# Sistemas Dinâmicos Não Lineares
# Décima Sétima Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

18 de Outubro de 2023

Considere o problema

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u), \ \ t > s \\ u(s) = u_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é tal que, para cada $B \subset \mathbb{R}^n$ limitado, existe uma constante $L_f(B) > 0$ e uma função contínua e crescente $w_{f,B} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $w_{f,B}(0) = 0$, tal que

$$\|f(t_1,u_1) - f(t_2,u_2)\| \leqslant w_{f,B}(|t_1 - t_2|) + L_f(B)\|u_1 - u_2\|, \tag{2}$$

para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ e $u_1, u_2 \in B$ e existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\langle f(t,u), u\rangle \leqslant -\delta \quad \text{for } t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } u \in \mathbb{R}^n \text{ with } \|u\| > M, \tag{3}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Seja $C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com a métrica $\rho$ da convergência uniforme nas partes compactas e

$$\Sigma(f) = \overline{\{f(s+\cdot,\cdot)\colon s \in \mathbb{R}^+\}}^{\rho},$$

a **envoltória positiva** de $f$, e defina o *operador translação*, $\Theta(t) : \Sigma(f) \to \Sigma(f)$ por

$$\Theta(t)\sigma(\cdot,\cdot) = \sigma(t+\cdot,\cdot), \ \ t \geqslant 0.$$

É fácil ver que $\Theta = \{\Theta(t)\colon t \in \mathbb{R}^+\}$ define um semigrupo em $\Sigma(f)$, que denotaremos simplesmente por $\Theta$, e chamamos de **semigrupo dirigente**.

Ainda, segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que $\Sigma(f)$ é compacto e $\Theta$ tem um atrator global $\mathscr{S}$ em $\Sigma(f)$.

Para cada $\sigma \in \Sigma(f)$, seja $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, u_0) \mapsto \mathcal{K}(t, \sigma)u_0 \in \mathbb{R}^n$ onde, para cada $u_0 \in \mathbb{R}^n$, a função $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \mathcal{K}(t, \sigma)u_0 \in \mathbb{R}^n$ é a solução de

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma(t, u), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

Note que, as condições impostas sobre $f$, asseguram que, as soluções de (4) estão definidas em $[0, \infty)$.

Além disso, a função $\mathbb{R}^+ \times \Sigma(f) \ni (t,\sigma) \mapsto \mathcal{K}(t,\sigma) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

(i) $\mathcal{K}(0,\sigma)x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma \in \Sigma(f)$;

(ii) $\mathcal{K}(t+s,\sigma) = \mathcal{K}(t,\Theta(s)\sigma)\mathcal{K}(s,\sigma)$ para todo $t \geqslant s$ e $\sigma \in \Sigma(f)$;

(iii) $\mathbb{R}^+ \times \Sigma(f) \times \mathbb{R}^n \ni (t,\sigma,x) \mapsto \mathcal{K}(t,\sigma)x \in \mathbb{R}^n$ é contínua.

Agora podemos falar de *processos de evolução* e *atratores pullback*.

Se $\eta\colon \mathbb{R} \to \Sigma(f)$ for uma solução global para o semigrupo $\Theta$, então a família $\mathcal{S}_\eta = \{S_\eta(t,s)\colon t \geqslant s\} \subset C(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$S_\eta(t,s) = \mathcal{K}(t-s, \eta(s)) \quad \text{for } t \geqslant s,$$

define um processo de evolução.

Mostre que, sob as condições impostas para $f$, $\mathcal{S}_\eta$ tem um atrator pullback $\{A_\eta(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Juntamente, $\mathcal{K}$ e $\Theta$ determinam o problema não autônomo (1), e o par $(\mathcal{K}, \Theta)_{(\mathbb{R}^n, \Sigma(f))}$ será chamado de *sistema dinâmico não autônomo* em $(\mathbb{R}^n, \Sigma(f))$.

A um sistema dinâmico não autônomo, podemos associar um semigrupo $\Pi = \{\Pi(t) \colon t \geqslant 0\}$ em $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n \times \Sigma(f)$, com a métrica $d_{\mathbb{X}}((x_1, \sigma_1), (x_2, \sigma_2)) = \|x_1 - x_2\| + \rho(\sigma_1, \sigma_2)$, fazendo

$$\Pi(t)(x, \sigma) = (\mathcal{K}(t, \sigma)x, \Theta(t)\sigma), \text{ para } t \geqslant 0 \text{ e } (x, \sigma) \in \mathbb{X}.$$

As propriedades de $\Theta$ e $\mathcal{K}$ asseguram $\Pi$ satisfaça todas as propriedades de semigrupos.

$\Pi$ é chamado *semigrupo skew-product* associado a $(\mathcal{K}, \Theta)_{(\mathbb{R}^n, \Sigma(f))}$.

O conjunto $\{(x,\sigma) \in \mathbb{X} \colon \|x\| \leqslant M, \sigma \in \mathscr{S}\}$ é compacto em $\mathbb{X}$ e atrai limitados de $\mathbb{X}$. Segue que $\Pi$ tem um atrator global $\mathbb{A}$ em $\mathbb{X}$.

Veremos mais tarde que

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\eta} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_\eta(t) \times \{\eta(t)\} \tag{5}$$

onde a união é sobre todas as soluções globais $\eta$ de $\Theta$ em $\mathscr{S}$.

O conjunto assintótico de estados, quando $t \to \infty$, das soluções de (1) é $\mathcal{A} = \pi_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{A})$ e é chamado de *atrator uniforme* para (1).

Se apenas olharmos para o atrator uniforme, perdemos a perspectiva do que de fato é o comportamento assintótico de (1). Para entender a dinâmica assintótica vamos precisar estudar cada um dos atratores pullback associados a cada uma das soluções globais de $\Theta$.

Se $\sigma \in \mathscr{S}$, $\xi : \mathbb{R} \to \mathscr{S}$ for uma solução global de $\Theta$ por $\xi(0) = \sigma$, a ela corresponde a uma extensão natural (dada pela evolução de (1)) de $\sigma$ para tempos negativos.

Considere a extensão $\sigma(s+t, x) = \xi(s)(t, x)$, para todo $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$.

É claro que, se $s \geqslant 0$,

$$\xi(s)(t, x) = (\Theta(s)\xi(0))(t, x) = (\Theta(s)\sigma)(t, x) = \sigma(t+s, x), \quad t \geqslant 0.$$

É importante notar que, em geral, $\Theta$ não é injetivo em $\mathscr{S}$. Exibimos um exemplo para sedimentar esta questão de uma vez por todas.

**Exemplo**

*Considere a função* $f(t,x)=\alpha(t)g(x)$, $t\geqslant 0$ *e* $x\in\mathbb{R}^n$, *onde* $g\in\mathcal{C}$ *satisfaz* (2) *e* (3), *e* $\alpha:\mathbb{R}^+\to[1,2]$ *é globalmente Lipschitz,* $\alpha(t)=1$ *se* $t\in((2n)^2,(2n+1)^2)$, $\alpha(t)=2$ *se* $t\in((2n+1)^2+1,(2n+2)^2-1)$, $n\in\mathbb{N}$, *e é linear caso contrário.*

É claro que $f\in\mathcal{C}$ e também satisfaz (2) e (3). Para esta $f$, a função $\sigma(t,x)=2g(x)$, para $t\geqslant 0$, está em $\mathscr{S}$ e existem muitas soluções globais $\eta:\mathbb{R}\to\mathscr{S}$ de $\Theta$ tais que $\eta(0)=\sigma$.

De fato, $\eta_n^1(\cdot) = \Theta(\cdot + t_n^1)f : [-t_n^1, \infty) \to \Sigma(f)$, $t_n^1 = \frac{(2n+1)^2+(2n+2)^2}{2}$, $\{\eta_n^1\}$, passando para uma subseqüência, para to $\eta_1(t) = 2g$ para todo $t \in \mathbb{R}$, enquanto que $\eta_n^2(\cdot) = \Theta(\cdot + t_n^2)f : [-t_n^2, \infty) \to \Sigma(f)$, com $t_n^2 = (2n+1)^2 + 1$, passando para uma subseqüência, converge para $\eta_2(t) = 2g$ para $t \geqslant 0$ e $\eta_2(t) = g$ para $t \leqslant -1$.

Claramente $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 2g$, e a não unicidade está provada. É possível repetir este argumento e construir, para o mesmo exemplo, um número infinito de soluções globais de $\Theta$ por $\sigma = 2g \in \mathscr{S}$.

No que se segue, apresentamos definições precisas desses objetos, em um contexto mais geral, e damos condições que assegurem a sua existência em cada caso.

Além disso, estudamos a relação entre atratores pullback e uniforme, que nos leva a uma descrição detalhada do atrator uniforme e fornece uma melhor compreensão da suas estruturas dinâmicas.

Isto nos permitirá estudar a semicontinuidade inferior, bem como de estabilidade estrutural topológica e geométrica, para atratores uniformes, pelo menos para o caso de perturbações não autônomas de semigrupos.

## Definição (Cociclo)

*Sejam* $(X, d_X), (\Sigma, d_\Sigma)$ *espaços métricos,* $\Theta = \{\Theta(t) : t \geqslant 0\} \subset C(\Sigma)$ *um semigrupo* (*chamado* **semigrupo dirigente**) *e um* **cociclo** *associado a* $\Theta$*, isto é,* $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(t, \sigma) : t \geqslant 0, \sigma \in \Sigma\} \subset C(X)$*, que satisfaz:*

*(i)* $\mathcal{K}(0, \sigma)x = x$*, para todo* $x \in X$ *e* $\sigma \in \Sigma$*;*

*(ii)* $\mathcal{K}(t + s, \sigma) = \mathcal{K}(t, \Theta(s)\sigma)\mathcal{K}(s, \sigma)$*, para todo* $t, s \geqslant 0$ *e* $\sigma \in \Sigma$*;*

*(iii)* $\mathbb{R}^+ \times \Sigma \times X \ni (t, \sigma, x) \mapsto \mathcal{K}(t, \sigma)x \in X$ *contínua.*

A propriedade (ii) é chamada de **propriedade de cociclo**. Defina em $\mathbb{X} = X \times \Sigma$, com a métrica produto o **semigrupo skew-product** $\Pi = \{\Pi(t) \colon t \geqslant 0\} \subset C(\mathbb{X})$ por

$$\Pi(t)(x,\sigma) = (\mathcal{K}(t,\sigma)x, \Theta(t)\sigma) \quad \text{para } t \geqslant 0 \text{ e } (x,\sigma) \in \mathbb{X}.$$

Usando as propriedades do semigrupo $\Theta$ e do cociclo $\mathcal{K}$ temos

$$\begin{aligned}\Pi(t+s)(x,\sigma) &= (\mathcal{K}(t+s,\sigma)x, \Theta(t+s)\sigma)\\ &= (\mathcal{K}(t,\Theta(s)\sigma)\mathcal{K}(s,\sigma)x, \Theta(t)\Theta(s)\sigma) = \Pi(t)\Pi(s)(x,\sigma),\end{aligned}$$

e como as outras propriedades que definem um semigrupo estão claramente satisfeitas, $\Pi$ é de fato um semigrupo em $\mathbb{X}$.

Quando $\Sigma$ for um conjunto unitário, digamos $\Sigma = \{\sigma_0\}$, teremos $\Theta(t)\sigma_0 = \sigma_0$, $t \geqslant 0$, e definindo

$$T(t)x = \mathcal{K}(t, \sigma_0)x, \text{ para todo } t \geqslant 0 \text{ e } x \in X, \tag{6}$$

o semigrupo skew-product passa a ser $\Pi(t)(x, \sigma_0) = (T(t)x, \sigma_0)$, $t \geqslant 0$ e $\mathcal{T} = \{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ define um semigrupo em $X$. Este é o caso quando consideramos uma equação diferencial autônoma.

Vamos agora obter condições que assegurem a existência de atrator para o semigrupo skew-product $\Pi$ em $\mathbb{X}$.

Recorde que, um semigrupo terá atrator global se, e somente se, for asintoticamente compacto e limitado dissipativo.

Defina $\pi_X : \mathbb{X} \to X$ como a projeção usual na primeira coordenada, isto é, $\pi_X(x, \sigma) = x$ para cada $(x, \sigma) \in \mathbb{X}$. Portanto obtemos

$$\pi_X\big(\Pi(t)(x, \sigma)\big) = \mathcal{K}(t, \sigma)x, \text{ para todo } t \geqslant 0 \text{ e } (x, \sigma) \in \mathbb{X}, \quad (7)$$

e definindo $\pi_\Sigma : \mathbb{X} \to \Sigma$ como a projeção usual na segunda coordenada, isto é, $\pi_\Sigma(x, \sigma) = \sigma$ para cada $(x, \sigma) \in \mathbb{X}$, obtemos

$$\pi_\Sigma\big(\Pi(t)(x, \sigma)\big) = \Theta(t)\sigma, \text{ para todo } t \geqslant 0 \text{ e } (x, \sigma) \in \mathbb{X}. \quad (8)$$

Note que, $\Pi$ será limitado dissipativo se, e somente se, existem subconjuntos limitados $B_0$ em $X$ e $S_0$ em $\Sigma$ tais que, para subconjuntos limitados $B \subset X$ e $S \subset \Sigma$ existe $t_0 = t_0(B, S) \geqslant 0$ tal que $\Pi(t)(B \times S) \subset B_0 \times S_0$, para todo $t \geqslant t_0$.

Logo, $\Pi$ será limitado dissipativo se, e somente se, dado $S \subset \Sigma$ limitado, existe $t_0 = t_0(S) \geqslant 0$ tal que $\Theta(t)S \subset S_0$, para todo $t \geqslant t_0$, e também que, dados $B \subset X$ e $S \subset \Sigma$ limitados, existe $t_0 = t_0(B, S) \geqslant 0$ tal que $\mathcal{K}(t, \sigma)B \subset B_0$, para todo $t \geqslant t_0$ e $\sigma \in S$.

Se $\Pi$ for limitado dissipativo, a compacidade assintótica será equivalente a, dadas $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}^+$, $t_n \to \infty$, $\{(x_n, \sigma_n)\}$ limitada em $\mathbb{X}$, $\{\Pi(t_n)(x_n, \sigma_n)\}$ tem subseqüência convergente em $\mathbb{X}$. Isto é equivalente a, dadas $\{t_n\}$ em $\mathbb{R}^+$, $t_n \to \infty$, $\{x_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ limitadas em $X$ e $\Sigma$, respectivamente, temos

$\{\Theta(t_n)\sigma_n\}$ tem uma subseqüência convergente em $\Sigma$ e

$\{\mathcal{K}(t_n, \sigma_n)x_n\}$ tem uma subseqüência convergente em $X$.

Sumarizamos estas observações no teorema a seguir.

Sejam $(X, d_X)$, $(\Sigma, d_\Sigma)$ espaços métricos, $\Theta$ um semigrupo em $\Sigma$ e $\mathcal{K}$ um cociclo em $X$, associado a $\Theta$.

Considere o espaço $\mathbb{X} = X \times \Sigma$, com a métrica produto, e $\Pi$ o semigrupo skew-product definido por $(\mathcal{K}, \Theta)$ em $\mathbb{X}$.

## Teorema (1)

$\Pi$ *tem um atrator global* $\mathbb{A}$ *em* $\mathbb{X}$ *se, e somente se,*

*(i)* $\Theta$ *tem um atrator global* $\mathscr{S}$ *em* $\Sigma$*;*

*(ii)* $\mathcal{K}$ *é* **limitado dissipativo**, *isto é, existe* $B_0 \subset X$ *limitado tal que, dados* $B \subset X$ *e* $S \subset \Sigma$ *limitados, existe* $t_0 = t_0(B, S) \geqslant 0$ *tal que* $\mathcal{K}(t, \sigma)B \subset B_0$*, para todo* $t \geqslant t_0$ *e* $\sigma \in S$*;*

*(iii)* $\mathcal{K}$ *é* **assintoticamente compacto**, *isto é, dada* $\{t_n\}$ *em* $\mathbb{R}^+$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{x_n\}$ *em* $X$ *e* $\{\sigma_n\}$ *em* $\Sigma$ *limitadas então,* $\{\mathcal{K}(t_n,\sigma_n)x_n\}$ *tem uma subseqüência convergente em* $X$.

Agora retornamos ao exemplo (1), é fácil ver que qualquer função em $\Sigma(f)$ satisfaz (2) e (3). Agora, se $\sigma \in \Sigma(f)$ e $u_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução $\mathcal{K}(\cdot,\sigma)u_0$ de (4) deve satisfazer

$$\frac{d}{dt}\|\mathcal{K}(t,\sigma)u_0\|^2 = 2\langle \mathcal{K}(t,\sigma)u_0, \sigma(t,\mathcal{K}(t,\sigma)u_0)\rangle \leqslant -2\delta$$

e, consequentemente, integrando ambos os lados de 0 a $t$, temos $\|\mathcal{K}(t,\sigma)u_0\|^2 \leqslant \|u_0\|^2 - 2\delta t$, para $t \geqslant 0$ tal que $\|\mathcal{K}(t,\sigma)u_0\| > M$.

Disto, soluções de (4) existem para todo $t \geqslant 0$ e, se $B_M = \bar{B}_M^{\mathbb{R}^n}(0)$, dado $B$ de $\mathbb{R}^n$ limitado,

$$\sup_{\sigma\in\Sigma(f)} \operatorname{dist}_{\mathrm{H}}(\mathcal{K}(t,\sigma)B, B_M) \to 0, \qquad \text{as } t \to \infty.$$

Como $\Theta$ tem um atrator global em $\Sigma = \Sigma(f)$, as condições do Teorema 1 estão satisfeitas.

O resultado a seguir é uma conseqüência imediata dos resultados que apresentamos para atratores pullback.

**Corolário (1)**

*Seja $X$ um espaço métrico e $\mathcal{S}$ um processo de evolução em $X$.*

*Suponha que existe um subconjunto compacto $K$ de $X$ tal que $K$ atrai pullback limitados de $X$ no instante $t$, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

*Então, $\mathcal{S}$ tem um atrator pullback $\{A(t) = \omega(K, t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ e $\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A(t)}$ é um subconjunto compacto de $X$.*

Segue diretamente do Teorema 1 e do Corolário 1 que:

**Corolário**

*Sejam* $(X, d_X), (\Sigma, d_\Sigma)$ *espacos métricos,* $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ *com a métrica produto, um semigrupo* $\Theta$ *em* $\Sigma$ *e um cociclo associado* $\mathcal{K}$ *em* $X$*.*

*Se o semigrupo skew-product* $\Pi$*, associado a* $(\mathcal{K}, \Theta)$*, tem um atrator global* $\mathbb{A}$ *em* $\mathbb{X}$ *então, para cada solução global limitada* $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ *de* $\Theta$*, o processo* $\mathcal{S}_\eta = \{S_\eta(t,s) = \mathcal{K}(t-s, \eta(s)) : t \geqslant s\}$ *tem atrator pullback* $\{A_\eta(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ *e* $\overline{\cup_{t \in \mathbb{R}} A_\eta(t)} \subset \pi_X(\mathbb{A})$*.*

Agora podemos caracterizar o atrator global do semigrupo skew-product em termos de atratores pullback de processos associados a soluções globais limitadas do semigrupo dirigente.

## Teorema

*Sejam* $(X, d_X)$, $(\Sigma, d_\Sigma)$ *espacos métricos e considere* $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ *com a métrica produto. Considere ainda um semigrupo* $\Theta$ *em* $\Sigma$ *e um cociclo* $\mathcal{K}$ *associado a* $\Theta$ *em* $X$.

*Se o semigrupo skew-product associado* $\Pi$ *tiver um atrator global* $\mathbb{A}$ *em* $\mathbb{X}$ *então, o semigrupo dirigente* $\Theta$ *terá um atrator global* $\mathscr{S}$ *em* $\Sigma$ *e, se* $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathscr{S}$ *for uma solução global limitada de* $\Theta$ *então, o processo* $\mathcal{S}_\eta = \{S_\eta(t,s)\colon t \geqslant s\}$, $S_\eta(t,s) = \mathcal{K}(t-s, \eta(s))$, $t \geqslant s$, *terá atrator pullback* $\{A_\eta(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $A_\eta(t) = \{x \in X : (x, \eta(t)) \in \mathbb{A}\}$, $t \in \mathbb{R}$. *Além disso,*

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\eta} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_\eta(t) \times \{\eta(t)\},$$

*onde a primeira união é para toda solução global limitada* $\eta$ *de* $\Theta$.

**Prova:** Note que uma solução global limitada de $\Pi$ é uma função contínua $(x(\cdot), \eta(\cdot))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{A}$ que satisfaz, para todo $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$,

$$(x(t+s), \eta(t+s)) = \Pi(t)(x(s), \eta(s)) = (\mathcal{K}(t, \eta(s))x(s), \Theta(t)\eta(s)),$$

Portanto, $x(t+s) = \mathcal{K}(t, \eta(s))x(s) = S_\eta(t+s, s)x(s)$ e $\Theta(t)\eta(s) = \eta(t+s)$, para todo $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$.

Segue que $x\colon \mathbb{R} \to X$ é a solução global limitada for $\mathcal{S}_\eta$ e $\eta$ é uma solução global limitada para $\Theta$.

Logo, qualquer ponto de $\mathbb{A}$ é da forma $(x(t), \eta(t))$, com $x(t) \in A_\eta(t)$ e $\eta\colon \mathbb{R} \to \Sigma$ é solução global limitada de $\Theta$ e assim

$$\mathbb{A} \subset \bigcup_{\eta} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_\eta(t) \times \{\eta(t)\},$$

onde a primeira união é para toda solução global limitada $\eta$ de $\Theta$.

Por outro lado, Se $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathscr{S}$ é uma solução global limitada for $\Theta$ e $x_0 \in A_\eta(t_0)$, existe solução global $x\colon \mathbb{R} \to X$ de $\mathcal{S}_\eta$ tal que $x(t_0) = x_0$ e $x(t) \in A_\eta(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_\eta(t)$ é limitado, $x\colon \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada de $\mathcal{S}_\eta$, e consequentemente $(x(\cdot), \eta(\cdot))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ é a solução global limitada de $\Pi$, mostrando que $(x(t), \eta(t)) \in \mathbb{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, $(x_0, \eta(t_0)) \in \mathbb{A}$ e

$$\bigcup_{\eta} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_\eta(t) \times \{\eta(t)\} \subset \mathbb{A},$$

onde a primeira união é para toda solução global limitada $\eta$ de $\Theta$, o que completa a prova. $\square$

Um objeto importante que aparece em Teorema 2 é $\pi_X(\mathbb{A})$, que tem a propriedade $\mathcal{K}$-atração de limitados de $X$, uniformemente em limitados de $\Sigma$. Este objeto é, no nosso contexto, o que é conhecido na literatura como *atrator uniforme* para o cociclo $\mathcal{K}$, que explicamos a seguir.

# Atratores Uniformes

## Definição

*Sejam* $(X, d_X)$, $(\Sigma, d_\Sigma)$ *espacos métricos e* $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ *com a métrica produto. considere* $\Theta$ *um semigrupo em* $\Sigma$ *e* $\mathcal{K}$ *um cociclo associado a* $\Theta$. *O* **atrator uniforme** *para o cociclo* $\mathcal{K}$ *é o fechado minimal* $\mathcal{A}$ *em* $X$ *tal que, dados* $B \subset X$ *e* $\Gamma \subset \Sigma$ *limitados,*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\sigma\in\Gamma} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\mathcal{K}(t,\sigma)B, \mathcal{A}) = 0,$$

*onde minimal significa que, se* $C \subset X$ *for fechado e*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\sigma\in\Gamma} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\mathcal{K}(t,\sigma)B, C) = 0,$$

*para cada* $B \subset X$ *e* $\Gamma \subset \Sigma$ *limitados então,* $\mathcal{A} \subset C$.

De um Teorema anterior o seguinte resultado vale:

**Teorema**

*Sejam* $(X, d_X)$, $(\Sigma, d_\Sigma)$ *espaços métricos e* $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ *com a métrica produto. considere* $\Theta$ *um semigrupo em* $\Sigma$ *e* $\mathcal{K}$ *um cociclo em* $X$*, associado a* $\Theta$*. Se* $\Theta$ *tem um atrator global* $\mathscr{S}$ *em* $\Sigma$ *e* $\mathcal{K}$ *é limitado dissipativo e assintóticamente compacto então, o cociclo* $\mathcal{K}$ *tem um atrator uniforme compacto* $\mathcal{A}$*, e se* $\mathbb{A}$ *é o atrator global do semigrupo skew-product* $\Pi$ *então,* $\mathcal{A} = \pi_X(\mathbb{A})$*. Além disso,*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\eta} A_\eta(0),$$

*onde a união é para toda solução global limitada* $\eta$ *de* $\Theta$*.*

Este resultado é uma aplicação imediata de um teorema anterior.

Simplesmente note que, se $\eta$ é a solução global limitada de $\Theta$ então, $\eta_r(\cdot) = \eta(\cdot + r)$ também é, para cada $r \in \mathbb{R}$, e podemos concluir que $A_{\eta_r}(0) = A_\eta(r)$.

# Considerações Gerais

Como explicamos anteriormente, uma questão fundamental no estudo do comportamento assintótico (atratores) de sistemas dinâmicos é a continuidade relativamente a perturbações.

No que se segue enunciamos e provamos resultados que fornecem condições sob as quais semicontinuidade superior e inferior de atratores pullback e uniformes valem.

Fixemos $(X, d)$ e $(M, d_M)$ will espaços métricos e considremos o espaço produto $\mathbb{X}_M = X \times M$ com a métrica produto.

Suponha que $\Theta \subset C(M)$ seja um semigrupo, $\mathcal{K}$ seja um cociclo associado a $\Theta$. Sejam ainda $(\mathcal{K}, \Theta)_{(X,M)}$ e $\Pi \subset C(\mathbb{X}_M)$, respectivamente, o sistema dinâmico não autônomo e o semigrupo skew-product associados.

Seja $\Lambda = [0,1]$ e $\{\Sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos fechados positivamente $\Theta$-invariantes de $M$, e suponha que

$$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Sigma_\lambda.$$

Seja $d_\lambda$ a restrição de $d_M$ a $\Sigma_\lambda$, $\Theta_\lambda = \{\Theta_\lambda(t) \colon t \geqslant 0\} \subset C(\Sigma_\lambda)$ a restrição de $\Theta$ a $\Sigma_\lambda$, e $\{\mathcal{K}(t,\sigma) \colon t \geqslant 0,\ \sigma \in \Sigma_\lambda\} \subset C(X)$ o cociclo relativo a $\Theta_\lambda$ (que representaremos por $\mathcal{K}_\lambda$).

Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $\mathbb{X}_\lambda = X \times \Sigma_\lambda$ e $(\mathcal{K}_\lambda, \Theta_\lambda)_{(X,\Sigma_\lambda)}$, $\{\Pi_\lambda(t) \colon t \geqslant 0\} \subset C(\mathbb{X}_\lambda)$, respectivamente, o sistema dinâmico não autônomo e o semigrupo skew-product associados.

Escreveremos $\Pi_\lambda$ para $\{\Pi_\lambda(t)\colon t \geqslant 0\}$. Claremente, $\Pi_\lambda$ é a restrição de $\Pi$ a $\mathbb{X}_\lambda$.

Iremos supor que:

$$\Pi \text{ tem um atrator global } \mathbb{A} \text{ em } \mathbb{X}_M. \tag{C1}$$

Utilizaremos $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{E}$ para denotar a semidistância de Hausdorff em $E$, onde $E$ pode ser $X$, $\Sigma$, $\Sigma_\lambda$, $\mathbb{X}_\lambda$ ou $\mathbb{X}_M$.

Supondo que a condição (C1), provaremos algumas propriedades relativas aos atratores globais de $\Pi_\lambda$ e $\Theta_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$.

## Proposição

*Se* (C1) *vale,* $\Pi_\lambda$ *tem um atrator global* $\mathbb{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ *e* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{A}$.

**Prova:** Seja $\mathbb{K}_\lambda = \mathbb{A} \cap \mathbb{X}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Para $\mathbb{B}_\lambda \subset \mathbb{X}_\lambda$ limitado, temos

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_M}(\Pi(t)\mathbb{B}_\lambda, \mathbb{A}) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pois $\mathbb{B}_\lambda$ é limitado em $\mathbb{X}_M$ e $\mathbb{A}$ é o atrator global de $\Pi$ em $\mathbb{X}_M$.

Como $\mathbb{K}_\lambda$ é compacto, $\Pi_\lambda$ é limitado dissipativo e assintóticamente compacto em $\mathbb{X}_\lambda$. Assim, $\Pi_\lambda$ tem um atrator global $\mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{K}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Tomando a união em $\lambda \in \Lambda$ concluímos a última afirmativa e a prova está completa.$\square$

**Proposição**

*Se* (C1) *vale então,* $\Theta_\lambda$ *tem atrator global* $\mathscr{S}_\lambda$ *em* $\Sigma_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

**Prova:** Defina $\Gamma_\lambda = \pi_\Sigma(\mathbb{A}) \cap \Sigma_\lambda$, que é compacto em $\Sigma_\lambda$. Se $J \subset \Sigma_\lambda$ é limitado, fixe $x \in X$ e faça $\mathbb{B} = \{x\} \times J$. Então, $\mathbb{B}$ é limitado em $\mathbb{X}_\lambda$ e, consequentemente, limitado em $\mathbb{X}_M$. Logo

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\Sigma}(\Theta(t)J, \pi_\Sigma(\mathbb{A})) \leqslant \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\mathbb{X}_M}(\Pi(t)\mathbb{B}, \mathbb{A}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

quando $t \to \infty$. Agora, $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\Sigma_\lambda}(\Theta(t)J, \Gamma_\lambda) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ segue como no resultado anterior e $\Theta_\lambda$ é limitado dissipativo.

Considere seqüências $t_n \to \infty$, e $\{\sigma_n\} \subset \Sigma_\lambda$ limitada. Fixe $x \in X$ e considere $\{(x, \sigma_n)\} \subset \mathbb{X}_\lambda \subset \mathbb{X}$, que é uma seqüência limitada em $\mathbb{X}$. Como $\Pi$ é assintóticamente compacto, $\{\Pi(t_n)(x, \sigma_n)\}$ tem uma subseqüência convergente em $\mathbb{X}_M$.

Usando a definição de $\Pi$ e o fato que $\sigma_n \in \Sigma_\lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\Pi(t_n)(x, \sigma_n) = (\mathcal{K}(t_n, \sigma_n)x, \Theta(t_n)\sigma_n) = (\mathcal{K}(t_n, \sigma_n)x, \Theta_\lambda(t_n)\sigma_n),$$

e assim, $\{\Theta(t_n)\sigma_n\}$ tem uma subseqüência convergente em $M$.

Como $\Sigma_\lambda$ é fechado e positivamente $\Theta$-invariante, o limite desta subseqüência pertence $\Sigma_\lambda$, provando que $\Theta_\lambda$ é asymptoticamente compacto e completando a demonstração. $\square$

Com esta proposição em mente, obtemos a família $\{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de atratores globais para $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, e we iremos supor que:

$$\text{a família } \{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ é contínua em cada } \lambda \in \Lambda. \qquad \text{(C2)}$$

## Proposição (3)

*Se* (C1) *e* (C2) *valem, então:*

*(i)* *Dado* $\lambda_0 \in \Lambda$, $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\sigma_\lambda \in \Sigma_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *and* $\sigma_\lambda \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} \sigma_{\lambda_0}$, *temos*

$$d_{\mathbb{X}_M}(\Pi_\lambda(t)(x,\sigma_\lambda), \Pi_{\lambda_0}(t)(x,\sigma_{\lambda_0})) \to 0 \quad \textit{quando } \lambda \to \lambda_0,$$

*uniformemente, para* $(t,x)$ *em compactos de* $\mathbb{R}^+ \times X$*;*

*(ii)* *Dadas seqüências* $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *com* $\lambda_n \to \lambda_0$, $t_n \to \infty$ *e* $\{(x_n,\sigma_n)\}$ *limitada em* $\mathbb{X}_M$ *com* $\sigma_n \in \mathscr{S}_{\lambda_n}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *então,* $\{\Pi_{\lambda_n}(t_n)(x_n,\sigma_n)\}$ *tem uma subseqüência convergente para* $(z,\omega)$ *com* $\omega \in \mathscr{S}_{\lambda_0}$*;*

*(iii)* *Existe* $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{X}_M$ *limitado tal que o conjunto* $\mathbb{B}_\lambda = \mathbb{B}_0 \cap \mathbb{X}_\lambda$ $\Pi_\lambda$*-atrai limitados de* $\mathbb{X}_\lambda$ *para cada* $\lambda \in [0,1]$.

**Prova:**

Para provar (i), primeiro recorde que $\Pi_\lambda$ é a restrição de $\Pi$ a $\mathbb{X}_\lambda$, assim

$$\begin{aligned} & d_{\mathbb{X}_M}(\Pi_\lambda(t)(x,\sigma_\lambda),\Pi_{\lambda_0}(t)(x,\sigma_{\lambda_0})) \\ & = d(\mathcal{K}(t,\sigma_\lambda)x,\mathcal{K}(t,\sigma_{\lambda_0})x) + d_\Sigma(\Theta(t)\sigma_\lambda,\Theta(t)\sigma_{\lambda_0}) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

uniformemente, para $(t,x)$ em compactos de $\mathbb{R}^+\times X$, pois $\sigma_\lambda \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} \sigma_{\lambda_0}$.

Agora provamos (ii). A seqüência $\{\Pi_{\lambda_n}(t_n)(x_n,\sigma_n)\}$ tem uma subseqüência convergente para um ponto $(z,\omega) \in \mathbb{X}_M$, pois $\Pi$ é é assintoticamente compacto em $\mathbb{X}_M$.

Mas $\Pi(t)(x_n,\sigma_n) = (\mathcal{K}(t,\sigma_n)x_n, \Theta(t)\sigma_n)$ e, para a subseqüência convergente, $\Theta(t_n)\sigma_n \to \omega$.

Como $\sigma_n \in \mathscr{S}_{\lambda_n}$ e $\mathscr{S}_{\lambda_n}$ é $\Theta$-invariante, temos que $\Theta(t)\sigma_n \in \mathscr{S}_{\lambda_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Usando (C2), obtemos $\omega \in \mathscr{S}_{\lambda_0}$. Portanto, $(z,\omega) \in \mathbb{X}_{\lambda_0}$, o que prova (ii).

Para (iii), tome $\mathbb{B}_0 = \mathbb{A}$, e a prova está completa. $\square$

# Semicontinuidade superior de atratores skew-product

Procedendo como antes, e utilizando a Proposição 3, obtemos:

## Teorema (2)

*Suponha* (C1) *e* (C2) *e seja* $\mathbb{A}_\lambda$ *o atrator global de* $\Pi_\lambda$ *em* $\mathbb{X}_\lambda$ *para cada* $\lambda \in \Lambda$, *com* $\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{A}$. *Se*

$\lambda_0 \in \Lambda$, $\{\lambda_k\}$ *é uma seqüência em* $\Lambda$, $\lambda_k \to \lambda_0$,

$\{s_k\}$ *é uma seqüência em* $\mathbb{R}$ *e,*

*dado* $k \in \mathbb{N}$, $(\upsilon_k, \eta_k)$ *é uma solução global de* $\Pi_{\lambda_k}$ *em* $\mathbb{A}_{\lambda_k}$

*então,*

*existe uma subseqüência* $\{(\upsilon_{k_j},\eta_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $\{(\upsilon_k,\eta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{(\upsilon_{k_j}(\cdot+s_{k_j}), \eta_{k_j}(\cdot+s_{k_j}))\}$ *converge uniformemente em limitados de* $\mathbb{R}$ *para uma solução global* $(\upsilon, \eta)$ *de* $\Pi_{\lambda_0}$ *em* $\mathbb{A}_{\lambda_0}$.

*Em particular,* $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é semicontínua superiormente em* $\lambda_0$.

**Prova:** Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, uma solução global limitada de $\Pi_{\lambda_k}$ em $\mathbb{X}_{\lambda_k}$ por, $\psi_k(t) = (\upsilon_k(t+s_k), \eta_k(t+s_k))$ e $t \in \mathbb{R}$.

Como $\{\psi_k(0)\} \subset \mathbb{A}$, podemos extrair uma subseqüência $\{n_{0,k}\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\psi_{n_{0,k}}(0) \to (x,\sigma) \in \mathbb{A}$.

Usando que $\eta_k(t+s_k) \in \mathscr{S}_{\lambda_k}$, para todo $k$, de (C2) obtemos $\sigma \in \mathscr{S}_{\lambda_0}$, e assim $(x,\sigma) \in \mathbb{A}_{\lambda_0}$.

Defina $\psi(t) = \Pi_{\lambda_0}(t)(x,\sigma)$ para todo $t \geqslant 0$. Então

$$\psi_{n_{0,k}}(t) = \Pi_{\lambda_{n_{0,k}}}(t)\psi_{n_{0,k}}(0) \to \Pi_{\lambda_0}(t)(x,\sigma) = \psi(t),$$

uniformemente para $t$ em limitados de $\mathbb{R}^+$. Por indução, como fizemos anteriormente, o resultado segue.$\square$

Agora traduzimos estas as condições $(C1)$ e $(C2)$ para os cociclos e o semigrupos dirigentes, para que possamos aplicar os resultados obtidos a equações diferenciais.

Se tiver atrator global, $\Pi$ será limitado dissipativo e assintóticamente compacto. Logo, o semigrupo dirigente $\Theta$ terá atrator global $\mathscr{S}$ em $M$.

$\Pi$ limitado dissipativo, traduz-se na noção de *coletivamente limitado dissipativo*, para a família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e para a família de semigrupos dirigentes $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Veja definição a seguir.

## Definição

*A família de cociclos* $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *com semigrupos dirigentes* $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *será* **coletivamente limitada dissipativa** *se satisfaz:*

(a) *para algum* $B_0 \subset X$ *limitado, dado um limitado qualquer* $B \subset X$ *e família* $S_\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *com* $\cup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ *limitado em* $M$, *temos*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\lambda\in[0,1]} \sup_{\sigma_\lambda\in S_\lambda} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{X}(\mathcal{K}(t,\sigma_\lambda)B, B_0) = 0;$$

(b) *existe um limitado* $\Xi \subset M$ *tal que, se* $\Xi_\lambda = \Xi \cap \Sigma_\lambda$ *e* $S_\lambda \subset \Sigma_\lambda$, *para cada* $\lambda \in \Lambda$, *com* $\cup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ *limitado em* $M$ *então,*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}^{\Sigma_\lambda}(\Theta_\lambda(t)S_\lambda, \Xi_\lambda) = 0.$$

$\Pi$ assintóticamente compacto é traduzida na noção de *compacidade assintótica coletiva* para a família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e para a família de semigrupos dirigentes $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, que definimos a seguir.

## Definição

*A família de cociclos* $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *com os semigrupos dirigentes associados* $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *será* **coletivamente assintoticamente compacta** *se satisfizer:*

(a) *dadas seqüências* $\{t_n\}$ *em* $\mathbb{R}$ *com* $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{x_n\}$ *limitada em* $X$ *e* $\{\sigma_n\}$ *limitada em* $M$, *com* $\sigma_n \in \Sigma_{\lambda_n}$ *então,* $\{\mathcal{K}(t_n,\sigma_n)x_n\}$ *tem uma subseqüência convergente em* $X$;

(b) *dadas seqüências* $t_n \to \infty$ *e* $\{\sigma_n\}$ *limitada em* $M$, *com* $\sigma_n \in \Sigma_{\lambda_n}$ *então,* $\{\Theta_{\lambda_n}(t_n)\sigma_n\}$ *tem subseqüência convergente.*

## Observação

*Se* $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *e* $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *for coletivamente limitado dissipativo e coletivamente assintoticamente compacto então,* (C1) *vale.*

Estas serão as condições sob as quais estudaremos a continuidade de atratores skew-product, uniformes e pullback.

O Teorema 4 pode agora ser enunciado com as condições sobre as famílias de cociclos e semigrupos dirigentes associados, em lugar de condições sobre os semigrupos skew-product.

Como vimos, o atrator uniforme $\mathcal{A}_\lambda = \pi_X(\mathbb{A}_\lambda)$ é a projeção na primeira coordenada do atrator global $\mathbb{A}_\lambda$ do semigrupo skew-product $\Pi_\lambda$ em $\mathbb{X}_\lambda$. Segue diretamente que:

## Teorema

*Suponha que a família de cociclos $\{\mathcal{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, com a família de semigrupos dirigentes associados $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, seja coletivamente limitado dissipativa e coletivamente assintoticamente compacta.*

*Então, para cada $\lambda \in \Lambda$, o sistema dinâmico não autônomo $(\mathcal{K}_\lambda, \Theta_\lambda)$ tem um atrator uniforme $\mathcal{A}_\lambda$ em $X$.*

*Além disso, $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ é relativamente compacto em $X$ e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$, para cada $\lambda_0 \in \Lambda$.*