Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Vigésima Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

30 de Outubro de 2023

Seja X um espaço de Banach. Uma noção crucial usada nesta seção é a de separação exponencial para um processo de evolução linear que permite dividir o espaço e em dois subespaços lineares invariantes relacionados ao crescimento/decaimento exponencial das soluções do processo.

Definição

Um processo de evolução linear $\{L(t,\tau): t \geqslant \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tem* **separação exponencial**, *com constante* $M \geqslant 1$, *expoentes* $\gamma, \rho \in \mathbb{R}$, *com* $\gamma > \rho$, *e família de projeções* $\{Q(t):\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$, *se*

i) $Q(t)L(t,\tau) = L(t,\tau)Q(\tau)$, *para todo* $t \geqslant \tau$,

ii) $L(t,\tau) : Im(Q(\tau)) \to Im(Q(t))$ *é um isomorfismo, com inversa denotada por* $L(\tau,t)$,

iii) *a seguinte estimativa vale*

$$\begin{aligned} \|L(t,\tau)Q(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant Me^{-\rho(t-\tau)}, \quad t \leqslant \tau, \\ \|L(t,\tau)(I - Q(\tau))\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant Me^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Em particular, se $\gamma = -\rho$, diremos que $\{L(t,\tau) : t \geqslant \tau\}$ tem **dicotomia exponencial** com constante $M \geqslant 1$, expoente $\gamma > 0$ e família de projeções $\{Q(t) : \ t \in \mathbb{R}\}$.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u + f(t,u), \ \ t > \tau, \\ u(\tau) &= u_0 \in X, \end{aligned} \tag{2}$$

Para $f(t,\cdot) \in C^1(X)$, uma solução global $u_* : \mathbb{R} \to X$ of (2) é dita **hiperbólica** se o processo de evolução linear dado por

$$L_*(t,\tau) := L(t,\tau) + \int_\tau^t L(t,s) D_u f(s, u_*(s)) L_*(s,\tau)\, ds$$

tem dicotomia exponencial.

Observação

Note que, o processo de evolução linear $\{L(t,\tau) : t \geqslant \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tem separação exponencial, com constante* $M \geqslant 1$*, expoentes* $\gamma, \rho \in \mathbb{R}$*, com* $\gamma > \rho$*,* $\gamma > 0$*, e família de projeções* $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ *se, e somente se,* $\{e^{(\gamma - \frac{\gamma-\rho}{2})(t-\tau)} L(t,\tau) : t \geqslant \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$ *tem dicotomia exponencial, com constante* $M \geqslant 1$*, expoente* $\frac{\gamma-\rho}{2} > 0$ *e família de projeções* $\{Q(t) : \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$*.*

Variedades Invariantes

O principal resultado desta seção dá condições suficientes para asegurar a existência de uma variedade invariante. Esta condição basicamente estabelece que o gap exponencial $\gamma - \rho$ deve ser grande quando comparado coma constante de Lipschitz ℓ de f. Se $\gamma > 0$ a variedade invariante será dita exponencialmente atratora e será chamada variedade inercial.

Considere o problema de valor inicial semilinear (2) com $f : \mathbb{R} \times X \to X$ contínua, $f(t, 0) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e uniformemente Lipschitz contínua na segunda variaável com constante de Lipschitz $\ell > 0$, isto é, $\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leqslant \ell \|u - \tilde{u}\|$ para todo $(t, u), (t, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times X$.

Suponha que a família de operadores lineares $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ (ilimitados) defina um processo de evolução linear $\{L(t,\tau) : t \geqslant \tau\} \subset \mathcal{L}(X)$, isto é, para cada $(\tau, u_0) \in \mathbb{R} \times X$, a solução do problema de valor inicial linear,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u, \quad t \geqslant \tau, \\ u(\tau) &= u_0 \in X, \end{aligned} \tag{3}$$

é dada por $u(t,\tau,u_0) = L(t,\tau)u_0$, para $t \geqslant \tau$, $L(t,t) = Id_X$, $L(t,s)L(s,\tau) = L(t,\tau)$, $t \geqslant s \geqslant \tau$ e $[\tau,\infty) \ni t \mapsto L(t,\tau)u_0 \in X$ é contínua para todo $(\tau, u_0) \in \mathbb{R} \times X$.

Com isto, as soluções de (2) definem um processo de evolução não linear $\{T(t,\tau) : t \geqslant \tau\} \subset \mathcal{C}(X)$ dado pela fórmula da variação das constantes, isto é,

$$T(t,\tau)u = L(t,\tau)u + \int_\tau^t L(t,s)f(s, T(s,\tau)u)\, ds, \quad t \geqslant \tau, u \in X. \tag{4}$$

Observação

Não há perda de generalidade com a hipótese $f(t,0)=0$. *Se* $f(t,\cdot):X\to X$ *é Frechét diferenciável,* $u_*:\mathbb{R}\to X$ *é uma solução global de* (2) *e* $\mathbb{R}\ni t\mapsto B(t):=f_u(t,u_*(t))\in\mathcal{L}(X)$ *é fortemente contínua, para uma solução* u *de* (2), $v(t):=u(t)-u_*(t)$ *satisfaz*

$$\begin{aligned}\dot v &= A(t)v+B(t)v+g(t,v),\ \ t>\tau,\\ v(\tau)&=v_0\in X,\end{aligned}\tag{5}$$

onde $g(t,v):=f(t,u_*(t)+v)-f(t,u_*(t))-f_v(t,u_*(t))v$ *e* $v_0:=u_0-u_*(\tau)$. *Note que* $g(t,0)=0\in X$ *e* $g_v(t,0)=0\in\mathcal{L}(X)$. *Em particular, quando consideramos o comportamento local em uma vizinhança tubular de* $u_*(\cdot)$, *é também possível dizer que* g *is Lipschitz com constante de Lipschitz* $\ell>0$ *pequena em uma pequena vizinhança de* $0\in X$. *Neste caso, é possível estenter* g *de modo que seja globalmente Lipschitz com mesma constante* $\ell>0$.

Teorema

Suponha que o processo de evolução linear $\{L(t,\tau): t \geqslant \tau\}$ *tenha separação exponencial, com constante* $M \geqslant 1$, *expoentes* $\gamma > \rho$ *e família de projeções* $\{Q(t): t \in \mathbb{R}\}$. *Se* $f: \mathbb{R} \times X \to X$ *é contínua,* $f(t,0) = 0$, $f(t,\cdot): X \to X$ *é Lipischitz contínua com constante* $\ell > 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *e*

$$\frac{\gamma - \rho}{\ell} > \max\{M^2 + 2M + \sqrt{8M^3}, 3M^2 + 2M\}, \tag{6}$$

então existe uma função contínua

$$\begin{aligned} \Sigma^* : \mathbb{R} \times X &\to X \\ (t,u) &\mapsto \Sigma^*(t,u) \end{aligned} \tag{7}$$

tal que $\Sigma^*(t,u) = \Sigma^*(t, Q(t)u) = (I - Q(t))\Sigma^*(t,u)$ *e* $\Sigma^*(t,0) = 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, $\Sigma^*(t,\cdot) : X \to X$ *é Lipschitz contínua com constante Lipschitz* $\kappa = \kappa(\gamma, \rho, \ell, M) > 0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*, isto é,* $\|\Sigma^*(t,u) - \Sigma^*(t,\tilde{u})\| \leqslant \kappa\|u - \tilde{u}\|$*, para todo* $(t,u),(t,\tilde{u}) \in \mathbb{R} \times X$*.*

Ainda mais, o gráfico de $\Sigma^*(t,.)$*, para cada* $t \in \mathbb{R}$*, dado por*

$$\mathcal{M}(t) := \{u \in X : u = q + \Sigma^*(t,q), q \in Im(Q(t))\}, \qquad (8)$$

é uma variedade invariante para $\{T(t,\tau) : t \geqslant \tau\}$ *dado por* (4)*.*

Em outras palavra, a família $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é invariante e, se*

$$P_{\Sigma^*}(t)u := Q(t)u + \Sigma^*(t, Q(t)u), \ (t,u) \in \mathbb{R} \times X$$

é a projeção não linear sobre $\mathcal{M}(t)$*.*

(i) $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *tem crescimento controlado: para* $(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X$, $t \leqslant \tau$,

$$\|T(t,\tau)P_{\Sigma^*}(\tau)u\| \leqslant M(1+\kappa)e^{-(\rho+\ell M(1+\kappa))(t-\tau)}\|P_{\Sigma^*}(\tau)u\|. \quad (9)$$

(ii) $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *satisfaz: para todo* $(\tau, u) \in \mathbb{R} \times X$ *e* $t \geqslant \tau$,

$$\|T(t,\tau)u - P_{\Sigma^*}(t)T(t,\tau)u\| \leqslant M\|(I - P_{\Sigma^*}(\tau))u\|e^{-\delta(t-\tau)}, \quad (10)$$

onde $\delta := \gamma - M\ell - \frac{M^2\ell^2(1+\kappa)(1+M)}{\gamma-\rho-\ell M(1+\kappa)}$. *Se* $\delta > 0$, $\{\mathcal{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é uma variedade inercial.*

Observação

Quando γ é um número positivo e é suficientemente grande ou a constante de Lipschitz ℓ é suficientemente pequena, a condição $\delta > 0$ se verifica. Note que a existência da variedade invariante é independente do sinal de γ e só depende da razão entre $\frac{\gamma-\rho}{\ell}$ entre a separação exponencial $\gamma - \rho$ e a constante de Lipschitz ℓ. Em particular, $\kappa \to 0$ se $\frac{\gamma-\rho}{\ell} \to +\infty$.