Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Vigésima Sexta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

05 de Dezembro de 2022

Soluções globais hiperbólicas

Seja X um espaço de Banach e considere um processo de evolução não-linear $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{C}(X)$.

A seguir estudaremos o comportamento deste processo de evolução não-linear próximo a soluções globais hiperbólicas.

Processos de Evolução Semilineares

Se $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é contínua na primeira variável e localmente Lipschitz contínua na segunda variável e $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ é um processo de evolução linear.

É fácil ver que a equação integral

$$y(t,\tau,x) = L(t,\tau)x + \int_{\tau}^{t} L(t,s)f(s,y(s,\tau,x))\,\mathrm{d}s. \qquad (1)$$

tem uma única solução local; isto é, para cada $(\tau,x) \in \mathbb{R} \times X$ existe um $\sigma = \sigma(\tau,x) > 0$ e uma única função contínua $y(\cdot,\tau,x) : [\tau,\tau+\sigma) \to X$ que satisfaz (1) para todo $t \in [\tau,\tau+\sigma)$.

Se supomos que $\sigma(\tau, x) = +\infty$ para cada $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times X$ e se definimos $T_f(,\tau)x = y(t, \tau, x)$, $t \in [\tau, \infty)$, então $\{T_f(,\tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}\}$ é um processo de evolução.

Neste caso, nos referiremos a $\{T_f(,\tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}\}$ como o processo de evolução semilinear obtido pela perturbação do processo de evolução linear $\{L(t, \tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ pela função não-linear $f : \mathbb{R} \times X \to X$; isto é,

$$T_f(,\tau)x = L(t, \tau)x + \int_\tau^t L(t, s)f(s, S_f(s, \tau)x)\,\mathrm{d}s. \qquad (2)$$

Soluções globais hiperbólicas são isoladas

Seja $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função continuamente diferenciável. Suponha que f, juntamente com o processo de evolução linear $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$, definam um processo de evolução semilinear $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}\}$ e que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global para $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$.

Consideramos o processo de evolução linear $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_f(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_x f(s,\xi(s)) L_f(s,\tau)\,\mathrm{d}s. \qquad (3)$$

Definição

Diremos que $\xi : \mathbb{R} \to X$ *é uma solução global hiperbólica para* $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ *se* $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ *tem dicotomia exponencial.*

Observação

Se $\phi, \xi : [\tau, \tau + \sigma] \to X$ forem soluções da equação

$$\phi(t) = L(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L(t,s) f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s,$$

então

$$\phi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s. \quad (4)$$

De fato, se

$$\psi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s,$$

então

$$
\begin{aligned}
&\psi(t)-\phi(t)\\
&=\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}s-\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))\phi(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t\int_s^t L(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))L_f(\theta,s)\,\mathrm{d}\theta[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s\\
&=\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}s-\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))\phi(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t L(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))\int_\tau^\theta L_f(\theta,s)[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s\;\mathrm{d}\theta\\
&=\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))[\psi(s)-\phi(s)]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall concluímos que $\phi(t)=\psi(t)$ para todo $t\in[\tau,\tau+\sigma]$.

Caracterização das soluções globais limitadas

Suponha que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global hiperbólica limitada para $\{T_f(,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$. Então $\{L_f(t,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ dado por (3) tem dicotomia exponencial com constante M, expoente ω e projeções $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$. De (4), da limitação de $\xi : \mathbb{R} \to X$ e da dicotomia de $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ temos que, para $t \geqslant \tau$, se $\phi : \mathbb{R} \to X$ for uma solução limitada de (2), então

$$\begin{aligned} Q(t)\phi(t) &= L_f(t,\tau)Q(\tau)\phi(\tau) \\ &\quad + \int_\tau^t L_f(t,s)Q(s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$L_f(\tau,t)Q(t)\phi(t) = Q(\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(\tau,s)Q(s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Fazendo $t \to \infty$ temos que

$$Q(t)\phi(t) = -\int_t^\infty L_f(t,s)Q(s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s,$$

$t \in \mathbb{R}$.

Semelhantemente,

$$(I-Q(t))\phi(t) = L_f(t,\tau)(I-Q(\tau))\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)(I-Q(s))[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s$$

fazendo $\tau \to -\infty$ temos que

$$(I-Q(t))\phi(t) = \int_{-\infty}^t L_f(t,s)(I-Q(s))[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Isto implica que

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s$$

onde

$$G_f(t,s) = \begin{cases} L_f(t,s)(I - Q(s)), & t \geqslant s \\ -L_f(t,s)Q(s), & t \leqslant s \end{cases} \tag{5}$$

Soluções globais hiperbólicas são isoladas

Suponha também que $\rho(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$, onde

$$\rho(\epsilon) := \sup_{\|x\| \leqslant \epsilon} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|f(t, \xi(t) + x) - f(t, \xi(t)) - D_x f(t, \xi(t))x\|_X}{\|x\|_X}. \quad (6)$$

Com a caracterização de soluções globais limitadas e a hipótese acima, é fácil ver que $\xi : \mathbb{R} \to X$ é isolada no espaço $C_b(\mathbb{R}, X)$ das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em X.

De fato: Se $\phi : \mathbb{R} \to X$ for uma solução global limitada de (2) satisfazendo $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X \leqslant \epsilon$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X \leqslant 2M\rho(\epsilon)\omega^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X.$$

Se $\epsilon > 0$ é tal que $2M\rho(\epsilon)\omega^{-1} < 1$ concluímos que $\phi(t) = \xi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Permanência e Continuidade por Perturbações

Seja $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função continuamente diferenciável, $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ um processo de evolução linear. Suponha que f e $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ definam um processo de evolução semilinear; isto é, para todo $t \geqslant \tau$ e $\forall x \in X$

$$T_f(,\tau)x = L(t,\tau)x + \int_\tau^t L(t,s) f(s, S_f(s,\tau)x)\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

e que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global hiperbólica limitada para $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$.

Assim, o processo de evolução linear definido por

$$L_f(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_x f(s,\xi(s)) L_f(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

tem dicotomia exponencial com constante M e expoente $\omega > 0$ e

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t,s)[f(s,\xi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\xi(s)]\,\mathrm{d}s. \qquad (8)$$

Se $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\xi(t)\|_X < M_1 < \infty$ e $0 < \epsilon < M_1 - \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\xi(t)\|_X$, suponha que

$$\sup_{\|x\|\leqslant M_1} \|f(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty, \tag{9}$$

que

$$\sup_{\|x\|\leqslant M_1} \|f(t,x) - g(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x) - D_x g(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\epsilon\omega}{4M}. \tag{10}$$

e que g e $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ definam um processo de evolução semilinear $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$.

Então, $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem uma única solução global hiberbólica limitada $\eta : \mathbb{R} \to X$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t) - \eta(t)\|_X < \epsilon.$$

De fato, se $y : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada de $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= L_f(t,\tau)y(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[g(s,y(s)) - D_x f(s,\xi(s))y(s)]\,\mathrm{d}s \\ \xi(t) &= L_f(t,\tau)\xi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\xi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\xi(s)]\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{11}$$

e, se definimos $\phi(t) = y(t) - \xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{12}$$

onde $\tilde{g}(t,\phi) = g(t,\phi(t)+\xi(t)) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))\phi(t)$.

Projetando (12) com $I - Q(t)$ e tomando o limite quando $\tau \to -\infty$ temos que

$$(I - Q(t))\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} L_f(t,s)(I - Q(s))\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Projetando (12) com $Q(t)$ temos que, para $t \geqslant \tau$,

$$Q(t)\phi(t) = L_f(t,\tau)Q(\tau)\phi(\tau) + \int_{\tau}^{t} L_f(t,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s$$

e, consequentemente,

$$L_f(\tau,t)Q(t)\phi(t) = Q(\tau)\phi(\tau) + \int_{\tau}^{t} L_f(\tau,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Tomando o limite quando $t \to \infty$ obtemos que

$$Q(\tau)\phi(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} L_f(\tau, s)Q(s)\tilde{g}(s, (\phi(s)))\,\mathrm{d}s$$

Daí, existe uma única solução global limitada de (12) em

$$B_\epsilon := \{\phi : \mathbb{R} \to X : \phi \text{ é contínua e } \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|_X \leqslant \epsilon\}$$

para ϵ pequeno se, e somente se,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\phi)(t) &= -\int_{t}^{\infty} L_f(t, s)Q(s)\tilde{g}(s, (\phi(s)))\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t} L_f(t, s)(I - Q(s))\tilde{g}(s, (\phi(s)))\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t, s)\tilde{g}(s, (\phi(s)))\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

tem um único ponto fixo em B_ϵ.

Usando a dicotomia exponencial de $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ e o Princípio da Contração de Banach obtemos que existe uma única solução global limitada de (12) em B_ϵ. De fato:

$$\|\mathcal{T}(\phi)(t)\|_X \leqslant M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|t-s|} \|\tilde{g}(s,(\phi(s)))\|_X \, \mathrm{d}s$$

$$\leqslant 2M\omega^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t,y(t)) - f(t,y(t))\|_X$$

$$+ 2M\omega^{-1} \sup_{\|x\|\leqslant\epsilon} \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|f(t,\xi(t)+x) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))x\|_X}{\|x\|_X} \epsilon$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} + 2M\omega^{-1}\rho(\epsilon)\epsilon,$$

onde usamos (6). Escolhendo ϵ tal que $2M\omega^{-1}\rho(\epsilon)\epsilon < \frac{\epsilon}{2}$ temos que $\mathcal{T}$ leva B_ϵ nele mesmo.

Usando (10) não é difícil ver que, para ϵ pequeno,

$$\|\mathcal{T}(\phi_1)(t) - \mathcal{T}(\phi_2)(t)\|_X \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X.$$

Segue que existe uma única solução $\nu : \mathbb{R} \to X$ of (12) em B_ϵ.

Como $\eta = \nu + \xi : \mathbb{R} \to X$ está uniformemente próxima a $\xi : \mathbb{R} \to X$, segue de (10) e que, para ϵ pequeno,

$$L_g(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_x g(s,\eta(s)) L_g(s,\tau) \ ds$$

$$= L_f(t,\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[D_x g(s,\eta(s)) - D_x f(s,\xi(s))][L_g(s,\tau) - L_f(s,\tau)] \mathrm{d}s$$

$$+ \int_\tau^t L_f(t,s)[D_x g(s,\eta(s)) - D_x f(s,\xi(s))] L_f(s,\tau) \, \mathrm{d}s$$

tem dicotomia exponencial e consequentemente η é hiperbólica.$\square$