup_{t\in I} \left[\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}(t), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t))\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$