Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Décima Sexta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

16 de Outubro de 2023

Para motivar os nossos estudos, vamos considerar uma equação diferencial ordinária simples em $\mathbb{R}^n$.

Seja $\mathbb{J} = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma família de campos vetoriais (um para cada $t \in \mathbb{J}$).

Suponha que f seja tal que o problema

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u), \;\; t > s \\ u(s) = u_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

tenha uma única solução $u(\cdot, s, u_0)$, para cada $s \in \mathbb{J}$ e $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

Suponha ainda que $u(\cdot, s, u_0)$ de (1) esteja definida em $[s, \infty)$, para cada $s \in \mathbb{J}$ e $u_0 \in \mathbb{R}^n$, e que $\mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \ni (t, s, u_0) \mapsto u(t, s, u_0) \in \mathbb{R}^n$ seja contínua, onde $\mathcal{P} = \{(t,s) \in \mathbb{J}^2 \colon t \geqslant s\}$.

Para cada t, $f(t,\cdot)$ é o campo vetorial que dirige a solução no instante t. Logo, o traço descrito pela solução em $\mathbb{R}^n$ entre s e $s+\tau$ dependerá dos campos vetoriais $f(t,\cdot)$, $t \in [s, s+\tau]$, e desta forma, dependerá do tempo incial s e do tempo decorrido τ.

Quando $f(t,\cdot) = f(\cdot)$ for independente de t, isto é, quando (1) for autônoma, o traço descrito pela solução em $\mathbb{R}^n$ dependerá apenas do tempo decorrido τ e não do instante inicial s.

Para $\mathbb{J} = \mathbb{R}$ podemos definir $S(t,s)u_0 = u(t,s,u_0)$ para cada $(t,s) \in \mathcal{P}$ e a família $\mathcal{S} = \{S(t,s) \colon (t,s) \in \mathcal{P}\} \subset C(\mathbb{R}^n)$ é um *processo de evolução* em $\mathbb{R}^n$.

Recorde que uma *solução global limitada* de $\mathcal{S}$ é uma função $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $S(t,s)\xi(s) = \xi(t)$, para cada $t \geqslant s$, com $\xi(\mathbb{R})$ limitado em $\mathbb{R}^n$, e neste caso, assumindo que $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback limitado $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, podemos caracterizá-lo por

$$A(t) = \{\xi(t)\colon \xi \text{ é uma solução global limitada}\}.$$

Também temos a caracterização

$$A(t) = \{W^u(\xi)(t)\colon \xi \text{ é solução global limitada backwards-separada}\}.$$

Observe que, a teoria de atratores pullback requer que o campos campos vetoriais estejam definidos para todos os instantes de tempo (isto é, $\mathbb{J} = \mathbb{R}$).

Em muitos modelos a história passada simplesmente não está disponível e os campos vetoriais somente são conhecidos após um tempo dado, por exemplo $\mathbb{J} = \mathbb{R}^+$.

Se artificialmente definimos os campos vetoriais para tempos negativos, os atratores pullback dependerão fortemente de tal extensão, já que a maior parte da assintótica pullback será dirigida por estes campos vetoriais **artificialmente** introduzidos.

Observe que, a teoria de atratores pullback requer que o campos campos vetoriais estejam definidos para todos os instantes de tempo (isto é, $\mathbb{J} = \mathbb{R}$).

Em muitos modelos a história passada simplesmente não está disponível e os campos vetoriais somente são conhecidos após um tempo dado, por exemplo $\mathbb{J} = \mathbb{R}^+$.

Se artificialmente definimos os campos vetoriais para tempos negativos, os atratores pullback dependerão fortemente de tal extensão, já que a maior parte da assintótica pullback será dirigida por estes campos vetoriais **artificialmente** introduzidos.

Mesmo no caso autônomo.

O ponto central aqui é entender que, para equações diferenciais não-autônomas, existem infinitos campos vetoriais (um para cada instante de tempo) dirigindo a evolução enquanto que, no caso autônomo existe apenas um.

Desta forma, a evolução dos campos vetoriais (chamados *'driving'*) deve também ser levada em consideração.

Uma vez que compreendemos este fato, fica claro quão rica e difícil o estudo *da dinâmica de problemas não-autônomos* realmente é.

No que se segue, apresentamos um método geral que proporciona uma maneira de estudar uma equação diferencial não-autônoma e explicamos algumas características importantes das equações autônomas que são frequentemente negligenciadas.

O método consiste em considerar a família de não-linearidades como um fluxo base conduzido pelo operador translação atuando no fecho de $\{f(t+\cdot,\cdot)\colon t \in \mathbb{R}^+\}$ onde $f(\cdot,\cdot)$ é a função que ocorre na equação original.

Para assegurar a compreensão do método, vamos continuar a falar sobre o problema (1), e deixar o contexto mais geral e abstrato para as próximas aulas.

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das funções contínuas $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tais que, para cada $B\subset\mathbb{R}^n$ limitado, exista uma constante $L_f(B)>0$ e uma função contínua e crescente $w_{f,B}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $w_{f,B}(0)=0$, tal que

$$\|f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)\|\leqslant w_{f,B}(|t_1-t_2|)+L_f(B)\|x_1-x_2\|, \quad (2)$$

para $t_1,t_2\in\mathbb{R}^+$ e $x_1,x_2\in B$.

Em $\mathcal{C}$ consideramos a métrica ρ da convergência uniforme nas partes compactas de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Além disso, suponha que f seja *dissipativa*, isto é, que exista $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que

$$\langle f(t,x), x\rangle \leqslant -\delta \quad \text{para } t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| > M, \tag{3}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Denote por Σ o fecho, relativamente à métrica ρ, do conjunto das translações (para frente) f, isto é,

$$\Sigma(f) = \overline{\{f(s+\cdot,\cdot)\colon s \in \mathbb{R}^+\}}^{\rho},$$

conhecido como **envoltória positiva** de f no espaço métrico $(\mathcal{C}, \rho)$, e defina o *operador translação*, $\Theta(t)\colon \Sigma(f) \to \Sigma(f)$ por

$$\Theta(t)\sigma(\cdot,\cdot) = \sigma(t+\cdot,\cdot), \;\; t \geqslant 0.$$

É fácil ver que $\Theta = \{\Theta(t)\colon t \in \mathbb{R}^+\}$ define um semigroupo em $\Sigma(f)$, que denotaremos simplesmente por Θ, e chamamos de **semigrupo dirigente**.

Ainda, segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que $\Sigma(f)$ é compacto e Θ tem um atrator global $\mathscr{S}$ em $\Sigma(f)$.

Para estudar o comportamento assintótico de (1), consideramos uma combinação do fluxo base Θ em $\Sigma(f)$ e, para cada $\sigma \in \Sigma(f)$, o semifluxo $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, u_0) \mapsto \mathcal{K}(t, \sigma)u_0 \in \mathbb{R}^n$ onde, para cada $u_0 \in \mathbb{R}^n$, a função $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \mathcal{K}(t, \sigma)u_0 \in \mathbb{R}^n$ é a solução de

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma(t, u), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

Note que, as condições impostas sobre f, asseguram que, as soluções de (4) estão definidas em $[0, \infty)$.

Além disso, a função $\mathbb{R}^+ \times \Sigma(f) \ni (t,\sigma) \mapsto \mathcal{K}(t,\sigma) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

(i) $\mathcal{K}(0,\sigma)x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma \in \Sigma(f)$;

(ii) $\mathcal{K}(t+s,\sigma) = \mathcal{K}(t,\Theta(s)\sigma)\mathcal{K}(s,\sigma)$ para todo $t \geqslant s$ e $\sigma \in \Sigma(f)$;

(iii) $\mathbb{R}^+ \times \Sigma(f) \times \mathbb{R}^n \ni (t,\sigma,x) \mapsto \mathcal{K}(t,\sigma)x \in \mathbb{R}^n$ é contínua.

A segunda propriedade é comumente conhecida como *'propriedade do cociclo'* e, a função $\mathcal{K}$ de *'semifluxo cociclo'*, ou simplesmente *cociclo*.

Estas propriedades definem um cociclo e a associação com a equação diferencial (4) passa a não ser mais necessária.

De qualquer forma, interpretamos $\mathcal{K}(t,\sigma)u_0$ como a solução no instante t que iniciou, no instante zero, em u_0 sujeita ao 'dirigente' $\sigma \in \Sigma(f)$.

Agora podemos falar de *processos de evolução* e *atratores pullback*.

Se $\eta\colon \mathbb{R} \to \Sigma(f)$ for uma solução global para o semigrupo Θ, então a família $\mathcal{S}_\eta = \{S_\eta(t,s)\colon t \geqslant s\} \subset C(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$S_\eta(t,s) = \mathcal{K}(t-s, \eta(s)) \quad \text{for } t \geqslant s,$$

define um processo de evolução.

De fato, para $t \geqslant s \geqslant r$, usando a propriedade de cociclo, temos

$$\begin{aligned} S_\eta(t,s)S_\eta(s,r) &= \mathcal{K}(t-s,\Theta(s-r)\eta(r))\mathcal{K}(s-r,\eta(r)) \\ &= \mathcal{K}(t-r,\eta(r)) = S_\eta(t,r), \end{aligned}$$

assim como todas as demais propriedades de processos, bastando usar propriedades do semigrupo dirigente Θ e do cocicle $\mathcal{K}$.

Mostre que, sob as condições impostas para f, $S_\eta(\cdot,\cdot)$ tem um atrator pullback $\{A_\eta(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Observação

Suponha que $\mathbb{J} = \mathbb{R}^+$ *e também que* f *seja independente do tempo. Então* $\Sigma(f) = \{f\}$ *e* $\mathscr{S} = \{f\}$*. Da* Θ*-invariancia de* $\mathscr{S}$*, existe uma solução global* $\eta\colon \mathbb{R} \to \{f\}$ *e podemos definir*

$$S_\eta(t+s, s) = \mathcal{K}(t, \eta(s)) = \mathcal{K}(t, f),$$

para todo $t \geqslant 0$ *e* $s \in \mathbb{R}$*.*

Portanto, em $+\infty$ *o campo vetorial* f *estará, de fato, definido para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Chamamos a atenção para esta observação pois ela merece uma reflexão profunda.*

Juntamente, $\mathcal{K}$ e Θ determinam o problema não autônomo (1), e o par $(\mathcal{K}, \Theta)_{(\mathbb{R}^n, \Sigma(f))}$ será chamado de *sistema dinâmico não autônomo* em $(\mathbb{R}^n, \Sigma(f))$.

A um sistema dinâmico não autônomo, podemos associar um semigrupo $\Pi = \{\Pi(t) \colon t \geqslant 0\}$ em $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n \times \Sigma(f)$, com a métrica $d_{\mathbb{X}}((x_1, \sigma_1), (x_2, \sigma_2)) = \|x_1 - x_2\| + \rho(\sigma_1, \sigma_2)$, fazendo

$$\Pi(t)(x, \sigma) = (\mathcal{K}(t, \sigma)x, \Theta(t)\sigma), \text{ para } t \geqslant 0 \text{ e } (x, \sigma) \in \mathbb{X}.$$

As propriedades de Θ e $\mathcal{K}$ asseguram Π satisfaça todas as propriedades de semigrupos.

Π é chamado *semigrupo skew-product* associado a $(\mathcal{K}, \Theta)_{(\mathbb{R}^n, \Sigma(f))}$.

O conjunto $\{(x, \sigma) \in \mathbb{X} \colon \|x\| \leqslant M, \sigma \in \mathscr{S}\}$ é compacto em $\mathbb{X}$ e atrai limitados de $\mathbb{X}$.

Segue que Π tem um atrator global $\mathbb{A}$ em $\mathbb{X}$.

Veremos mais tarde que

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\eta} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_\eta(t) \times \{\eta(t)\} \tag{5}$$

onde a união é sobre todas as soluções globais η de Θ em $\mathscr{S}$.

O conjunto assintótico de estados, quando $t \to \infty$, das soluções de (1) é $\mathcal{A} =$ a projeção na primeira coordenada de $\mathbb{A}$, e é chamado de *atrator uniforme* para (1).