Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Vigésima Primeira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

01 de Novembro de 2023

Variedades Invariantes

Definição (Separação Exponencial)

Um processo de evolução linear $\{L(t,\tau): t \geqslant \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tem* **separação exponencial**, *com constante* $M \geqslant 1$, *expoentes* $\gamma, \rho \in \mathbb{R}$, *com* $\gamma > \rho$, *e família de projeções* $\{Q(t):\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$, *se*

i) $Q(t)L(t,\tau) = L(t,\tau)Q(\tau)$, *para todo* $t \geqslant \tau$,

ii) $L(t,\tau) : Im(Q(\tau)) \to Im(Q(t))$ *é um isomorfismo, com inversa denotada por* $L(\tau,t)$,

iii) *a seguinte estimativa vale*

$$\begin{aligned} \|L(t,\tau)Q(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant Me^{-\rho(t-\tau)}, \quad t \leqslant \tau, \\ \|L(t,\tau)(I - Q(\tau))\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant Me^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Teorema

Suponha que o processo de evolução linear $\{L(t,\tau): t \geqslant \tau\}$ *tenha separação exponencial, com constante* $M \geqslant 1$, *expoentes* $\gamma > \rho$ *e família de projeções* $\{Q(t): t \in \mathbb{R}\}$. *Se* $f: \mathbb{R} \times X \to X$ *é contínua,* $f(t,0) = 0$, $f(t,\cdot): X \to X$ *é Lipischitz contínua com constante* $\ell > 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *e*

$$\frac{\gamma - \rho}{\ell} > \max\{M^2 + 2M + \sqrt{8M^3}, 3M^2 + 2M\}, \tag{2}$$

então existe uma função contínua

$$\begin{aligned} \Sigma^* : \mathbb{R} \times X &\to X \\ (t,u) &\mapsto \Sigma^*(t,u) \end{aligned} \tag{3}$$

tal que $\Sigma^*(t,u) = \Sigma^*(t, Q(t)u) = (I - Q(t))\Sigma^*(t,u)$ *e* $\Sigma^*(t,0) = 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, $\Sigma^*(t,\cdot) : X \to X$ *é Lipschitz contínua com constante Lipschitz* $\kappa = \kappa(\gamma, \rho, \ell, M) > 0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*, isto é,* $\|\Sigma^*(t,u) - \Sigma^*(t,\tilde{u})\| \leqslant \kappa\|u - \tilde{u}\|$*, para todo* $(t,u),(t,\tilde{u}) \in \mathbb{R} \times X$*.*

Ainda mais, o gráfico de $\Sigma^*(t,.)$*, para cada* $t \in \mathbb{R}$*, dado por*

$$\mathcal{M}(t) := \{u \in X : u = q + \Sigma^*(t,q), q \in Im(Q(t))\}, \qquad (4)$$

é uma variedade invariante para o processo $\{T(t,\tau) : t \geqslant \tau\}$ *dado por*

$$T(t,\tau)u = L(t,\tau)u + \int_\tau^t L(t,s)f(s,T(s,\tau)u)\,ds, \quad t \geqslant \tau, u \in X. \quad (5)$$

Em outras palavras, a família $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é invariante e, se*

$$P_{\Sigma^*}(t)u := Q(t)u + \Sigma^*(t, Q(t)u), \ (t,u) \in \mathbb{R} \times X$$

é a projeção não linear sobre $\mathcal{M}(t)$*.*

(*i*) $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *tem crescimento controlado:, ou seja, para* $(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X$, $t \leqslant \tau$,

$$\| T(t,\tau) P_{\Sigma^*}(\tau) u \| \leqslant M(1+\kappa) e^{-(\rho+\ell M(1+\kappa))(t-\tau)} \| P_{\Sigma^*}(\tau) u \|. \quad (6)$$

(*ii*) $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *satisfaz: para todo* $(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X$ *e* $t \geqslant \tau$,

$$\| T(t,\tau) u - P_{\Sigma^*}(t) T(t,\tau) u \| \leqslant M \| (I - P_{\Sigma^*}(\tau)) u \| e^{-\delta(t-\tau)}, \quad (7)$$

onde $\delta := \gamma - M\ell - \frac{M^2 \ell^2 (1+\kappa)(1+M)}{\gamma - \rho - \ell M(1+\kappa)}$. *Se* $\delta > 0$, $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é uma variedade inercial.*

Prova: A prova será divida em duas partes. Primeiro mostraremos que existe uma função Σ^* cujo gráfico é uma variedade invariante e depois mostraremos que este gráfico satisfaz as condições de dominação exponencial.

Primeira parte: Dado $\kappa > 0$, considere o espaço métrico completo,

$$\begin{aligned}\mathcal{LB}_\Sigma(\kappa) := \Big\{ \Sigma \in C(\mathbb{R}\times X, X) : \sup_{t\in\mathbb{R}} \tfrac{\|\Sigma(t,u)-\Sigma(t,\tilde{u})\|}{\|u-\tilde{u}\|} \leqslant \kappa, \\ \Sigma(t,0)=0, \Sigma(t,u)=\Sigma(t,Q(t)u)\in N(Q(t), \forall t\in\mathbb{R} \Big\}\end{aligned} \tag{8}$$

com a métrica $\|\Sigma - \tilde{\Sigma}\| := \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{u\neq 0} \dfrac{\|\Sigma(t,u) - \tilde{\Sigma}(t,u)\|}{\|u\|}$.

Queremos encontrar $\Sigma \in \mathcal{LB}_\Sigma(\kappa)$ tal que, se $(\tau, \eta) \in \mathbb{R} \times X$, então a solução u de (5) com dado inicial $u(\tau) = Q(\tau)\eta + \Sigma(\tau, Q(\tau)\eta)$ pode ser escrita como $u(t) = q(t) + p(t)$, onde $p(t) = \Sigma(t, q(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sendo assim, q e p devem satisfazer

$$q(t) = L(t,\tau)Q(\tau)\eta + \int_\tau^t L(t,s)Q(s)f(s, q(s) + \Sigma(s, q(s)))ds, t \leqslant \tau \quad (9a)$$

$$p(\tau) = L(\tau, t)(I - Q(t))p(t) + \int_t^\tau L(\tau, s)(I - Q(s))f(s, q(s) + \Sigma(s, q(s))ds, \ t \leqslant \tau. \quad (9b)$$

Primeiramente obtemos um controle para o crescimento de $q(t)$. Como $\{L(t,s) : t \geqslant s\}$ tem separação exponencial, $f(t,0)=0$, f e Σ são Lipschitz com constantes ℓ e κ, respectivamente, obtemos

$$\|q(t)\| \leqslant Me^{-\rho(t-\tau)}\|\eta\| + \int_t^\tau \ell M e^{-\rho(t-s)}(1+\kappa)\|q(s)\|ds, \ t \leqslant \tau. \quad (10)$$

Do Lemma de Grönwall,

$$\|q(t)\| \leqslant Me^{(\rho+M\ell(1+\kappa))(\tau-t)}\|\eta\|, \quad t \leqslant \tau. \quad (11)$$

Como $p(t)=\Sigma(t,q(t))$ para $\Sigma \in \mathcal{LB}_\Sigma(\kappa)$, a estimativa (11) implica que $e^{-\gamma(\tau-t)}\|p(t)\| \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Da separação exponencial de $\{L(t,\tau) : t \geqslant \tau\}$, o primeiro termo em (9b) vai para zero quando $t \to -\infty$, resultando que

$$p(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} L(\tau, s)(I - Q(s))f(s, q(s) + \Sigma(s, q(s))ds. \qquad (12)$$

Sendo assim, provar que existe $\Sigma \in \mathcal{LB}_{\Sigma}(\kappa)$ que satisfaz $p(t) = \Sigma(t, q(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, é equivalente a encontrar um ponto fixo para a transformação,

$$G(\Sigma)(\tau, \eta) := \int_{-\infty}^{\tau} L(\tau, s)(I - Q(s))f(s, q(s) + \Sigma(s, q(s)))ds. \quad (13)$$

A seguir mostramos que $G : \mathcal{LB}_{\Sigma}(\kappa) \to \mathcal{LB}_{\Sigma}(\kappa)$ é uma contração.

Sejam $\eta, \tilde{\eta} \in X$, $\Sigma, \tilde{\Sigma} \in \mathcal{LB}_{\Sigma}(\kappa)$ com soluções $q(t), \tilde{q}(t)$ de (9a).

Logo, para $t \leqslant \tau$,

$$
\begin{aligned}
&\|q(t) - \tilde{q}(t)\| \leqslant Me^{\rho(\tau-t)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+ M\int_t^\tau e^{\rho(s-t)}\|f(s, q(s) + \Sigma(s, q(s))) - f(s, \tilde{q}(s) + \tilde{\Sigma}(s, \tilde{q}(s)))\|ds \\
&\leqslant Me^{\rho(\tau-t)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+ \ell M\int_t^\tau e^{-\rho(t-s)}\left(\|q(s) - \tilde{q}(s)\| + \|\Sigma(s, q(s)) - \tilde{\Sigma}(s, \tilde{q}(s))\|\right) ds \\
&\leqslant Me^{\rho(\tau-t)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+ \ell M\int_t^\tau e^{\rho(s-t)}\left(\|\Sigma(s, q(s))-\tilde{\Sigma}(s, q(s))\|+(1+\kappa)\|q(s) - \tilde{q}(s)\|\right) ds \\
&\leqslant Me^{\rho(\tau-t)}\|\eta-\tilde{\eta}\| \\
&+ \ell M\int_t^\tau e^{\rho(s-t)}\left((1+\kappa)\|q(s) - \tilde{q}(s)\| + |||\Sigma - \tilde{\Sigma}|||\|q(s)\|\right) ds.
\end{aligned}
$$

Então, de (11),

$$\begin{aligned}\|q(t)-\tilde{q}(t)\| \leqslant & Me^{\rho(\tau-t)}\|\eta-\tilde{\eta}\|+\ell M(1+\kappa)\int_t^\tau e^{\rho(s-t)}\|q(s)-\tilde{q}(s)\|ds \\ & +\ell M^2\|\eta\|\|\Sigma-\tilde{\Sigma}\|\int_t^\tau e^{(\rho+M\ell(1+\kappa))(\tau-s)}e^{\rho(s-t)}ds \\ & \leqslant Me^{\rho(\tau-t)}\|\eta-\tilde{\eta}\|+\ell M(1+\kappa)\int_t^\tau e^{\rho(s-t)}\|q(s)-\tilde{q}(s)\|ds \\ & +\frac{M\|\eta\|}{(1+\kappa)}\|\Sigma-\tilde{\Sigma}\|e^{(\rho+M\ell(1+\kappa))(\tau-t)},\end{aligned}$$

e, do Lema de Gronwall, para $t \leqslant \tau$,

$$\|q(t)-\tilde{q}(t)\| \leqslant M\left[\|\eta-\tilde{\eta}\|+\frac{\|\eta\|}{1+\kappa}\|\Sigma-\tilde{\Sigma}\|\right]e^{(\rho+2M\ell(1+\kappa))(\tau-t)}. \quad (14)$$

De (11) e (14)

$$
\begin{aligned}
&\|G(\Sigma)(\tau,\eta) - G(\tilde{\Sigma})(\tau,\tilde{\eta})\| \\
&\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-s)}\|f(s,q(s)+\Sigma(s,q(s)))-f(s,\tilde{q}(s)+\tilde{\Sigma}(s,\tilde{q}(s)))\|_X ds \\
&\leqslant \ell M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-s)} \Big((1+\kappa)\|q(s)-\tilde{q}(s)\| + |||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||\|q(s)\|\Big)\, ds \\
&\leqslant \ell M^2(1+\kappa)\left[\|\eta-\tilde{\eta}\| + \frac{\|\eta\|}{1+\kappa}|||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||\right]\int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\gamma-\rho-2M\ell(1+\kappa))(\tau-s)} ds \\
&\quad + \ell M^2\|\eta\||||\Sigma-\tilde{\Sigma}||| \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\gamma-\rho-M\ell(1+\kappa))(\tau-s)} ds
\end{aligned}
$$

De (2) e, da escolha de κ, $\gamma-\rho-2\ell M(1+\kappa)>0$ e as integrais acima são convergentes.

Logo,

$$\|G(\Sigma)(\tau,\eta) - G(\tilde{\Sigma})(\tau,\tilde{\eta})\| \leqslant \frac{\ell M^2\|\eta\|}{\gamma-\rho-\ell M(1+\kappa)}|||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||$$
$$+\frac{\ell M^2(1+\kappa)}{\gamma-\rho-2\ell M(1+\kappa)}\left[\|\eta-\tilde{\eta}\| + \frac{\|\eta\|}{1+\kappa}|||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||\right]$$
$$\leqslant \frac{\ell M^2(1+\kappa)}{\gamma-\rho-2\ell M(1+\kappa)}\|\eta-\tilde{\eta}\| + \frac{2\ell M^2}{\gamma-\rho-2\ell M(1+\kappa)}|||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||\|\eta\|.$$

Assim,

$$\|G(\Sigma)(\tau,\eta) - G(\tilde{\Sigma})(\tau,\tilde{\eta})\| \leqslant \kappa\|\eta-\tilde{\eta}\| + \nu|||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||\|\eta\|, \quad (15)$$

já que

$$\frac{\ell M^2(1+\kappa)}{\gamma-\rho-2\ell M(1+\kappa)} \leqslant \kappa, \quad (16a)$$

$$\nu := \frac{2\ell M^2}{\gamma-\rho-2\ell M(1+\kappa)} < 1. \quad (16b)$$

Podemos reescrever (16a) na forma $2M\kappa^2+(M^2+M-\frac{\gamma-\rho}{\ell}\kappa+M^2\leqslant 0$, que é um polinômio quadrático (em κ), admitindo duas raízes (de (2)) dadas por

$$\kappa_\pm := \frac{\frac{\gamma-\rho}{\ell} - M^2 - 2M \pm \sqrt{(\frac{\gamma-\rho}{\ell} - M^2 - 2M)^2 - 8M^3}}{4M}. \quad (17)$$

Além disso, a condição $\frac{\gamma-\rho}{\ell} > M^2 + 2M + \sqrt{8M^3}$ em (2) implica que $\frac{\gamma-\rho}{\ell} > M^2 + 2M$ e portanto $\kappa_+ > \kappa_- > 0$. Logo, (16a) está satisfeita para todo $\kappa \in [\kappa_-, \kappa_+]$.

A desigualdade (16b) vale para κ_-, de $\frac{\gamma-\rho}{\ell} > 3M^2 + 2M$ em (2). Além disso, podemos isolar κ em (16b), e portanto esta desigualdade está satisfeita para todo $\kappa < \kappa_* := \frac{1}{2M}\frac{\gamma-\rho}{\ell} - M - 1$.

De (2), $\frac{\gamma-\rho}{\ell} > 3M^2 + 2M$ e $\kappa_- < \kappa_*$. Portanto, ambas as condições em (16) estão satisfeitas para $\kappa \in [\kappa_-, \min\{\kappa_+, \kappa_*\})$.

Consequentemente, a desigualdade (15) com $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ implica que a imagem de G está contida em $\mathcal{LB}_{\Sigma}(\kappa)$ e, a desigualdade (15) com $\eta = \tilde{\eta}$, mostra que G é uma contração.

Portanto, G possui um único ponto fixo, $G(\Sigma^*) = \Sigma^*$. Isso estabelece a existência da variedade invariante e sua invariância.

Além disso, Σ^* sendo Lipschitz com constante $\kappa > 0$ e $\Sigma(t, 0) = 0$, juntamente com (10), implica a estimativa de crescimento (6) dentro da variedade invariante.

Isso completa a primeira parte da prova. Faremos a prova da segunda parte na próxima aula