Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Vigésima Quarta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

13 de Novembro de 2023

Soluções globais hiperbólicas

Seja X um espaço de Banach e considere um processo de evolução não-linear $\{T(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{C}(X)$.

A seguir estudaremos o comportamento deste processo de evolução não-linear próximo a soluções globais hiperbólicas.

Processos de Evolução Semilineares

Se $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é contínua na primeira variável e localmente Lipschitz contínua na segunda variável e $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ é um processo de evolução linear.

É fácil ver que a equação integral

$$y(t,\tau,x) = L(t,\tau)x + \int_\tau^t L(t,s)f(s,y(s,\tau,x))\,\mathrm{d}s. \qquad (1)$$

tem uma única solução local; isto é, para cada $(\tau,x) \in \mathbb{R} \times X$ existe um $\sigma = \sigma(\tau,x) > 0$ e uma única função contínua $y(\cdot,\tau,x) : [\tau,\tau+\sigma) \to X$ que satisfaz (1) para todo $t \in [\tau,\tau+\sigma)$.

Se supomos que $\sigma(\tau, x) = +\infty$ para cada $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times X$ e se definimos $T_f(,\tau)x = y(t, \tau, x)$, $t \in [\tau, \infty)$, então $\{T_f(,\tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}\}$ é um processo de evolução.

Neste caso, nos referiremos a $\{T_f(,\tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}\}$ como o processo de evolução semilinear obtido pela perturbação do processo de evolução linear $\{L(t, \tau) : (t, \tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ pela função não-linear $f : \mathbb{R} \times X \to X$; isto é,

$$T_f(,\tau)x = L(t, \tau)x + \int_\tau^t L(t, s) f(s, S_f(s, \tau)x)\, \mathrm{d}s. \qquad (2)$$

Soluções globais hiperbólicas são isoladas

Seja $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função continuamente diferenciável. Suponha que f, juntamente com o processo de evolução linear $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$, definam um processo de evolução semilinear $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}\}$ e que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global para $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$.

Consideramos o processo de evolução linear $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_f(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_x f(s,\xi(s)) L_f(s,\tau)\, \mathrm{d}s. \qquad (3)$$

Definição

Diremos que $\xi : \mathbb{R} \to X$ *é uma solução global hiperbólica para* $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ *se* $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ *tem dicotomia exponencial.*

Observação

Se $\phi, \xi : [\tau, \tau+\sigma] \to X$ forem soluções da equação

$$\phi(t) = L(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L(t,s) f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s,$$

então

$$\phi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s. \quad (4)$$

De fato, se

$$\psi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s,$$

então

$$
\begin{aligned}
&\psi(t)-\phi(t)\\
&=\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}s-\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))\phi(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t\int_s^t L(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))L_f(\theta,s)\,\mathrm{d}\theta[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s\\
&=\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_f(s,\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}s-\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))\phi(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_\tau^t L(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))\int_\tau^\theta L_f(\theta,s)[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\\
&=\int_\tau^t L(t,s)D_xf(s,\xi(s))[\psi(s)-\phi(s)]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall concluímos que $\phi(t)=\psi(t)$ para todo $t\in[\tau,\tau+\sigma]$.

Caracterização das soluções globais limitadas

Suponha que $\xi : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global hiperbólica limitada para $\{T_f(,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$. Então $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ dado por (3) tem dicotomia exponencial com constante M, expoente ω e projeções $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$. De (4), da limitação de $\xi : \mathbb{R} \to X$ e da dicotomia de $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$ temos que, para $t \geqslant \tau$, se $\phi : \mathbb{R} \to X$ for uma solução limitada de (2), então

$$\begin{aligned} Q(t)\phi(t) &= L_f(t,\tau)Q(\tau)\phi(\tau) \\ &\quad + \int_\tau^t L_f(t,s)Q(s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$L_f(\tau,t)Q(t)\phi(t) = Q(\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(\tau,s)Q(s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Fazendo $t \to \infty$ temos que

$$Q(t)\phi(t) = -\int_t^\infty L_f(t,s)Q(s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s,$$

$t \in \mathbb{R}$.

Semelhantemente,

$$\begin{aligned}(I-Q(t))\phi(t) &= L_f(t,\tau)(I-Q(\tau))\phi(\tau)\\ &\quad+\int_\tau^t L_f(t,s)(I-Q(s))[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

fazendo $\tau \to -\infty$ temos que

$$(I-Q(t))\phi(t)=\int_{-\infty}^t L_f(t,s)(I-Q(s))[f(s,\phi(s))-D_xf(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Isto implica que

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t,s)[f(s,\phi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\phi(s)]\,\mathrm{d}s$$

onde

$$G_f(t,s) = \begin{cases} L_f(t,s)(I - Q(s)), & t \geqslant s \\ -L_f(t,s)Q(s), & t \leqslant s \end{cases} \tag{5}$$

Soluções globais hiperbólicas são isoladas

Suponha também que $\rho(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$, onde

$$\rho(\epsilon) := \sup_{\|x\|\leqslant\epsilon} \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|f(t,\xi(t)+x)-f(t,\xi(t))-D_x f(t,\xi(t))x\|_X}{\|x\|_X}. \quad (6)$$

Com a caracterização de soluções globais limitadas e a hipótese acima, é fácil ver que $\xi : \mathbb{R} \to X$ é isolada no espaço $C_b(\mathbb{R}, X)$ das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em X.

De fato: Se $\phi : \mathbb{R} \to X$ for uma solução global limitada de (2) satisfazendo $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X \leqslant \epsilon$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X \leqslant 2M\rho(\epsilon)\omega^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t) - \xi(t)\|_X.$$

Se $\epsilon > 0$ é tal que $2M\rho(\epsilon)\omega^{-1} < 1$ concluímos que $\phi(t) = \xi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Permanência e Continuidade por Perturbações

Seja $f:\mathbb{R}\times X\to X$ uma função continuamente diferenciável, $\{L(t,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ um processo de evolução linear. Suponha que f e $\{L(t,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ definam um processo de evolução semilinear; isto é, para todo $t\geqslant\tau$ e $\forall x\in X$

$$T_f(,\tau)x = L(t,\tau)x+\int_\tau^t L(t,s)f(s,S_f(s,\tau)x)\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

e que $\xi:\mathbb{R}\to X$ seja uma solução global hiperbólica limitada para $\{T_f(,\tau):(t,\tau)\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$.

Assim, o processo de evolução linear definido por

$$L_f(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_x f(s,\xi(s)) L_f(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

tem dicotomia exponencial com constante M e expoente $\omega > 0$ e

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t,s)[f(s,\xi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\xi(s)]\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Se $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\xi(t)\|_X < M_1 < \infty$ e $0 < \epsilon < M_1 - \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\xi(t)\|_X$, suponha que

$$\sup_{\|x\|\leqslant M_1} \|f(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty, \tag{9}$$

que

$$\sup_{\|x\|\leqslant M_1} \|f(t,x)-g(t,x)\|_X+\|D_x f(t,x)-D_x g(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\epsilon\omega}{4M}. \tag{10}$$

e que g e $\{L(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ definam um processo de evolução semilinear $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$.

Então, $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem uma única solução global hiberbólica limitada $\eta : \mathbb{R} \to X$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t) - \eta(t)\|_X < \epsilon.$$

De fato, se $y : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada de $\{S_g(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= L_f(t,\tau)y(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[g(s,y(s)) - D_x f(s,\xi(s))y(s)]\,\mathrm{d}s \\
\xi(t) &= L_f(t,\tau)\xi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[f(s,\xi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\xi(s)]\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{11}
$$

e, se definimos $\phi(t) = y(t) - \xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$
\phi(t) = L_f(t,\tau)\phi(\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{12}
$$

onde $\tilde{g}(t,\phi) = g(t,\phi(t) + \xi(t)) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))\phi(t)$.

Projetando (12) com $I - Q(t)$ e tomando o limite quando $\tau \to -\infty$ temos que

$$(I - Q(t))\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} L_f(t,s)(I - Q(s))\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Projetando (12) com $Q(t)$ temos que, para $t \geqslant \tau$,

$$Q(t)\phi(t) = L_f(t,\tau)Q(\tau)\phi(\tau) + \int_{\tau}^{t} L_f(t,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s$$

e, consequentemente,

$$L_f(\tau,t)Q(t)\phi(t) = Q(\tau)\phi(\tau) + \int_{\tau}^{t} L_f(\tau,s)Q(s)\tilde{g}(s,(\phi(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Tomando o limite quando $t \to \infty$ obtemos que

$$Q(\tau)\phi(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} L_f(\tau, s)Q(s)\tilde{g}(s, (\phi(s)))\,\mathrm{d}s$$

Daí, existe uma única solução global limitada de (12) em

$$B_\epsilon := \{\phi : \mathbb{R} \to X : \phi \text{ é contínua e } \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi(t)\|_X \leqslant \epsilon\}$$

para ϵ pequeno se, e somente se,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\phi)(t) &= -\int_{t}^{\infty} L_f(t, s)Q(s)\tilde{g}(s, (\phi(s)))\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t} L_f(t, s)(I - Q(s))\tilde{g}(s, (\phi(s)))\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_f(t, s)\tilde{g}(s, (\phi(s)))\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

tem um único ponto fixo em B_ϵ.

Usando a dicotomia exponencial de $\{L_f(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ e o Princípio da Contração de Banach obtemos que existe uma única solução global limitada de (12) em B_ϵ. De fato:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{T}(\phi)(t)\|_X \leqslant M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|t-s|} \|\tilde{g}(s,(\phi(s)))\|_X \,\mathrm{d}s \\
&\leqslant 2M\omega^{-1} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t,y(t)) - f(t,y(t))\|_X \\
&+ 2M\omega^{-1} \sup_{\|x\|\leqslant\epsilon} \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|f(t,\xi(t)+x) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))x\|_X}{\|x\|_X}\epsilon \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2} + 2M\omega^{-1}\rho(\epsilon)\epsilon,
\end{aligned}
$$

onde usamos (6). Escolhendo ϵ tal que $2M\omega^{-1}\rho(\epsilon)\epsilon < \frac{\epsilon}{2}$ temos que $\mathcal{T}$ leva B_ϵ nele mesmo.

Usando (10) não é difícil ver que, para ϵ pequeno,

$$\|\mathcal{T}(\phi_1)(t) - \mathcal{T}(\phi_2)(t)\|_X \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X.$$

Segue que existe uma única solução $\nu : \mathbb{R} \to X$ of (12) em B_ϵ.

Como $\eta = \nu + \xi : \mathbb{R} \to X$ está uniformemente próxima a $\xi : \mathbb{R} \to X$, segue de (10) e que, para ϵ pequeno,

$$L_g(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_x g(s,\eta(s)) L_g(s,\tau) \; ds$$

$$= L_f(t,\tau) + \int_\tau^t L_f(t,s)[D_x g(s,\eta(s)) - D_x f(s,\xi(s))][L_g(s,\tau) - L_f(s,\tau)] \mathrm{d}s$$

$$+ \int_\tau^t L_f(t,s)[D_x g(s,\eta(s)) - D_x f(s,\xi(s))] L_f(s,\tau) \, \mathrm{d}s$$

tem dicotomia exponencial e consequentemente η é hiperbólica. $\square$

Continuidade das soluções globais hiperbólicas

Nesta seção provaremos a continuidade das variedades instáveis relativamente a perturbações.
Para $i = 1, 2$, considere os problemas

$$T_{f_i}(t,\tau)x = L(t,\tau)x + \int_\tau^t L(t,s) f_i(s, T_{f_i}(s,\tau)x)\,\mathrm{d}s. \tag{13}$$

Suponha que $\xi_i : \mathbb{R} \to X$ seja uma solução global para $\{T_{f_i}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}\}$. Para cada ξ_i considere o processo de evolução linear $\{L_{f_i}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_\mathbb{R} \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$L_{f_i}(t,\tau) = L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_x f_i(s, \xi_i(s)) L_{f_i}(s,\tau)\,\mathrm{d}s.$$

Se $\xi_1 : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global hiperbólica de $\{T_{f_1}(t,\tau) : t \geq \tau\}$; isto é, $\{L_{f_1}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia exponencial com constante $M_1 > 0$ e expoente $\omega_1 > 0$, dados $M_2 > M_1$ e $0 < \omega_2 < \omega_1$, dos resultados anteriores, escolha $\epsilon > 0$ tal, se

$$\sup_{x \in X} \|f_1(t,x) - f_2(t,x)\|_X + \|D_x f_1(t,x) - D_x f_2(t,x)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \epsilon, \tag{14}$$

existe uma solução global $\xi_2 : \mathbb{R} \to X$ de $\{T_{f_2}(t,\tau) : t \geq \tau\}$ com

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_X \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

e $\{L_{f_2}(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem dicotomia com constante M_2 e expoente ω_2. Assim, $\{L_{f_i}(t,\tau)\}$ tem dicotomia com constante M_i, expoente $\omega_i > 0$ e projeções $\{Q_i(\cdot)\}$.

Terminologia e notação

Sabemos que, $y_i(t)$ é uma solução de (13) se, e somente se, $y_i(t) = x_i(t) + \xi_i(t)$ onde $x_i(t)$ satisfaz

$$x_i(t) = L_{f_i}(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)[f_i(s,x_i(s)+\xi_i(s)) - f_i(s,\xi_i(s)) - D_x f_i(s,\xi_i(s))x_i(s)]\mathrm{d}s. \tag{15}$$

Podemos decompor a solução $x_i(t)$ de (15) em $x_i(t) = x_i^+(t) + x_i^-(t)$ onde $x_i^+(t) = Q_i(t)(x_i(t))$ e $x_i^-(t) = (I - Q_i(t))(x_i(t))$.

Logo

$$
\begin{aligned}
x_i^+(t) &= L_{f_i}(t,\tau)x_i^+(\tau) + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)H(s,x_i^+(s),x_i^-(s))\,\mathrm{d}s \\
x_i^-(t) &= L_{f_i}(t,\tau)x_i^-(\tau) + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)G(s,x_i^+(s),x_i^-(s))\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{16}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
&h_i(t,x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)) \\
&\qquad = f_i(t,x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)) - f_i(t,\xi_i(t)) - D_x f_i(t,\xi_i(t))(x_i^+ + x_i^-) \\
&\qquad H_i(t,x_i^+,x_i^-) = Q_i(t)h_i(t,x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)), \\
&\qquad G_i(t,x_i^+,x_i^-) = (I - Q_i(t))h_i(t,x_i^+ + x_i^- + \xi_i(t)).
\end{aligned}
$$

A continuidade das variedades instáveis

Teorema

Para $D>0$, $L>0$, $0<\theta<1$, $\rho>0$, H_i e G_i como antes, existe $\Sigma_i^u:\mathbb{R}\times X\to X$ tal que $Q_i(\Sigma_i^u(t,x))=0$ e $\Sigma_i^u(t,x)=\Sigma_i^u(t,Q_i(t)x)$, para todo $(t,x)\in\mathbb{R}\times X$ e a variedade instável $W_i^u(0,0)$ do equilíbrio $(0,0)$ de (16) é dada por

$$W_i^u(0,0)=\{(\tau,w)\in\mathbb{R}\times X : w=(Q_i(\tau)w,\Sigma_i^u(\tau,Q_i(\tau)w))\},$$

onde, para todo $x\in X$,

$$\Sigma_i^u(\tau,x)=\int_{-\infty}^{\tau} L_{f_i}(\tau,s)(I-Q_i(s))G_i(s,x^+(s),\Sigma_i^u(s,x_i^+(s)))\,\mathrm{d}s,$$

e $x_i^+ : (-\infty, \tau] \to X$ *é a solução de*

$$\begin{aligned} x_i^+(t) &= L_{f_i}(t,\tau)Q_i(\tau)x \\ &\quad + \int_\tau^t L_{f_i}(t,s)Q_i(s)h_i(s, x_i^+(s), \Sigma_i^u(s, x_i^+(s)))\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{17}$$

Além disso, se

$$\left[\frac{\rho M}{\omega_2} + \frac{\rho^2 M^2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2 - \rho M(1+L))}\right] \leqslant \frac{1}{2} \tag{18}$$

então,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in X} \{\|Q_2(t)x - Q_1(t)x\|_X + \|\Sigma_2^u(t,x) - \Sigma_1^u(t,x)\|_X\} \stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Prova: Somente precisamos provar que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{x\in X}\|\Sigma_2^u(t,x)-\Sigma_1^u(t,x)\|_X \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Se $x\in X$, então

$$\begin{aligned}
&\Sigma_2^u(\tau,Q_2(\tau)x)-\Sigma_1^u(\tau,Q_1(\tau)x)\\
&=\int_{-\infty}^{\tau}[L_{f_2}(\tau,s)(I-Q_2(s))-L_{f_1}(\tau,s)(I-Q_1(s))]h_2(s,x_2^+,\Sigma_2^u(s,x_2^+))\mathrm{d}s\\
&+\int_{-\infty}^{\tau}L_{f_1}(\tau,s)(I-Q_1(s))[h_2(s,x_2^+,\Sigma_2^u(s,x_2^+))-h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))]\mathrm{d}s\\
&+\int_{-\infty}^{\tau}L_{f_1}(\tau,s)(I-Q_1(s))[h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))-h_1(x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))]\mathrm{d}s\\
&=: I_1(\epsilon)+I_2(\epsilon)+I_3(\epsilon).
\end{aligned} \tag{19}$$

Como $\sup_{s\in\mathbb{R}} \|Q_1(s) - Q_2(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 2\frac{M_1+M_2}{\omega_1+\omega} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e

$$L_{f_2}(t,\tau)(I - Q_2(\tau)) - L_{f_1}(t,\tau)(I - Q_1(\tau))$$

$$= L_{f_1}(t,\tau)[Q_1(\tau) - Q_2(\tau)] + \int_\tau^t L_{f_1}(t,s)B(s)L_{f_2}(s,\tau)(I - Q_2(\tau))\,\mathrm{d}s, \;\; t \geq \tau.$$

Disto obtemos que existem constantes $\bar{M}$ e $\bar{\omega}$ tal que

$$\|L_{f_2}(t,\tau)(I-Q_2(\tau)) - L_{f_1}(t,\tau)(I-Q_1(\tau))\| \leqslant \bar{M}e^{\bar{\omega}(t-\tau)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|$$

Por outro lado, se $M = \max\{M_1, M_2\}$ e $\omega = \min\{\omega_1, \omega_2\}$,

$$\|L_{f_2}(t,\tau)(I-Q_2(\tau)) - L_{f_1}(t,\tau)(I-Q_1(\tau))\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\omega(t-\tau)}.$$

Por interpolação obtemos que $I_1(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Além disso, $I_3(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ de (14).

A seguir estimamos $I_2(\epsilon)$. Recorde $x_i^+ : (-\infty, \tau] \to X$ satisfaz (17). Usando a Desigualdade de Gronwal

$$\|x_i^+(t)\|_X \leqslant M_i e^{(\omega_i - \rho M_i(1+L))(t-\tau)} \|x\|_X. \tag{20}$$

Como

$$
\begin{aligned}
&\|I_2(\epsilon)\| \\
&\leqslant \rho M_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)} \big[\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\| + \|\Sigma_2^u(s,x_2^+(s))-\Sigma_1^u(s,x_1^+(s))\|\big]\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \rho M_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)} \big[(1+L)\|x_2^+(s)-x_1^+(s)\| + \|\!|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u|\!\|\big]\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \rho M_1(1+L) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau-s)} \|x_2^+(s)-x_1^+(s)\|\,\mathrm{d}s + \frac{\rho M_1}{\omega_1} \|\!|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u|\!\|,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\|\!|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u|\!\| = \sup_{s\in\mathbb{R}} \sup_{x\in X} \|\Sigma_2^u(s,x) - \Sigma_1^u(s,x)\|. \tag{21}
$$

Segue de (19) que

$$\begin{aligned}\|\Sigma_2^u(\tau, Q_2(\tau)x) - \Sigma_1^u(\tau, Q_1(\tau)x)\| \leqslant o(1) + \frac{\rho M_1}{\omega_1} \|\!|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\|\!| \\ + \rho M_1(1+L)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\omega_1(\tau - s)} \|x_2^+(s) - x_1^+(s)\|_X \, \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{22}$$

A seguir temos que

$$
\begin{aligned}
\|x_2^+(t) - x_1^+(t)\|_X &\leqslant \left\| L_{f_2}(t,\tau)Q_2(\tau)x - L_{f_1}(t,\tau)Q_1(\tau)x \right\|_X \\
&+ \left\| \int_\tau^t [L_{f_2}(t,s)H_2(s,x_2^+,\Sigma_2^u(s,x_2^+)) - L_{f_1}(t,s)H_1(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))]\,\mathrm{d}s \right\|_X \\
&\leqslant \left\| L_{f_2}(t,\tau)Q_2(\tau)x - L_{f_1}(t,\tau)Q_1(\tau)x \right\|_X \\
&+ \left\| \int_\tau^t [L_{f_2}(t,s)Q_2 - L_{f_1}(t,s)Q_1]h_1(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))\,\mathrm{d}s \right\|_X \\
&+ \left\| \int_\tau^t L_{f_2}(t,s)Q_2\left[h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+)) - h_1(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))\right]\,\mathrm{d}s \right\|_X \\
&+ \left\| \int_\tau^t L_{f_2}(t,s)Q_2\left[h_2(s,x_2^+,\Sigma_2^u(s,x_2^+)) - h_2(s,x_1^+,\Sigma_1^u(s,x_1^+))\right]\,\mathrm{d}s \right\|_X \\
&\leqslant o(1) + \rho M_2 \int_t^\tau e^{\omega_2(t-s)}[(1+L)\|x_2^+ - x_1^+\|_X + |\!|\!| \Sigma_2^u - \Sigma_1^u |\!|\!|_X]\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant o(1) + \frac{\rho M_2}{\omega_2} |\!|\!| \Sigma_2^u - \Sigma_1^u |\!|\!| + \rho M_2(1+L) \int_t^\tau e^{\omega_2(t-s)} \|x_2^+ - x_1^+\|_X\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

e, da desigualdade de Gronwall,

$$\|x_2^+(t) - x_1^+(t)\|_X \leqslant \left(o(1) + \frac{\rho M_2}{\omega_2} \|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\| \right) e^{(\omega_2 - \rho M_2(1+L))(t-\tau)}. \tag{23}$$

Substituindo (23) em (22) obtemos que

$$\begin{aligned}
&\|\Sigma_2^u(\tau, Q_2(\tau)x)-\Sigma_1^u(\tau, Q_1(\tau)x)\|_X \leqslant o(1)+\frac{\rho M_1}{\omega_1}\|\!|\Sigma_2^u-\Sigma_1^u\|\!|\\
&+\rho M_1(1+L)\int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\omega_1+\omega_2-\rho M_2(1+L))(\tau-s)}\Big[o(1)+\frac{\rho M_2}{\omega_2}\|\!|\Sigma_2^u-\Sigma_1^u\|\!|\Big]\mathrm{d}s\\
&\leqslant o(1)+\left[\frac{\rho M_1}{\omega_1}+\frac{\rho^2 M_1 M_2(1+L)}{\omega_2(\omega_1+\omega_2-\rho M_2(1+L))}\right]\|\!|\Sigma_2^u-\Sigma_1^u\|\!|\\
&=: o(1)+\left[\frac{\rho M_2}{\omega_2}+\frac{\rho^2 M_1 M_2(1+L)}{\omega_2(2\omega_2-\rho M_2(1+L))}\right]\|\!|\Sigma_2^u-\Sigma_1^u\|\!|.
\end{aligned} \tag{24}$$

Segue de (18) que $\tilde{\theta} = \left[\frac{\rho M_2}{\omega_2} + \frac{\rho^2 M_1 M_2 (1+L)}{\omega_2(2\omega_2 - \rho M_2(1+L))}\right] \leqslant \frac{1}{2}$ e de (24) que

$$\|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\| \leqslant o(1) + \tilde{\theta} \|\Sigma_2^u - \Sigma_1^u\|, \tag{25}$$

o que completa a prova.□

As variedades instáveis locais

De (20) e das propriedades de Σ^{u} obtemos que existe $\rho' < \rho$ de modo que toda a solução sobre a variedade instável local (em $B_{\rho'}(0,0)$) nunca deixe $B_\rho(0,0)$. Desta forma, a variedades instável local também é dada como um gráfico e se comporta de maneira contínua com o parâmetro.

Aplicação à continuidade de atratores

Teorema

Seja Λ *um espaço métrico,* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* Λ *com* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$. *Considere a família* $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, $n \in \mathbb{N}$, *de processos de evolução. Suponha que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tenha um atrator pullback* $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *e que (1), (2) e (3) estejam satisfeitas.*
Se

> *Existe uma seqüência de soluções separadas do passado* $\{\xi_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $\{\mathcal{A}_{\lambda_0}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *tal que*

$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*(\cdot))(t)}.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma seqüência $\{\xi^*_{j,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $\xi^*_{j,n} : \mathbb{T} \to X$ solução global de $\{S_{\lambda_n}(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tal que, o conjunto instável local de $\xi^*_{j,n}$ se comporta continuamente quando $n \to \infty$; isto é, existem $\delta_j > 0$ e $t_j \in \mathbb{T}$ tais que,

$$\mathrm{dist}_H(W^u_{\delta_j}(\xi^*_j)(t), W^u_{\delta_j}(\xi^*_{j,n})(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\ t \leqslant t_j.$$

Então a família $\{\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), t \in \mathbb{T}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é semicontínua superiormente e inferiormente; isto é, para cada intervalo limitado I de $\mathbb{T}$

$$\sup_{t\in I}\, [\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}(t), \mathcal{A}_{\lambda_0}(t)) + \mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}(t), \mathcal{A}_{\lambda_n}(t))] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$