Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Décima Nona Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

25 de Outubro de 2023

Semicontinuidade superior de atratores pullback

Como vimos anteriormente, atratores pullback aparecem de modo natural no estudo dos atratores globais de semigrupos skew-product e de atratores uniformes para sistemas dinâmicos não autonomos.

Primeiramente provaremos um resultado de semicontinuidade superior para atratores pullback de processos de evolução gerais e depois enunciaremos os mesmos no caso específico dos atratores pullback que aparecem no contexto de atratores skew-product.

Para $\lambda \in \Lambda$ considere um processo $\mathcal{S}_\lambda = \{S_\lambda(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ em X com atrator pullback $\hat{A}_\lambda = \{A_\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Em toda esta seção, iremos supor que,

- para cada $K \subset X$ compacto, $\lambda_0 \in \Lambda$, $t \in \mathbb{R}$ e $T > 0$

$$\sup_{\tau\in[0,T]} \sup_{x\in K} d(S_\lambda(t, t-\tau)x, S_{\lambda_0}(t, t-\tau)x) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0, \qquad (1)$$

- para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{s\leqslant t} A_\lambda(s) \text{ seja limitado e} \qquad (2)$$

- para cada $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \in \Lambda$ e $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\lambda_n}(t)} \text{ seja compacto.} \qquad (3)$$

Vamos primeiramente enunciar o que significa *semicontinuidade superior de atratores pullback*.

Definição

Se $I \subset \mathbb{R}$, diremos que $\{A_\lambda(t)\colon t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ é **semicontínua superiormente** *em λ_0 se*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{t\in I} \operatorname{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(A_\lambda(t), A_{\lambda_0}(t)) = 0.$$

O lema a seguir desempenha um papel fundamental na prova dos resultados de semicontinuidade superior para atratores pullback.

Lemma (1)

Suponha que (1), (2) *e* (3) *estejam satisfeitas. Se* $\lambda_n \to \lambda_0$ *e* $\xi_n \colon \mathbb{R} \to X$ *for uma solução global de* $\mathcal{S}_{\lambda_n}$ *com* $\xi_n(t) \in A_{\lambda_n}(t)$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *então, existe uma solução global* $\xi_0 \colon \mathbb{R} \to X$ *de* $\mathcal{S}_{\lambda_0}$, *com* $\xi_0(t) \in A_{\lambda_0}(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *e uma subseqüência* $\{\xi_{n_k}\}$ *de* $\{\xi_n\}$ *tal que* ξ_{n_k} *converge para* ξ_0 *uniformemente em intervalos limitados de* $\mathbb{R}$.

Prova: Note que $\{\xi_n(0)\}$ é uma seqüência no compacto $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\lambda_n}(0)}$. Portanto, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_0$ de $\mathbb{N}$ tal que $\{\xi_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é convergente com limite $x_0 \in X$.

Seja $\xi_0(t) = S_{\lambda_0}(t,0)x_0$, $t \geqslant 0$. É claro de (1) que ξ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, converge para ξ_0 uniformemente em intervalos limitados de $\mathbb{R}^+$.

Suponha, por indução, que tenhamos construído a solução $\xi_0 \colon [-k, \infty) \to X$, $k \in \mathbb{N}$, de $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ e subcojuntos infinitos $\mathbb{N}_j$ de $\mathbb{N}_{j-1}$ tais que ξ_n, $n \in \mathbb{N}_j$, convirja para ξ_0, uniformemente em intervalos limitados de $[-j, \infty)$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Como a seqüência $\{\xi_n(-k-1)\}_{n \in \mathbb{N}_k}$ está no compacto $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_k} A_{\lambda_n}(-k-1)}$, existirá um subconjunto infinito $\mathbb{N}_{k+1}$ de $\mathbb{N}_k$ com $\{\xi_n(-k-1)\}_{n \in \mathbb{N}_{k+1}}$ convergente com limite x_{-k-1}.

Seja $\xi_0(t) = S_{\lambda_0}(t, -k-1)x_{-k-1}$, $t \in [-k-1, -k)$. Claramente, $\xi_0 \colon [-k-1, \infty) \to X$ será uma solução de $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ e ξ_n, $n \in \mathbb{N}_{k+1}$, convergirá para ξ_0, uniformemente em limitados de $[-k-1, \infty)$.

Este procedimento nos dá uma solução global $\xi_0 \colon \mathbb{R} \to X$ de $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ tal que $\{\xi_0(s) \colon s \leqslant t\}$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$, e portanto $\xi_0(t) \in A_{\lambda_0}(t)$. Além disso, se n_k for o $k-$ésimo elemento de $\mathbb{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$ então, $\{\xi_{n_k}\}$ converge para ξ_0, uniformemente em limitados de $\mathbb{R}$, o que completa a prova. $\square$

Sob as hipóteses acima, a semicontinuidade superior de atratores pullback será immediata, como mostraremos a seguir.

Teorema

Suponha que (1), (2) *e* (3) *estejam satisfeitas e seja* $\lambda_n \to \lambda_0$. *Então, para cada* $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(A_{\lambda_n}(t), A_{\lambda_0}(t)) \to 0.$$

Prova: Do Lema 1, se $x_n \in A_{\lambda_n}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, existirá

- subseqüência convergente $\{x_n\}$ com limite y (denotada da mesma maneira)
- solução global $\xi_n \colon \mathbb{R} \to X$ de $\{S_{\lambda_n}(t,s) \colon t \geqslant s\}$ com $\xi_n(t) = x_n$ e $\xi_{\lambda_n}(s) \in A_{\lambda_n}(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e
- solução global $\xi_0 \colon \mathbb{R} \to X$ de $\{S_{\lambda_0}(t,s) \colon t \geqslant s\}$ tal que $\xi_{\lambda_n}(\cdot)$ converge para ξ_0 uniformemente em subconjunto compactos de $\mathbb{R}$.

Em particular $y = \xi_0(t) \in A_{\lambda_0}(t)$ e o resultado segue. $\square$

Este último resultado prova a semicontinuidade superior para a família $\{A_\lambda(t)\}_{\lambda\in\Lambda}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo. O resultado a seguir assegura a semicontinuidade superior para a família $\{A_\lambda(t)\colon t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$, com $I \subset \mathbb{R}$ um limitado de $\mathbb{R}$ qualquer.

Teorema

Suponha que (1), (2) *e* (3) *estejam satisfeitas. Então, se* $I \subset \mathbb{R}$ *for limitado, a família* $\{A_\lambda(t) : t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ *será semicontínua superiormente em* $\lambda = \lambda_0$, *para cada* $\lambda_0 \in \Lambda$.

Proof: Mostremos, primeiramente, que se $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, $I \ni t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t^*$ então,

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(A_{\lambda_n}(t^*), A_{\lambda_n}(t_n)) \to 0, \tag{4}$$

e

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(A_{\lambda_n}(t_n), A_{\lambda_n}(t^*)) \to 0. \tag{5}$$

Provamos (4) por contradição. Se existe $\epsilon > 0$ e $x_n \in A_{\lambda_n}(t^*)$ com $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(x_n, A_{\lambda_n}(t_n)) \geqslant \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, do Teorema 1, existem soluções globais $\xi_n \colon \mathbb{R} \to X$ de $\mathcal{S}_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\xi_0 \colon \mathbb{R} \to X$ de $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ com $\xi_n(t) \in A_{\lambda_n}(t)$, $\xi_0(t) \in A_{\lambda_0}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\xi_n(t) \to \xi_0(t)$, uniformemente em limitados de $\mathbb{R}$ e $\xi_n(t^*) = x_n$.

Logo

$$d(x_n,\xi_n(t_n)) \leqslant d(x_n,\xi_0(t^*)) + d(\xi_0(t^*),\xi_0(t_n)) + d(\xi_0(t_n),\xi_n(t_n)) \to 0,$$

e

$$d(x_n, \xi_n(t_n)) \geqslant \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(x_n, A_{\lambda_n}(t_n)) \geqslant \epsilon \quad \text{for all } n \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição. A prova de (5) é semelhante (exercício).

Em seguida, note que, se $\lambda_n \to \lambda_0$ e $I \ni t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t^*$ então,

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(A_{\lambda_n}(t_n),A_{\lambda_0}(t_n)) &\leqslant \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(A_{\lambda_n}(t_n), A_{\lambda_n}(t^*)) \\ &\quad + \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(A_{\lambda_n}(t^*), A_{\lambda_0}(t^*)) + \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(A_{\lambda_0}(t^*), A_{\lambda_0}(t_n)).\end{aligned}$$

De (4), (5) e da semicontinuidade superior de $\{A_\lambda(t^*)\}_{\lambda\in\Lambda}$ em $\lambda = \lambda_0$, segue que

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(A_{\lambda_n}(t_n), A_{\lambda_0}(t_n)) \to 0. \tag{6}$$

Agora, se $\{A_\lambda(t)\colon t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ não for semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$, existirão $\epsilon > 0$ e seqüências $\lambda_n \to \lambda_0$ e $\{t_n\}$ in I tais que

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(A_{\lambda_n}(t_n), A_{\lambda_0}(t_n)) \geqslant \epsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como I é limitado, $\{t_n\}$ terá uma subseqüência convergente para altum $t^* \in \mathbb{R}$, o que contradiz (6) e completa a prova. $\square$

Semicontinuidade inferior de atratores skew-product

Vamos enunciar novamente os resultados de semicontinuidade inferior para uma família de atratores globais de semigrupos, no caso específico de uma família de semigrupos skew-product.

Suponha que (C1) e (C2) estejam satisfeitas. Sabemos que os atratores globais $\mathbb{A}_\lambda$ de Π_λ em $\mathbb{X}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, serão semicontínuos superiormente em λ_0, para cada $\lambda_0 \in \Lambda$.

Para provar a semicontinuidade inferior, precisaremos reproduzir, dentro de $\mathbb{A}_\lambda$, as mesmas *estruturas* que estão presentes em $\mathbb{A}_{\lambda_0}$.

Nas situações apresentadas aqui, dado um conjunto Π_λ-invariante isolado $\mathbb{L}$ in $\mathbb{X}_\lambda$, o conjunto $\pi_{\Sigma_\lambda}(\mathbb{L})$ sempre coincidirá com $\mathscr{S}_\lambda$. Este é o caso das perturbações de semigrupos.

Contudo, no que se segue, deixamos aberta a possiblidade que $\pi_{\Sigma_\lambda}(\mathbb{L})$ seja um subconjunto estrito de $\mathscr{S}_\lambda$, para podermos lidar com a estrutura interna do atrator global $\mathscr{S}_\lambda$, o que ainda não aparece muito frequentemente na literatura.

Agora recordamos a definição dos *conjuntos instáveis* de conjuntos Π_λ-invariantes isolados, isto é, dado um conjunto Π_λ-invariante isolado $\mathbb{L}$, o seu *conjunto instável* é dado por

$$W^u(\mathbb{L}) = \{(x,\sigma_\lambda) \in \mathbb{X}_\lambda : \text{ existe uma solução global } \psi \text{ de } \Pi_\lambda \text{ por } (x,\sigma_\lambda) \text{ tal que } \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_\lambda}(\psi(t),\mathbb{L}) = 0\}.$$

e o δ-*conjunto instável local* de $\mathbb{L}$ é dado por

$$W^u_\delta(\mathbb{L}) = \{(x,\sigma_\lambda) \in W^u(\mathbb{L}) : \text{ existe uma solução global } \psi \text{ de } \Pi_\lambda \text{ por } (x,\sigma_\lambda) \text{ com } \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_\lambda}(\psi(t),\mathbb{L}) \leqslant \delta \text{ para todo } t \leqslant 0 \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_\lambda}(\psi(t),\mathbb{L}) = 0\}.$$

Agora podemos enunciar o resultado sobre semicontinuidade inferior de atratores para semigrupos skew-product.

Teorema

Suponha que $(C1)$ *esteja satisfeita e que:*

(a) exista uma coleção disjunta de Π_λ*-invariantes isolados* $\{\mathbb{L}_{1,\lambda}, \cdots, \mathbb{L}_{n,\lambda}\}$ *para* $\lambda \in [0,1]$*;*

(b) exista $\delta > 0$ *tal que* $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_\lambda}(W_\delta^u(\mathbb{L}_{j,\lambda_0}), W_\delta^u(\mathbb{L}_{j,\lambda})) \xrightarrow{\lambda \to \lambda_0} 0$ *e*

(c) $\mathbb{A}_{\lambda_0} = \bigcup_{j=1}^n W^u(\mathbb{L}_{j,\lambda_0})$.

Então $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_\lambda}(\mathbb{A}_\lambda, \mathbb{A}_{\lambda_0}) + \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_\lambda}(\mathbb{A}_{\lambda_0}, \mathbb{A}_\lambda) \xrightarrow{\lambda \to \lambda_0} 0$.

A prova deste resultado é a mesma do resultado correspondente para semigrupos e será deixada como exercício. Note que, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{A}$ assim, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{A}_\lambda$ é relativamente compacto em $\mathbb{X}_M$.

Semicontinuidade inferior de atratores pullback

Vamos precisar da seguinte definição

Definição

Seja ξ^* uma solução global do processo $\mathcal{S}$.

- *O* **conjunto instável** *de ξ^* será*

$$W^u(\xi^*) = \{(\tau,\zeta) \in \mathbb{R} \times X : \text{ existe solução global } \xi \text{ de } \mathcal{S} \text{ com } \xi(\tau) = \zeta \text{ e } \lim_{t\to-\infty} d(\xi(t),\xi^*(t)) = 0\}.$$

- *A* **seção do conjunto instável de ξ^* em τ** *será*

$$W^u(\xi^*)(\tau) = \{\zeta : (\tau,\zeta) \in W^u(\xi^*)\}.$$

- *Uma* **$\delta-$seção local do conjunto instável de ξ^* em τ** *será*

$$W^u_\delta(\xi^*)(\tau) = \{\zeta \in W^u(\xi^*)(\tau) : \text{ existe solução global } \xi \text{ de } \mathcal{S} \text{ com } \xi(\tau) = \zeta,\ d(\xi(t),\xi^*(t)) < \delta,\ \forall\ t \leqslant \tau \text{ e } \lim_{t\to-\infty} d(\xi(t),\xi^*(t)) = 0\}.$$

Observação

Note que, se ξ^* for solução global de $\mathcal{S}$, então $\{W^u(\xi^*)(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ será $\mathcal{S}$-invariante. Além disso, se ξ^* for backwards bounded, isto é se $\bigcup_{s\leqslant t}\xi(s)$ for limitado em X, para cada $t\in\mathbb{R}$, e $\mathcal{S}$ tiver um atrator pullback $\hat{A}$ então, para cada $t\in\mathbb{R}$, $W^u(\xi^*)(t)\subset A(t)$.

Note ainda que, se $\mathcal{S}$ for um processo de evolução autônomo e ξ^* for um equilíbrio então, $W^u(\xi^*)(\tau)$ será independente de τ.

Definição

Duas soluções globais $\xi_1^*,\ \xi_2^*:\mathbb{R}\to X$ of $\mathcal{S}$ serão **backwards separated** *se $\limsup\limits_{t\to-\infty} d(\xi_1^*(t),\xi_2^*(t))>0$.*

Observação

Observamos que, se ξ_1^* e ξ_2^* não forem backwards separated então, $d(\xi_1^*(t), \xi_2^*(t)) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ e os conjuntos instáveis dessas soluções coincidem, isto é, $W^u(\xi_1^*) = W^u(\xi_2^*)$.

Com isto em mente estaremos interessados nos *conjuntos maximais de soluções globais backwards separated*.

Claramente, um conjunto maximal de soluções globais backwards separated não será único pois, qualquer solução ξ no conjunto maximal de soluções globais backwards separated poderá ser substituída, por qualquer outra no seu conjunto instável, mantendo a maximalidade.

Se um processo de evolução $\mathcal{S}$ tiver um atrator pullback (limitado para trás) $\hat{A}$ e $\mathfrak{S}$ denotar um conjunto maximal de soluções globais backwards bounded e backwards separated então,

$$A(t) = \bigcup_{\xi^* \in \mathfrak{S}} W^u(\xi^*)(t), \qquad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Como muitos conjuntos instáveis de soluções globais são iguais, é possível que o conjunto maximal de soluções globais backwards separated seja '*pequeno*'.

Teorema (4)

Seja $\mathcal{S}_\lambda$ um processo de evolução com a pullback attractor $\hat{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, e suponha que (1), (2) e (3) estejam satisfeitas. Se, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, a família $\{A_\lambda(t_0)\}_{\lambda\in\Lambda}$ for semicontínua inferiormente em λ_0 e I for um intervalo limitado em $[t_0, \infty)$, a família $\{A_\lambda(t) : t \in I\}_{\lambda\in\Lambda}$ será semicontínua inferiormente em λ_0.

Prova: Suponha que $I = [t_0, t_0 + T]$, para algum $T > 0$. Mostramos primeiramente que, se $\{A_\lambda(t_0)\}_{\lambda\in\Lambda}$ for semicontínua inferiormente em λ_0 e $a > t_0$ então, $\{A_\lambda(a)\}_{\lambda\in\Lambda}$ será semicontínua inferiormente.

Para cada $x_0 \in A_{\lambda_0}(a)$, da $\mathcal{S}_{\lambda_0}$-invariancia do atrator pullback $\hat{A}_{\lambda_0}$, existirá uma solução global $\xi_0 : \mathbb{R} \to X$ de $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ com $\xi_0(a) = x_0$. Se $\lambda_n \to \lambda_0$, tome $y_n \in A_{\lambda_n}(t_0)$ com $y_n \to \xi_0(t_0)$.

Então existirá uma subseqüência de $\{y_n\}$ (que denotamos do mesmo modo) e uma seqüência $\xi_n : \mathbb{R} \to X$ de soluções globais de $\mathcal{S}_{\lambda_n}$ tais que $\xi_n(t_0) = y_n$ e $\xi_n(t) \in A_{\lambda_n}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e solução global $\tilde{\xi}_0 : \mathbb{R} \to X$ de $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ tal que $\xi_n(t) \to \tilde{\xi}_0(t)$ uniformemente para t em limitados de $\mathbb{R}$ e $\xi_0(t) = \tilde{\xi}_0(t)$, para todo $t \geqslant t_0$. Segue que, $\xi_n(a) \to x_0$ provando que $\{A_\lambda(a)\}_{\lambda \in \Lambda}$ semicontínua inferiormente em λ_0.

A uniformidade segue como no resultado correspondente para semicontinuidade superior de atratores pullback. $\square$

Teorema

Seja $\lambda_n \to \lambda_0$ *e* $\{\mathcal{S}_{\lambda_n}\}$ *uma família de processos de evolução. Suponha que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_{\lambda_n}$ *tenha um atrator pullback* $\hat{A}_{\lambda_n}$, *e que* (1), (2) *e* (3) *estejam satisfeitas. Além disso, suponha que:*

(a) *exista uma seqüência de soluções globais 'backwards bounded' e 'backwards separated'* $\{\xi_j^*\}$ *em* $\hat{A}_{\lambda_0}$ *tais que*

$$A_{\lambda_0}(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*(\cdot))(t)}, \qquad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

(b) *para cada* $j \in \mathbb{N}$, *exista uma seqüência* $\{\xi_{j,n}^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de soluções globais 'backwards bounded' de* $\mathcal{S}_{\lambda_n}$, $\delta_j > 0$ *e* $t_j \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(W_{\delta_j}^u(\xi_j^*)(t), W_{\delta_j}^u(\xi_{j,n}^*)(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{para todo } t \leqslant t_j.$$

Então, para cada limitado I *de* $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} \left[\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(A_{\lambda_n}(t), A_{\lambda_0}(t)) + \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^X(A_{\lambda_0}(t), A_{\lambda_n}(t))\right] = 0.$$

Proof: A semicontinuidade superior já foi provada anteriormente.

Para provar que $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(A_{\lambda_0}(t), A_{\lambda_n}(t)) \to 0$ quando $n \to \infty$, é suficiente mostrar que, para $t \in \mathbb{R}$ e $x \in A_{\lambda_0}(t)$ existe seqüência $x_n \in A_{\lambda_n}(t)$ tal que $x_n \to x$.

Dado $x \in A_{\lambda_0}(t)$ e $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in \bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*)(t)$ tal que $d(x, x_\epsilon) < \epsilon/2$. Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_\epsilon \in W^u(\xi_j^*)(t)$ e seja $\xi_j : \mathbb{R} \to X$ uma solução global de $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ em $\hat{A}_{\lambda_0}$ com $\xi_j(t) = x_\epsilon$ e $d(\xi_j(s), \xi_j^*(s)) \to 0$ quando $s \to -\infty$.

Escolha $\tau > 0$ tal que $z_j = \xi_j(t-\tau) \in W^u_{\delta_j}(\xi^*_j)(t-\tau)$ e, usando (b), existe uma seqüência $\{z^n_j\}$ com $z^n_j \in W^u_{\delta_j}(\xi^*_{j,n})(t-\tau)$ tal que $z^n_j \to z_j$ quando $n \to \infty$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(S_{\lambda_n}(t, t-\tau)z^n_j, S_{\lambda_0}(t, t-\tau)z_j) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

Como $S_{\lambda_n}(t, t-\tau)z^n_j \in A_{\lambda_n}(t)$, $x_\epsilon = S_{\lambda_0}(t, t-\tau)z_j$ e $\epsilon > 0$ é arbitrário, a semicontinuidade inferior de $\{A_{\lambda_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ segue. O resultado agora segue facilmente do Teorema 4. $\square$

Semicontinuidade inferior de atratores uniformes

Como o atrator uniforme $\mathcal{A}_\lambda$ é igual a $\pi_X(\mathbb{A}_\lambda)$, isto é, a projeção na primeira coordenada do atrator global do semigrupo skew-product Π_λ in $\mathbb{X}_\lambda$, a semicontinuidade inferior de atratores uniformes segue do Teorema 3, a seguir enunciamos os resultados.

Definição

*Seja $\lambda \in \Lambda$. Se $(\mathcal{K}_\lambda, \Theta_\lambda)_{(X,\Sigma_\lambda)}$ for um sistema dinâmico não autônomo, que denotaremos simplesmente por $\mathcal{K}_\lambda$, $\mathcal{L} \subset X$ será dito $\mathcal{K}_\lambda$-**lifted invariante** se, para cada $x \in \mathcal{L}$, existir uma solução global $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma_\lambda$ de Θ_λ e uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ do processo de evolução $\{\mathcal{K}(t-s, \eta(s)) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tal que $\xi(0) = x$ e $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$.*

Definição

Fixado $\lambda \in \Lambda$, seja $(\mathcal{K}_\lambda, \Theta_\lambda)_{(X,\Sigma_\lambda)}$ um sistema dinâmico não autônomo e $\mathcal{L} \subset X$ um conjunto $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariante. Dada uma vizinhança U de $\mathcal{L}$ em X diremos que $\mathcal{L}$ será maximal $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariante em U se, sempre que $\mathcal{V} \subset U$ for $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariante, tivermos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$.

*Além disso, diremos que $\mathcal{L}$ será um conjunto $\mathcal{K}_\lambda$-**lifted invariante isolado** se existir $\delta > 0$ tal que $\mathcal{L}$ seja maximal $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariante em $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{L})$.*

O atrator uniforme $\mathcal{A}_\lambda$ é o limitado maximal $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariante, isto é, se $\mathcal{L}$ for um limitado $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariante então, $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_\lambda$. Isto segue da caracterização dos atratores uniformes.

Definição

Diremos que $\{\mathcal{L}_1, \cdots \mathcal{L}_n\}$ *será* **uma coleção disjunta de $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariantes isolados** *se, cada* $\mathcal{L}_i$ *for* $\mathcal{K}_\lambda$*-lifted invariante isolado e existir um* $r > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_r(\mathcal{L}_i) \cap \mathcal{O}_r(\mathcal{L}_j) = \varnothing$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Agora podemos definir *conjuntos instáveis* para conjuntos $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariantes isolados, como antes.

Definição

Dado um conjunto $\mathcal{K}_\lambda$-lifted invariante isolado $\mathcal{L}$ definimos o **conjunto instável** *e $\mathcal{L}$ por*

$$W^u(\mathcal{L}) = \{x \in X : \text{ existem soluções globais } \eta \text{ de } \Theta_\lambda \text{ e } \xi \text{ de } \{\mathcal{K}(t-s, \eta(s)) : t \geqslant s\} \text{ tais que } \xi(0) = x \text{ e } \xi(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}\}.$$

e um **conjunto instável local** *de $\mathcal{L}$ por*

$$W^u_\delta(\mathcal{L}) = \{x \in W^u(\mathcal{L}) : \text{ existem soluções globais } \eta \text{ de } \Theta_\lambda \text{ e } \xi \text{ de } \{\mathcal{K}(t-s, \eta(s)) : t \geqslant s\} \text{ tais que } \xi(0) = x, \ \mathrm{dist}^X_{\mathrm{H}}(\xi(t), \mathcal{L}) < \delta, \text{ para todo } t \leqslant 0, \text{ e } \xi(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}\}.$$

A diferença relativamente ao resultado de semicontinuidade inferior de atratores globais de semigrupos skew-product é a interpretação do significado de *semicontinuidade inferior de conjuntos instáveis locais*. Isto está expresso na definição a seguir.

Definição

Dada uma família $\{\mathcal{L}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de conjuntos* $\mathcal{K}_\lambda$*-lifted invariantes, a família de conjuntos instáveis locais* $\{W^u_\delta(\mathcal{L}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *será* **semicontínua inferiormente** *em* $\lambda=\lambda_0$ *se, e somente se, para cada seqüência convergente* $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ *em* Λ *e* $x\in W^u_\delta(\mathcal{L}_{\lambda_0})$*, existirem soluções globais* η_n *de* Θ_{λ_n}*, convergindo para uma solução global* η_0 *de* Θ_{λ_0}*, uniformemente em limitados de* $\mathbb{R}$*, e soluções globais* ξ_n *de* $\{\mathcal{K}(t-s,\eta_n(s)):t\geqslant s\}$ *convergindo para uma solução global* ξ_0 *de* $\{\mathcal{K}(t-s,\eta_0(s)):t\geqslant s\}$*, uniformente em limitados de* $\mathbb{R}$*,* $\xi_0(0)=x$*,* $\xi_n(t)\overset{t\to-\infty}{\longrightarrow}\mathcal{L}_{\lambda_n}$*,* $n=0$ *ou* $n\in\mathbb{N}^*$*, e* $\mathrm{dist}^X_{\mathrm{H}}(\xi_n(t),\mathcal{L}_{\lambda_n})\leqslant\delta$*,* $\forall\ t\leq 0$*.*

Com isto podemos enunciar o resultado sobre semicontinuidade inferior de atratores uniformes.

Teorema

Se os cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}$ *e os semigrupos* $\{\Theta_\lambda\}$ *forem coletivamente limitados dissipativos e coletivamente assintoticamente compactos e* $(C2)$ *valer então,* $\mathcal{K}_\lambda$ *terá um atrator uniforme* $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *com* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ *relativamente compacto em* X. *Suponha ainda que:*

(a) *exista uma coleção disjunta* $\{\mathcal{L}_{1,\lambda}, \cdots, \mathcal{L}_{n,\lambda}\}$ *de conjuntos* $\mathcal{K}_\lambda$*-lifted invariantes isolados para cada* $\lambda \in \Lambda$,

(b) *a família de conjuntos instáveis locais* $\{W^u_\delta(\mathcal{L}_{j,\lambda}))\}_{\lambda\in\Lambda}$ *seja semicontínua inferiormente em* $\lambda = \lambda_0$, *para cada* $j = 1, \cdots, n$ *e*

(c) $\mathcal{A}_{\lambda_0} = \cup_{j=1}^n W^u(\mathcal{L}_{j,\lambda_0})$.

Então

$$\mathrm{dist}^X_{\mathrm{H}}(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) + \mathrm{dist}^X_{\mathrm{H}}(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) \stackrel{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$