

# Sistemas Dinâmicos Não Lineares

## Vigésima Terceira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

08 de Novembro de 2023

# Separação Exponencial e Dicotomias

## Definição (Separação Exponencial)

Um processo de evolução linear  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$  tem **separação exponencial**, com constante  $M \geq 1$ , expoentes  $\gamma, \rho \in \mathbb{R}$ , com  $\gamma > \rho$ , e família de projeções  $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ , se

- i)  $Q(t)L(t, \tau) = L(t, \tau)Q(\tau)$ , para todo  $t \geq \tau$ ,
- ii)  $L(t, \tau) : \text{Im}(Q(\tau)) \rightarrow \text{Im}(Q(t))$  é um isomorfismo, com inversa denotada por  $L(\tau, t)$ ,
- iii) a seguinte estimativa vale

$$\begin{aligned} \|L(t, \tau)Q(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq Me^{-\rho(t-\tau)}, & t \leq \tau, \\ \|L(t, \tau)(I - Q(\tau))\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq Me^{-\gamma(t-\tau)}, & t \geq \tau. \end{aligned} \quad (1)$$

# Variedades Invariantes

Seja  $X$  um espaço de Banach  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  um processo de evolução linear e  $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  uma função tal que  $f(t, 0) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e uniformemente Lipschitz contínua na segunda variável com constante  $\ell > 0$ , ou seja,  $\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq \ell \|u - \tilde{u}\|$ , para todo  $(t, u), (t, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times X$ .

Defina o processo de evolução não linear  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\} \subset \mathcal{C}(X)$  dado pela fórmula da variação das constantes, isto é,

$$T(t, \tau)u = L(t, \tau)u + \int_{\tau}^t L(t, s)f(s, T(s, \tau)u) ds, \quad t \geq \tau, u \in X. \quad (2)$$

## Teorema (1)

Suponha que o processo de evolução linear  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  tenha separação exponencial, com constante  $M \geq 1$ , expoentes  $\gamma > \rho$  e família de projeções  $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Se  $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  é contínua,  $f(t, 0) = 0$ ,  $f(t, \cdot) : X \rightarrow X$  é Lipschitz contínua com constante  $\ell > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e

$$\frac{\gamma - \rho}{\ell} > \max\{M^2 + 2M + \sqrt{8M^3}, 3M^2 + 2M\}, \quad (3)$$

então existe uma função contínua

$$\begin{aligned} \Sigma^* : \mathbb{R} \times X &\rightarrow X \\ (t, u) &\mapsto \Sigma^*(t, u) \end{aligned} \quad (4)$$

tal que  $\Sigma^*(t, u) = \Sigma^*(t, Q(t)u) = (I - Q(t))\Sigma^*(t, u)$  e  $\Sigma^*(t, 0) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Além disso,  $\Sigma^*(t, \cdot) : X \rightarrow X$  é Lipschitz contínua com constante Lipschitz  $\kappa = \kappa(\gamma, \rho, \ell, M) > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , isto é,  
 $\|\Sigma^*(t, u) - \Sigma^*(t, \tilde{u})\| \leq \kappa \|u - \tilde{u}\|$ , para todo  $(t, u), (t, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times X$ .

Ainda mais, o gráfico de  $\Sigma^*(t, \cdot)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ , dado por

$$\mathcal{M}(t) := \{u \in X : u = q + \Sigma^*(t, q), q \in \text{Im}(Q(t))\}, \quad (5)$$

é uma variedade invariante para o processo de evolução não linear  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$  dado por (2).

Em outras palavras, a família  $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$  é invariante e, se

$$P_{\Sigma^*}(t)u := Q(t)u + \Sigma^*(t, Q(t)u), \quad (t, u) \in \mathbb{R} \times X$$

é a projeção não linear sobre  $\mathcal{M}(t)$ .

(i)  $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$  tem crescimento controlado:, ou seja, para  $(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X$ ,  $t \leq \tau$ ,

$$\|T(t, \tau)P_{\Sigma^*}(\tau)u\| \leq M(1+\kappa)e^{-(\rho+\ell M(1+\kappa))(t-\tau)}\|P_{\Sigma^*}(\tau)u\|. \quad (6)$$

(ii)  $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$  satisfaz: para todo  $(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X$  e  $t \geq \tau$ ,

$$\|T(t, \tau)u - P_{\Sigma^*}(t)T(t, \tau)u\| \leq M\|(I - P_{\Sigma^*}(\tau))u\|e^{-\delta(t-\tau)}, \quad (7)$$

onde  $\delta := \gamma - M\ell - \frac{M^2\ell^2(1+\kappa)(1+M)}{\gamma - \rho - \ell M(1+\kappa)}$ . Se  $\delta > 0$ ,  $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$  é uma variedade inercial.

## Teorema (2)

Se o processo de evolução linear  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  admite separação exponencial, com constante  $M \geq 1$ , expoentes  $\gamma > \rho$  e projeções  $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$  e  $(\gamma - \rho)/\ell$  satisfaz (3), então existe função contínua

$$\Theta^* : \mathbb{R} \times X \rightarrow X \quad (8)$$

$$(t, u) \mapsto \Theta^*(t, u),$$

tal que  $\Theta^*(t, u) = \Theta^*(t, (I - Q(t))u) = Q(t)\Theta^*(t, u)$ , e  $\Theta^*(t, 0) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , que é uniformemente Lipschitz contínua com constante  $\kappa = \kappa(\gamma, \rho, \ell, M) > 0$ , isto é,  $\|\Theta^*(t, u) - \Theta^*(t, \tilde{u})\| \leq \kappa \|u - \tilde{u}\|$  para todo  $(t, u), (t, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times X$ .

Além disso, se  $P_{\Theta^*}(t)u := \Theta^*(t, (I - Q(t))u) + (I - Q(t))u$ , para todo  $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$ , a família dada por

$$\{Im(P_{\Theta^*}(t)) : t \in \mathbb{R}\} := \{\{P_{\Theta^*}^*(t, u) : u \in X\} : t \in \mathbb{R}\}, \quad (9)$$

é positivamente invariante e tal que

$$\|T(t, \tau)P_{\Theta^*}(\tau)u\| \leq M(1+\kappa)e^{-(\gamma - M\ell(1+\kappa))(t-\tau)}\|P_{\Theta^*}(\tau)u\|, \quad (10)$$

$t \geq \tau$ ,  $u \in X$ , and

$$\|u - P_{\Theta^*}(\tau)u\| \leq Me^{\hat{\delta}(t-\tau)}\|(I - P_{\Theta^*}(t))T(t, \tau)u\|, \quad (11)$$

$t \geq \tau$ ,  $u \in X$ , where  $\hat{\delta} = \rho + M\ell + \frac{M^2\ell^2(1+\kappa)(1+M)}{\gamma - \rho - M\ell(1+\kappa)}$ .

Ainda, se  $\gamma - M\ell(1 + \kappa) > 0$ ,  $\{Im(P_{\Theta^*}(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  é a variedade estável da variedade inercial  $\{Im(P_{\Sigma^*}(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ .



# A Propriedade do Ponto de Sela

Agora obtemos a propriedade do ponto de sela como uma consequência imediata dos Teoremas 1 e 2. Definimos o **conjunto instável** e o **conjunto estável** de uma solução global  $u_*$  de um processo de evolução não linear  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$  por

$$W^u(u_*) := \left\{ (\tau, u_0) \in \mathbb{R} \times X : \begin{array}{l} \text{existe solução } u : (-\infty, \tau] \rightarrow X \\ \text{tal que } u(\tau) = u_0 \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - u_*(t)\|_X = 0 \end{array} \right\} \quad (12a)$$

$$W^s(u_*) := \left\{ (\tau, u_0) \in \mathbb{R} \times X : \begin{array}{l} \text{existe solução } u : [\tau, \infty) \rightarrow X \\ \text{tal que } u(\tau) = u_0 \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - u_*(t)\|_X = 0 \end{array} \right\} \quad (12b)$$

## Corolário (1)

Suponha que o processo de evolução linear  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  tenha dicotomia exponencial com constante  $M \geq 1$ , expoente  $\gamma > 0$  e projeções  $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Se  $\ell > 0$  for suficientemente pequeno, existem funções contínuas  $\Sigma^u \in \mathcal{L}_\Sigma(\kappa)$  e  $\Theta^s \in \mathcal{L}_\Theta(\kappa)$  tais que as variedades instável e estável de  $u_* = 0$  são dadas por

$$W^u(0) = \{(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X : u = Q(\tau)u + \Sigma^u(\tau, Q(\tau)u)\}, \quad (13a)$$

$$W^s(0) = \{(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X : u = \Theta^s(\tau, (I - Q(\tau))u) + (I - Q(\tau))u\}. \quad (13b)$$

Além disso, soluções na variedade instável (resp. estável) decaem exponencialmente para zero para trás (resp. para diante) no tempo, de acordo com (6) e (10).

**Prova:** Para  $\ell > 0$  suficientemente pequeno, a condição (3) está satisfeita e  $\delta > 0$ , e portanto obtemos o gráfico de  $\Sigma^*$  do Teorema 1. Agora provamos que o conjunto instável  $W^u(0)$  definido em (12a) coincide com o gráfico de  $\Sigma^u := \Sigma^*$ .

Por um lado, de (6), o gráfico de  $\Sigma^u$  está contido no conjunto instável. Por outro lado, qualquer solução  $z : (-\infty, t] \rightarrow X$  que converge para trás para zero satisfaz, de (7),

$$\begin{aligned}\|z(t) - P_{\Sigma^*}(t)z(t)\| &= \|(I - Q(t))z(t) - \Sigma^u(t, Q(t)z(t))\| \\ &\leq M\|(I - P_{\Sigma^*}(\tau))z(\tau)\|e^{-\delta(t-\tau)}, \quad t \geq \tau.\end{aligned}$$

Como  $\delta > 0$ , obtemos que  $(I - Q(t))z(t) = \Sigma^u(t, Q(t)z(t))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e portanto qualquer elemento do conjunto instável deve estar no gráfico de  $\Sigma^u$ . O caso da variedade estável é análogo aplicando o Teorema 2.  $\square$

## Robusteza da Dicotomia Exponencial

Agora provamos a Robusteza da Dicotomia Exponencial, isto é, que dicotomias exponenciais são preservadas sob perturbação. Suponha que o processo de evolução linear  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  associado a

$$\dot{u} = A(t)u, \quad t \geq \tau, \quad u(\tau) = u_0, \quad (14)$$

tem dicotomia exponencial com constante  $M$  e expoente  $\gamma > 0$  e considere o processo de evolução linear  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$ , associado a uma perturbação desta equação, dada por

$$\dot{u} = A(t)u + B(t)u, \quad t \geq \tau, \quad u(\tau) = u_0, \quad (15)$$

onde  $t \mapsto B(t) \in \mathcal{L}(X)$  é fortemente contínua para  $t \in \mathbb{R}$  e  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \ell$ , para algum  $\ell > 0$  suficientemente pequeno.

Recorde que, como em (2), o processo de evolução  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$  associado a (15) é dado por

$$T(t, \tau) = L(t, \tau) + \int_{\tau}^t L(t, s)B(s)T(s, \tau) ds, \quad t \geq \tau. \quad (16)$$

Queremos provar que (15) tem dicotomia exponencial para  $\ell > 0$  suficientemente pequeno.

Este resultado pode ser obtido aplicando primeiramente os Teoremas 1 e 2, em uma configuração linear, para estabelecer a existência da variedade instável linear e sua variedade estável (ver Corolário 2) e então aplique-o a (15) com  $\gamma > 0$  e  $\rho = -\gamma$ .

## Corolário (2)

Se  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  tem dicotomia exponencial com constante  $M$ , expoente  $\gamma > 0$ , projeções  $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$  e (3) está satisfeita, então

Existem funções  $\Sigma^*, \Theta^* : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ ,  $\Sigma^*(t, \cdot), \Theta^*(t, \cdot) \in \mathcal{L}(X)$  e  $\|\Sigma^*(t, u)\| \leq \kappa \|u\|_X$ ,  $\|\Theta^*(t, u)\|_X \leq \kappa \|u\|_X$ ,  $\forall (t, u) \in \mathbb{R} \times X$  e algum  $\kappa = \kappa_\ell > 0$ ;

O gráfico  $\mathcal{G}(\Sigma^*)$  de  $\Sigma^*$  é uma família invariante e (7) vale, o gráfico  $\mathcal{G}(\Theta^*)$  de  $\Theta^*$  é uma família positivamente invariante;

O processo de evolução  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$  dado por (16) satisfaz

$$\begin{aligned} \|T(t, \tau)P_{\Sigma^*}(\tau)\| &\leq M(1+\kappa)e^{-(\rho+M\ell(1+\kappa))(t-\tau)}, \quad t \leq \tau, \\ \|T(t, \tau)P_{\Theta^*}(\tau)\| &\leq M(1+\kappa)e^{-(\gamma-M\ell(1+\kappa))(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(P_{\Sigma^*}(t)u = Q(t)u + \Sigma^*(t, Q(t)u) \text{ e } P_{\Theta^*}(t)u = \Theta^*(t, (I-Q(t))u) + (I-Q(t))u).$$

**Prova:** A prova é uma consequência direta dos Teoremas 1 e 2 no caso em que  $f(t, \cdot)$  é linear e uniformemente (relativamente a  $t$ ) limitada. Observe que a linearidade de  $\Sigma(t, \cdot)$  segue, pois  $f(t, \cdot)$  é linear e, portanto,  $G(\Sigma)$  dado também é linear. Consequentemente, o ponto fixo,  $G(\Sigma^*)(t, u) = \Sigma^*(t, u)$ , é linear. Da mesma forma,  $\tilde{G}$  também é linear, assim como  $\Theta^*$ .  $\square$

A seguir, mostramos a robusteza da dicotomia exponencial.

## Corolário

Se  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  tem dicotomia exponencial com constante  $M \geq 1$ , expoente  $\gamma > 0$  e projeções  $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$  e  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \ell$ , onde  $0 < \ell < \frac{2\gamma}{3M(M+1)}$ , então  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$  tem dicotomia

exponencial, ou seja, existem projeções  $\{Q_\ell(t) : t \in \mathbb{R}\}$  com  $T(t, \tau) : \text{Im}(Q_\ell(\tau)) \rightarrow \text{Im}(Q_\ell(t))$  sendo um isomorfismo,  $t \geq \tau$ , e

$$\|T(t, \tau)Q_\ell(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\ell e^{\gamma_\ell(t-\tau)}, \quad t \leq \tau \quad (18)$$

$$\|T(t, \tau)(I - Q_\ell(\tau))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\ell e^{-\gamma_\ell(t-\tau)}, \quad t \geq \tau,$$

onde  $M_\ell := M(1 + \kappa_\ell)/(1 - 2\kappa_\ell) > 1$  e  $\gamma_\ell := \gamma - \ell M(1 + \kappa_\ell) > 0$  para a constante de Lipschitz  $\kappa_\ell$  obtida no Corolário 2. Além disso,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|Q(t) - Q_\ell(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{2\kappa_\ell}{1 - 2\kappa_\ell}. \quad (19)$$



**Prova:** Se  $P_{\Theta^*}(t)u := (I - Q(t))u + \Theta^*(t, (I - Q(t))u)$  e  $P_{\Sigma^*}(t)u := Q(t)u + \Sigma^*(t, Q(t)u)$ , para  $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$ , onde  $\Sigma^*(t, \cdot), \Theta^*(t, \cdot) \in \mathcal{L}(X)$  foram obtidos no Corolário 2, com norma menor que  $\kappa_\ell > 0$ . Provaremos que  $X = \text{Im}(P_{\Sigma^*}(t)) \oplus \text{Im}(P_{\Theta^*}(t))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Isto é, mostraremos que, para cada  $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$ ,

$$\mathcal{I}_u(t) : X \rightarrow X \quad (20)$$

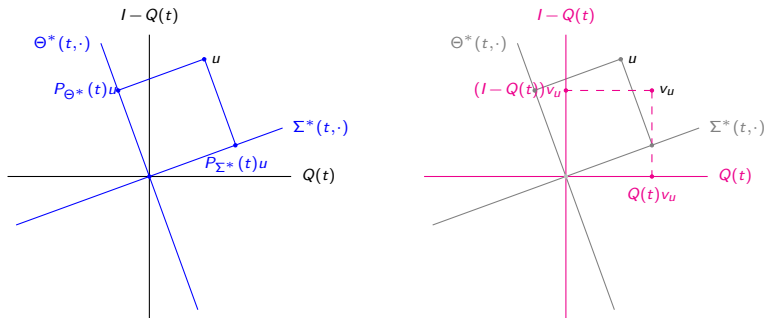
$$v \mapsto \mathcal{I}_u(t)v := u - \Sigma^*(t, v) - \Theta^*(t, v),$$

tem um único ponto fixo. Neste é o caso, para cada  $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$ , existe um único  $v_u \in X$  tal que  $\mathcal{I}_u(t)v_u = v_u$ , isto é,

$$u - \Sigma^*(t, v_u) - \Theta^*(t, v_u) = v_u = Q(t)v_u + (I - Q(t))v_u, \text{ or} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} u &= Q(t)v_u + \Sigma^*(t, v_u) + (I - Q(t))v_u + \Theta^*(t, v_u) \\ &= P_{\Sigma^*}(t)v_u + P_{\Theta^*}(t)v_u, \end{aligned} \quad (22)$$

Que é a única representação de  $u$  como uma soma de elementos de  $\text{Im}(P_{\Sigma^*}(t))$  e  $\text{Im}(P_{\Theta^*}(t))$  provando a decomposição desejada.



**Figura:** Dado  $u \in X$ , encontramos um único  $v_u \in X$  tal que  $P_{\Sigma^*}(t)u = Q(t)v_u + \Sigma^*(t, Q(t)v_u)$  e  $P_{\Theta^*}(t)u = (I - Q(t))v_u + \Theta^*(t, (I - Q(t))v_u)$ .

Para mostrar que  $\mathcal{I}_u(t)$  tem um único ponto fixo, observe que  $\mathcal{I}_u(t)$  é uma contração em  $X$ , pois

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_u(t)v - \mathcal{I}_u(t)\tilde{v}\| &= \|\Sigma^*(t, \tilde{v}) - \Sigma^*(t, v) + \Theta^*(t, \tilde{v}) - \Theta^*(t, v)\|, \\ &\leq 2\kappa\|v - \tilde{v}\|, \end{aligned} \quad (23)$$

para qualquer  $v, \tilde{v} \in X$ , já que os gráficos  $\Sigma^*, \Theta^*$  são Lipschitz com constante  $\kappa = \kappa_\ell > 0$ . Assim,  $\mathcal{I}_u(t)$  é uma contração para cada  $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$ , e  $\forall \kappa \in [\kappa_-, \min\{1/2, \min\{\kappa_+, \kappa_*\}\})$ , uma vez que a hipótese sobre  $\ell$  no Corolário 3 implica que  $\kappa_- < 1/2$  e, para qualquer desses  $\kappa$  temos uma contração.

Observe que, para cada  $u \in X$ , já que  $v_u$  é o único elemento de  $X$  que satisfaz  $v_u = u - \Sigma^*(t, v_u) - \Theta^*(t, v_u)$ , o mapa  $u \mapsto v_u$  é um operador linear limitado tal que

$$\|v_u\|_X \leq \frac{\|u\|_X}{1 - 2\kappa}. \quad (24)$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , defina  $Q_\ell(t) \in \mathcal{L}(X)$  a projeção linear sobre  $R(P_{\Sigma^*}(t))$  ao longo de  $R(P_{\Theta^*}(t))$ , que pode ser escrita como  $Q_\ell(t)u := P_{\Sigma^*}(t)v_u$  da primeira parte da prova.

Sua projeção complementar é dada por  $(I - Q_\ell(t))u = P_{\Theta^*}(t)v_u$ , para cada  $(t, u) \in \mathbb{R} \times X$ .

Do Corolário 2,  $\{R(Q_\ell(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  é invariante e  $\{R(I - Q_\ell(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  é positivamente invariante. Assim  $T(t, \tau)Q_\ell(\tau) = Q_\ell(t)T(t, \tau)$ ,  $t \geq \tau$ .

As desigualdades (17) e (24) implicam as estimativas em (18). Isso prova que  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$  tem dicotomia exponencial com constante  $M_\ell := M(1 + \kappa)/(1 - 2\kappa)$  e expoente  $\gamma_\ell := \gamma - M_\ell(1 + \kappa) > 0$ .

Agora, provamos (19), ou seja, proximidade das projeções  $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$  e  $\{Q_\ell(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , relativas às dicotomias exponenciais dos processos de evolução  $\{L(t, \tau) : t \geq \tau\}$  e sua perturbação  $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$ .

Se  $u \in X$  existe um único  $v_u \in X$  tal que  $u = v_u + \Sigma^*(t, v_u) + \Theta^*(t, v_u)$ . Portanto,  $Q(t)u = Q(t)v_u + \Theta^*(t, v_u)$ , já que  $Q(t)\Sigma^*(t, v_u) = 0$ , e  $Q_\ell(t)u = Q_\ell(t)v_u + \Sigma^*(t, v_u)$ , por definição de  $Q_\ell(t)$ .

Assim,

$$Q(t)u - Q_\ell(t)u = \Theta^*(t, v_u) - \Sigma^*(t, v_u). \quad (25)$$

Como os mapas  $\Sigma^*$ ,  $\Theta^*$  são Lipschitz com constante  $\kappa_\ell > 0$ , e devido à equação (24), obtemos a limitação (19).  $\square$