Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Décima Sétima Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

24 de Outubro de 2012

Evolution processes with a pullback attractor

Seja $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X.

Teorema (Caracterização de processos com atratores pullback)

As seguintes afirmativas são equivalentes

- $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$.
- *Existe uma família de conjuntos compactos* $\{K(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *que atrai pullback subconjuntos limitados de* X.

Em qualquer dos casos

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B,t) : \ B \subset X, \ B \ \text{ limitado } \}}. \qquad (1)$$

Prova: Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$, cada $\mathcal{A}(t)$ é compacto e atrai pullback subconjuntos limitados de X.

Para provar a recíproca procedemos da seguinte forma. Primeiro note que, como conseqüência da caracterização de conjuntos $\omega-$limite temos que $\omega(B,t) \subset K(t)$, para todo $B \subset X$ limitado e para todo $t \in \mathbb{T}$.

Mostremos que $\omega(B,t)$ atrai B. Se este não é o caso, existe $\varepsilon > 0$, seqüência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $s_n \to -\infty$ e seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B tal que $\operatorname{dist}(S(t,s_n)x_n, \omega(B,t)) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $K(t)$ atrai pullback B no instante t, temos que $\operatorname{dist}(S(t,s_n)x_n, K(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Consequentemente, $\{S(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente para algum $x_0 \in K(t)$. Segue que $x_0 \in \omega(B,t)$ e isto nos leva a uma contradição. De um lemma anterior, segue a invariância de $\omega(B,t)$.

Definindo $\mathcal{A}(t)$ por (1), $\mathcal{A}(t)$ é claramente compacto e atrai pullback subconjuntos limitados de X.

Para a invariância procedemos da seguinte forma.

Dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Então, $S(t,s)x_n = y_n \in \omega(B_n, t)$, e da continuidade de $S(t,s)$ temos que $S(t,s)x_n = y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(t,s)x_0$, o que implica que $S(t,s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$.

Dado $y_0 \in \mathcal{A}(t)$, existe $y_n \in \omega(B_n, t)$ com $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0$. Da invariância da família $\omega(B_n, t)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ com $S(t,s)x_n = y_n$. Mas cada $S(t,s)x_n \in S(t,s)\omega(B_n, s) \subset S(t,s)\mathcal{A}(s)$. Como este último conjunto é compacto e não depende de n, obtemos que $\lim_{n\to+\infty} S(t,s)x_n = y_0 \in S(t,s)\mathcal{A}(s)$.

Se $\hat{\mathcal{A}}(t)$ é fechado e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t temos que $\omega(B,t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$, para todo subconjunto limitado B de X. Consequentemente, $\mathcal{A}(t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$.$\square$

O conceito a seguir é útil nas aplicações para obter a existência de atratores pullback sem ter que exibir uma família de conjuntos compactos que atrai pullback subconjuntos limitados.

Definição (Processos pullback assintoticamente compactos)

Um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *em um espaço métrico* X *é dito pullback assintoticamente compacto se, para cada* $t \in \mathbb{T}$, *seqüência* $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{T}_t^-$ *e seqüência limitada* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* X *tais que*

- $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *e*
- $\{S(t,s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ *é limitado,*

a seqüência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tem uma subseqüência convergente.*

Observação

Se $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo, o processo* $\{S(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, para cada seqüência limitada* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* X, *seqüência* $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{T}^+$ *tal que* $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *e* $\{S(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada, a seqüência* $\{S(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tem uma subseqüência convergente. Neste caso, o semigrupo* $\{S(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é assintoticamente compacto.*

Lema

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é um processo de evolução pullback assintoticamente compacto e* B *é um subconjunto não vazio e limitado de* X *para o qual, dado* $t \in \mathbb{T}$ *existe* $\sigma_t \in \mathbb{T}_t^-$ *tal que* $\bigcup_{\tau \leqslant \sigma_t} S(t,\tau)B$ *é limitado, então* $\omega(B,t)$ *é não vazio, compacto, atrai pullback* B *no instante* t *e* $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ *é invariante.*

Prova: Primeiramente note que, para quaisquer seqüências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em B e $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{T}_t^-$, $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, temos que $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado. Segue do fato que $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto que existe $y \in X$ e subseqüência de $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma) tal que $y = \lim_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k$. Disto segue que $y \in \omega(B,t)$ e que $\omega(B,t)$ é não vazio.

Agora, dada uma seqüência $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\omega(B,t)$ existem $x_k \in B$ e $s_k \in \mathbb{T}_t^-$, $s_k \leqslant -k$, tal que $\mathrm{d}(S(t,s_k)x_k, y_k) \leqslant \frac{1}{k}$. Como $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente, segue que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente e $\omega(B,t)$ é compacto.

Agora mostraremos que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t. Se não, existe $\epsilon > 0$ e seqüências $x_k \in B$ e $\{s_k\}$ in $\mathbb{T}_t^-$ com $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, tal que $\mathrm{dist}(S(t,s_k)x_k, \omega(B,t)) > \epsilon$.

Do fato que $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto e do fato que $\bigcup_{s \leqslant \sigma_t} S(t,s)B$ é limitado, existe subseqüência de $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma) e $y \in X$ tal que $S(t,s_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Claramente $y \in \omega(B,t)$ e isto nos leva a uma contradição. Segue que $\omega(B,t)$ atrai pullback B.

A invariancia de $\omega(B,t)$ agora segue de um lema anterior e o resultado está provado. $\square$

Definição (Processos pullback limitados)

Diremos que um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *em um espaço métrico* X *é pullback limitado se, para cada* $t \in \mathbb{T}$, $\gamma_p(B,t)$ *é limitado sempre que* $B \subset X$ *é limitado.*

Observação

Se $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo,* $\{S(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback limitado se, e somente se, o semigrupo* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *é limitado.*

Definição (Processos pullback eventualmente compactos)

Um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é dito pullback eventualmente compacto se ele é pullback limitado e existe* $\tau \geqslant 0$ *tal que, se* B *é um subconjunto limitado de* X *e* $t \in \mathbb{T}$*, então* $\overline{S(t,t-\tau)B}$ *é compacto.*

Observação

Um semigrupo $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *é eventualmente compacto se é limitado existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{S(t_0)B}$ *é compacto, para cada* $B \subset X$ *limitado.*

O resultado a seguir nos da uma condição suficiente para que um processo de evolução seja pullback assintoticamente compacto.

Lema

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback eventualmente compacto, então* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback assintoticamente compacto.*

Prova: Seja τ como da definicção anterior, $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X e $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathbb{T}_t^-$ com $s_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Se $B = \{S(t-\tau, s)x_j : j \in \mathbb{N} \text{ e } t-\tau \geq s \in \mathcal{P}\}$, não é difícil ver que B é limitado e portanto $S(t, t-\tau)B$ é relativamente compacto e contém $\{S(t, s_j)x_j : j \in \mathbb{N}\}$. Segue que $\{S(t, s_j)x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente.□

Teorema

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $\mathcal{A}(t)$ dado por

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup \{\omega(B,t) : \ B \subset X, \ B \ \text{ limitado}\} \tag{2}$$

é limitado, atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t, a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante e, se $\{C(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback limitados de X, então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Prova: Se B é limitado temos que, $\omega(B,t)$ não vazio, compacto, atrai pullback B no instante t e $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante.

Portanto, $\mathcal{A}(t)$ definido por (2) atrai pullback limitados de X no instante t para cada $t \in \mathbb{T}$ e $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante.

Se $C(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t. É claro que, para B limitado, $\omega(B,t) \subset \overline{C(t)}$ e $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$. Em particular que $\mathcal{A}(t)$ é limitado e a prova está completa.□

Teorema

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback limitado dissipativo e pullback eventualmente compacto, então a família* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *definida por* (2) *atrai pullback subconjuntos limitados de* X*, é invariante,* $\mathcal{A}(t)$ *é relativamente compacto e, se* $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *atrai pullback subconjuntos limitados de* X*, então* $\mathcal{A}(t) \subset \overline{B(t)}$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$*.*

Prova: As hipóteses do teorema anterior estão satisfeitas e somente precisamos mostrar que $\mathcal{A}(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{T}$. Como $\mathcal{A}(t)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{T}$, para τ dado na Definição 3, temos que

$$\mathcal{A}(t) = S(t, t-\tau)\mathcal{A}(t-\tau),$$

é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{T}$. Isto completa a demonstração.$\square$

Observe que os resultados anteriores não concluem a compacidade da seção $\mathcal{A}(t)$ (nem mesmo se o espaço é de dimensão finita). Isto mostra uma primeira diferença entre os processos de evolução não autônomos e os autônomos. Para obter a compacidade de cada seção teremos que fazer hipóteses adicionais sobre os processos de evolução.

Definição

Diremos que um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback fortemente limitado dissipativo se, para cada* $t \in \mathbb{T}$*, existir um subconjunto limitado* $B(t)$ *de* X *que absorve pullback subconjuntos limitados de* X *no instante* τ *para cada* $\tau \leqslant t$*; isto é, dado qualquer subconjunto limitado* D *de* X *e* $\tau \leqslant t$*, existe* $s_0(\tau, D)$ *tal que* $S(\tau, s)D \subset B(t)$*, para todo* $s \leqslant s_0(\tau, D)$*.*

Note que, a família $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ da definição acima não precisa ter união limitada. Contudo, podemos escolhe-la de modo que, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\bigcup_{s \leqslant t} B(s)$ é limitado.

O teorema a seguir dá condições suficientes para a existência de um atrator pullback.

Teorema

Se um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *com a propriedade que* $\bigcup_{s \leqslant t} \mathcal{A}(s)$ *é limitado para cada* $t \in \mathbb{T}$.

Prova: Se $\mathcal{A}(t)$ é dado por (2), segue que, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t e se $\{C(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Do fato que $\{S(t,s) : t \geqslant s \in \mathbb{T}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe um subconjunto limitado $B(t)$ de X que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ, para cada $\tau \leqslant t$.

Como $\omega(B(t),t)$ atrai pullback $B(t)$ no instante t (considerado como um subconjunto limitado fixo de X), ele atrai pullback todo subconjunto limitado de X no instante t.

De fato,é suficiente provar que, dado um subconjunto limitado D de X, $\omega(D,t) \subset \omega(B(t),t)$. Se $x_0 \in \omega(D,t)$, existem seqüências $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in D tal que $S(t,s_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.

Como $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, dada uma seqüência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $\tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, existe uma seqüência $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\sigma_n \leqslant \tau_n$ tal que $S(\tau_n,s)D \subset B(t)$, para todo $s \leqslant \sigma_n$.

Dado que $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, para cada τ_n existe $k_n \geqslant n$ tal que $s_{k_n} \leqslant \sigma_n$ e $S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in B(t)$. Portanto,

$$S(t, s_{k_n})x_{k_n} = S(t, \tau_n)S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in S(t, \tau_n)B(t),$$

o que implica $x_0 \in \omega(B(t), t)$. Isto prova que $\mathcal{A}(t) \subset \omega(B(t), t)$ e como $\omega(B(t), t) \subset \mathcal{A}(t)$ temos que $\mathcal{A}(t) = \omega(B(t), t)$. Consequentemente $\mathcal{A}(t)$ é compacto. $\square$