Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Décima Oitava Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

23 de Outubro de 2023

Considerações Gerais

Como explicamos anteriormente, uma questão fundamental no estudo do comportamento assintótico (atratores) de sistemas dinâmicos é a continuidade relativamente a perturbações.

No que se segue enunciamos e provamos resultados que fornecem condições sob as quais semicontinuidade superior e inferior de atratores pullback e uniformes valem.

Fixemos (X, d) e (M, d_M) espaços métricos e consideremos o espaço produto $\mathbb{X}_M = X \times M$ com a métrica produto.

Seja $\Theta \subset C(M)$ seja um semigrupo e seja $\mathcal{K}$ um cociclo associado a Θ. Sejam ainda $(\mathcal{K}, \Theta)_{(X,M)}$ e $\Pi \subset C(\mathbb{X}_M)$, respectivamente, o sistema dinâmico não autônomo e o semigrupo skew-product associados.

Seja $\Lambda = [0,1]$ e $\{\Sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos fechados positivamente Θ-invariantes de M, e suponha que

$$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Sigma_\lambda.$$

Seja d_λ a restrição de d_M a Σ_λ, $\Theta_\lambda = \{\Theta_\lambda(t) \colon t \geqslant 0\} \subset C(\Sigma_\lambda)$ a restrição de Θ a Σ_λ, e $\{\mathcal{K}(t,\sigma) \colon t \geqslant 0,\ \sigma \in \Sigma_\lambda\} \subset C(X)$ o cociclo associado a Θ_λ (que representaremos por $\mathcal{K}_\lambda$).

Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $\mathbb{X}_\lambda = X \times \Sigma_\lambda$ e $(\mathcal{K}_\lambda, \Theta_\lambda)_{(X,\Sigma_\lambda)}$, $\{\Pi_\lambda(t) \colon t \geqslant 0\} \subset C(\mathbb{X}_\lambda)$, respectivamente, o sistema dinâmico não autônomo e o semigrupo skew-product associados.

Escreveremos Π_λ para $\{\Pi_\lambda(t)\colon t \geqslant 0\}$. Claremente, Π_λ é a restrição de Π a $\mathbb{X}_\lambda$.

Iremos supor que:

$$\Pi \text{ tem um atrator global } \mathbb{A} \text{ em } \mathbb{X}_M. \tag{C1}$$

Utilizaremos $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{E}$ para denotar a semidistância de Hausdorff em E, onde E pode ser X, Σ, Σ_λ, $\mathbb{X}_\lambda$ ou $\mathbb{X}_M$.

Supondo que a condição (C1), provaremos algumas propriedades relativas aos atratores globais de Π_λ e Θ_λ, para cada $\lambda \in \Lambda$.

Proposição

Se (C1) *vale,* Π_λ *tem um atrator global* $\mathbb{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ *e* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{A}$.

Prova: Seja $\mathbb{K}_\lambda = \mathbb{A} \cap \mathbb{X}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Para $\mathbb{B}_\lambda \subset \mathbb{X}_\lambda$ limitado, temos

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_M}(\Pi(t)\mathbb{B}_\lambda, \mathbb{A}) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pois $\mathbb{B}_\lambda$ é limitado em $\mathbb{X}_M$ e $\mathbb{A}$ é o atrator global de Π em $\mathbb{X}_M$.

Como $\mathbb{K}_\lambda$ é compacto, Π_λ é limitado dissipativo e assintóticamente compacto em $\mathbb{X}_\lambda$. Assim, Π_λ tem um atrator global $\mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{K}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Tomando a união em $\lambda \in \Lambda$ concluímos a última afirmativa e a prova está completa.$\square$

Proposição

Se (C1) *vale então,* Θ_λ *tem atrator global* $\mathscr{S}_\lambda$ *em* Σ_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Prova: Defina $\Gamma_\lambda = \pi_\Sigma(\mathbb{A}) \cap \Sigma_\lambda$, que é compacto em Σ_λ. Se $J \subset \Sigma_\lambda$ é limitado, fixe $x \in X$ e faça $\mathbb{B} = \{x\} \times J$. Então, $\mathbb{B}$ é limitado em $\mathbb{X}_\lambda$ e, consequentemente, limitado em $\mathbb{X}_M$. Logo

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\Sigma}(\Theta(t)J, \pi_\Sigma(\mathbb{A})) \leqslant \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_M}(\Pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{A}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

quando $t \to \infty$. Agora, $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\Sigma_\lambda}(\Theta(t)J, \Gamma_\lambda) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ segue como no resultado anterior e Θ_λ é limitado dissipativo.

Considere seqüências $t_n \to \infty$, e $\{\sigma_n\} \subset \Sigma_\lambda$ limitada. Fixe $x \in X$ e considere $\{(x, \sigma_n)\} \subset \mathbb{X}_\lambda \subset \mathbb{X}$, que é uma seqüência limitada em $\mathbb{X}$. Como Π é assintóticamente compacto, $\{\Pi(t_n)(x, \sigma_n)\}$ tem uma subseqüência convergente em $\mathbb{X}_M$.

Usando a definição de Π e o fato que $\sigma_n \in \Sigma_\lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\Pi(t_n)(x, \sigma_n) = (\mathcal{K}(t_n, \sigma_n)x, \Theta(t_n)\sigma_n) = (\mathcal{K}(t_n, \sigma_n)x, \Theta_\lambda(t_n)\sigma_n),$$

e assim, $\{\Theta(t_n)\sigma_n\}$ tem uma subseqüência convergente em M.

Como Σ_λ é fechado e positivamente Θ-invariante, o limite desta subseqüência pertence Σ_λ, provando que Θ_λ é asymptoticamente compacto e completando a demonstração. $\square$

Com esta proposição em mente, obtemos a família $\{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de atratores globais para $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Iremos supor que

$$\text{a família } \{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ é contínua em cada } \lambda \in \Lambda. \tag{C2}$$

Proposição (3)

Se (C1) *e* (C2) *valem, então:*

(i) Dado $\lambda_0 \in \Lambda$, $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\sigma_\lambda \in \Sigma_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ *e* $\sigma_\lambda \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} \sigma_{\lambda_0}$, *temos*

$$d_{\mathbb{X}_M}(\Pi_\lambda(t)(x,\sigma_\lambda), \Pi_{\lambda_0}(t)(x,\sigma_{\lambda_0})) \to 0 \quad \textit{quando } \lambda \to \lambda_0,$$

uniformemente, para (t,x) *em compactos de* $\mathbb{R}^+ \times X$*;*

(ii) Dadas seqüências $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *com* $\lambda_n \to \lambda_0$, $t_n \to \infty$ *e* $\{(x_n,\sigma_n)\}$ *limitada em* $\mathbb{X}_M$ *com* $\sigma_n \in \mathscr{S}_{\lambda_n}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *então,* $\{\Pi_{\lambda_n}(t_n)(x_n,\sigma_n)\}$ *tem uma subseqüência convergente para* (z,ω) *com* $\omega \in \mathscr{S}_{\lambda_0}$*;*

(iii) Existe $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{X}_M$ *limitado tal que o conjunto* $\mathbb{B}_\lambda = \mathbb{B}_0 \cap \mathbb{X}_\lambda$ Π_λ*-atrai limitados de* $\mathbb{X}_\lambda$ *para cada* $\lambda \in [0,1]$.

Prova:

Para provar (i), primeiro recorde que Π_λ é a restrição de Π a $\mathbb{X}_\lambda$, assim

$$\begin{aligned} & d_{\mathbb{X}_M}(\Pi_\lambda(t)(x,\sigma_\lambda),\Pi_{\lambda_0}(t)(x,\sigma_{\lambda_0})) \\ & = d(\mathcal{K}(t,\sigma_\lambda)x,\mathcal{K}(t,\sigma_{\lambda_0})x) + d_\Sigma(\Theta(t)\sigma_\lambda,\Theta(t)\sigma_{\lambda_0}) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

uniformemente, para (t,x) em compactos de $\mathbb{R}^+\times X$, pois $\sigma_\lambda \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} \sigma_{\lambda_0}$.

Agora provamos (ii). A seqüência $\{\Pi_{\lambda_n}(t_n)(x_n,\sigma_n)\}$ tem uma subseqüência convergente para um ponto $(z,\omega) \in \mathbb{X}_M$, pois Π é assintoticamente compacto em $\mathbb{X}_M$.

Mas $\Pi(t)(x_n,\sigma_n) = (\mathcal{K}(t,\sigma_n)x_n, \Theta(t)\sigma_n)$ e, para esta subseqüência convergente, $\Theta(t_n)\sigma_n \to \omega$.

Como $\sigma_n \in \mathscr{S}_{\lambda_n}$ e $\mathscr{S}_{\lambda_n}$ é Θ-invariante, temos que $\Theta(t)\sigma_n \in \mathscr{S}_{\lambda_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Usando (C2), obtemos $\omega \in \mathscr{S}_{\lambda_0}$. Portanto, $(z,\omega) \in \mathbb{X}_{\lambda_0}$, o que prova (ii).

Para (iii), tome $\mathbb{B}_0 = \mathbb{A}$, e a prova está completa. $\square$

Semicontinuidade superior de atratores skew-product

Procedendo como antes, e utilizando a Proposição 3, obtemos:

Teorema (2)

Suponha (C1) *e* (C2) *e seja* $\mathbb{A}_\lambda$ *o atrator global de* Π_λ *em* $\mathbb{X}_\lambda$ *para cada* $\lambda \in \Lambda$, *com* $\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{A}$. *Se*

$\lambda_0 \in \Lambda$, $\{\lambda_k\}$ *é uma seqüência em* Λ, $\lambda_k \to \lambda_0$,

$\{s_k\}$ *é uma seqüência em* $\mathbb{R}$ *e,*

dado $k \in \mathbb{N}$, (υ_k, η_k) *é uma solução global de* Π_{λ_k} *em* $\mathbb{A}_{\lambda_k}$

então,

existe uma subseqüência $\{(\upsilon_{k_j},\eta_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $\{(\upsilon_k,\eta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{(\upsilon_{k_j}(\cdot+s_{k_j}), \eta_{k_j}(\cdot+s_{k_j}))\}$ *converge uniformemente em limitados de* $\mathbb{R}$ *para uma solução global* (υ, η) *de* Π_{λ_0} *em* $\mathbb{A}_{\lambda_0}$.

Em particular, $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente em* λ_0.

Prova: Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, uma solução global limitada de Π_{λ_k} em $\mathbb{X}_{\lambda_k}$ por, $\psi_k(t) = (\upsilon_k(t+s_k), \eta_k(t+s_k))$ e $t \in \mathbb{R}$.

Como $\{\psi_k(0)\} \subset \mathbb{A}$, podemos extrair uma subseqüência $\{n_{0,k}\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\psi_{n_{0,k}}(0) \to (x, \sigma) \in \mathbb{A}$.

Usando que $\eta_k(t+s_k) \in \mathscr{S}_{\lambda_k}$, para todo k, de (C2) obtemos $\sigma \in \mathscr{S}_{\lambda_0}$, e assim $(x, \sigma) \in \mathbb{A}_{\lambda_0}$.

Defina $\psi(t) = \Pi_{\lambda_0}(t)(x, \sigma)$ para todo $t \geqslant 0$. Então

$$\psi_{n_{0,k}}(t) = \Pi_{\lambda_{n_{0,k}}}(t)\psi_{n_{0,k}}(0) \to \Pi_{\lambda_0}(t)(x, \sigma) = \psi(t),$$

uniformemente para t em limitados de $\mathbb{R}^+$. Por indução, como fizemos anteriormente, o resultado segue.$\square$

Agora traduzimos estas as condições $(C1)$ e $(C2)$ para os cociclos e o semigrupos dirigentes, para que possamos aplicar os resultados obtidos a equações diferenciais.

Se tiver atrator global, Π será limitado dissipativo e assintóticamente compacto. Logo, o semigrupo dirigente Θ terá atrator global $\mathscr{S}$ em M.

Π limitado dissipativo, traduz-se na noção de *coletivamente limitado dissipativo*, para a família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e para a família de semigrupos dirigentes $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Veja definição a seguir.

Definição

A família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *com semigrupos dirigentes* $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *será* **coletivamente limitada dissipativa** *se satisfaz:*

(a) *para algum* $B_0 \subset X$ *limitado, dado um limitado qualquer* $B \subset X$ *e família* $S_\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *com* $\cup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ *limitado em* M, *temos*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \sup_{\sigma_\lambda\in S_\lambda} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(\mathcal{K}(t,\sigma_\lambda)B, B_0) = 0;$$

(b) *existe um limitado* $\Xi \subset M$ *tal que, se* $\Xi_\lambda = \Xi \cap \Sigma_\lambda$ *e* $S_\lambda \subset \Sigma_\lambda$, *para cada* $\lambda \in \Lambda$, *com* $\cup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ *limitado em* M *então,*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\Sigma_\lambda}(\Theta_\lambda(t)S_\lambda, \Xi_\lambda) = 0.$$

Π assintóticamente compacto é traduzida na noção de *compacidade assintótica coletiva* para a família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e para a família de semigrupos dirigentes $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, que definimos a seguir.

Definição

A família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *com os semigrupos dirigentes associados* $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *será* **coletivamente assintoticamente compacta** *se satisfizer:*

(a) *dadas seqüências* $\{t_n\}$ *em* $\mathbb{R}^+$ *com* $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{x_n\}$ *limitada em* X *e* $\{\sigma_n\}$ *limitada em* M, *com* $\sigma_n \in \Sigma_{\lambda_n}$ *então,* $\{\mathcal{K}(t_n,\sigma_n)x_n\}$ *tem uma subseqüência convergente em* X*;*

(b) *dadas seqüências* $t_n \to \infty$ *e* $\{\sigma_n\}$ *limitada em* M, *com* $\sigma_n \in \Sigma_{\lambda_n}$ *então,* $\{\Theta_{\lambda_n}(t_n)\sigma_n\}$ *tem subseqüência convergente.*

Observação

Se $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *e* $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *for coletivamente limitado dissipativo e coletivamente assintoticamente compacto então,* (C1) *vale.*

Estas serão as condições sob as quais estudaremos a continuidade de atratores skew-product, uniformes e pullback.

O Teorema 1 pode agora ser enunciado com as condições sobre as famílias de cociclos e semigrupos dirigentes associados, em lugar de condições sobre os semigrupos skew-product.

Como vimos, o atrator uniforme $\mathcal{A}_\lambda = \pi_X(\mathbb{A}_\lambda)$ é a projeção na primeira coordenada do atrator global $\mathbb{A}_\lambda$ do semigrupo skew-product Π_λ em $\mathbb{X}_\lambda$. Segue diretamente que:

Teorema

Suponha que a família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, com a família de semigrupos dirigentes associados $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, seja coletivamente limitado dissipativa e coletivamente assintoticamente compacta.

Então, para cada $\lambda \in \Lambda$, o sistema dinâmico não autônomo $(\mathcal{K}_\lambda, \Theta_\lambda)$ tem um atrator uniforme $\mathcal{A}_\lambda$ em X.

Além disso, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ é relativamente compacto em X e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$, para cada $\lambda_0 \in \Lambda$.