Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Décima Quinta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

09 de Outubro de 2023

$\omega-$limite pullback

Como no caso autônomo, a noção de $\omega-$limite desempenhará um papel importante na teoria de atratores pullback para processos de evolução.

No que se segue $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é um processo de evolução em um espaço métrico X.

Definição ($\omega-$limite pullback)

Seja $B \subset X$. O ω-limite pullback de B é definido por

$$\omega(B,t) := \bigcap_{\sigma \leqslant t} \overline{\bigcup_{s \leqslant \sigma} S(t,s)B}.$$

Exercício (Caracterização de $\omega-$limite pullback)

Para cada subconjunto B de X, temos que

$$\begin{aligned}\omega(B,t) =&\{y \in X : \text{ existem } \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \leq t,\ s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ &\text{e } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ em } B,\ \text{tal que } y = \lim_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k\}.\end{aligned} \tag{1}$$

Observação ($\omega-$limites para semigrupos)

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo e $S(t,s) = T(t-s)$, $(t,s) \in \mathcal{P}$, $\omega(B,t) := \bigcap_{s\geqslant 0} \overline{\bigcup_{r\geqslant s} T(r)B}$ é independente de t e coincide com a definição do conjunto $\omega-$limite $\omega(B)$ de B para semigrupos.

Propriedades dos $\omega-$limites pullback

Alguns dos resultados a seguir têm provas semelhantes àquelas dos análogos autônomos. Apresentaremos algumas dessas provas para estabelecer a analogia.

Lemma

Se $B \subset X$, então $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$ para cada $(t,s) \in \mathcal{P}$. Se $(t,s) \in \mathcal{P}$, $\omega(B,s)$ é compacto e atrai pullback B no instante s, então $S(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t)$.

Além disso, se $\omega(B,s)$ é compacto e atrai pullback B no instante s para cada $s \leqslant t$, B é um conjunto conexo e $\bigcup_{s\leqslant t}\omega(B,s) \subset B$, então $\omega(B,t)$ é conexo.

Prova: Se $\omega(B,t)=\varnothing$, não há o que mostrar. Se $\omega(B,s)\neq\varnothing$, da continuidade de $S(t,s)$ e de (1) segue imediatamente que $S(t,s)\omega(B,s)\subset\omega(B,t)$.

Resta mostrar que, se $\omega(B,s)$ é compacto e atrai pullbback B, $\omega(B,t)\subset S(t,s)\omega(B,s)$. Para $x\in\omega(B,t)$, existem $\sigma_k\to-\infty$, $\sigma_k\leqslant t$ e $x_k\in B$ tais que $S(t,\sigma_k)x_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}x$. Como $\sigma_k\to-\infty$ temos que existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $\sigma_k\leqslant s$ para todo $k\geqslant k_0$.

Logo, $S(t,s)S(s,\sigma_k)x_k=S(t,\sigma_k)x_k\to x$ para $k\geqslant k_0$ e como $\omega(B,s)$ atrai pullback B no instante s, temos $\mathrm{dist}(S(s,\sigma_k)x_k,\omega(B,s))\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Disto e da compacidade de $\omega(B,s)$, é fácil ver que $\{S(s,\sigma_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente (que também denotaremos por $S(s,\sigma_k)x_k$) para algum $y \in \omega(B,s)$. Da continuidade de $S(t,s)$ segue que $S(t,s)y = x$. Portanto, $\omega(B,t) = S(t,s)\omega(B,s)$.

Agora provaremos a afirmativa sobre a conexidade de $\omega(B,t)$.

Suponha que $\omega(B,t)$ é disconexo, então $\omega(B,t)$ é união disjunta de dois conjuntos compactos (consequentemente separados por uma distância positiva), mas $\omega(B,t)$ atrai pullback B e isto é uma contradição com o fato que $\overline{S(t,s)B}$ é conexo e contém $\omega(B,t)$.$\square$

Lemma

Suponha que B seja um subconjunto não vazio de X e que, para cada $t \in \mathbb{T}$, exista $\sigma_t \leqslant t$ tal que $\overline{\bigcup_{s \leqslant \sigma_t} S(t,s)B}$ seja compacto.

Então, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\omega(B,t)$ não vazio, compacto, atrai pullback B, no instante t, e $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante.

Prova: Como $\overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma} S(t,s)B}$ é não vazio e compacto para cada $\sigma \leqslant \sigma_t$, temos que $\omega(B,t)$ é não vazio e compacto.

Mostremos que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t. Suponha que não, então existe $\epsilon > 0$ e seqüências $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em B, $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $\sigma_k \leqslant t$, $\sigma_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ com $\mathrm{dist}(S(t,\sigma_k)x_k, \omega(B,t)) > \epsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma_t} S(t,s)B}$ é compacto e, para algum $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$\{S(t,\sigma_k)x_k, k \geqslant k_0\} \subset \overline{\bigcup_{s\leqslant\sigma_t} S(t,s)B},$$

segue que $\{S(t,\sigma_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente para algum $y \in \omega(B,t)$.

Esta contradição mostra que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t.

Do Lema 1, $\omega(B,t)$ é invariante e a prova está completa.$\square$

Caracterização de Processos com atrator pullback

Teorema (Caracterização de processos com atratores pullback)

Seja $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. As seguintes afirmativas são equivalentes

- *$\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$.*
- *Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t) : t \in \mathbb{T}\}$ que atrai pullback subconjuntos limitados de X.*

Em qualquer dos casos

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B,t) : \ B \subset X, \ B \ \ \textit{limitado} \}}. \tag{2}$$

Prova: Se $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}\}$ tem atrator pullback $\{\mathcal{A}(t):t\in\mathbb{T}\}$, cada $\mathcal{A}(t)$ é compacto e atrai pullback limitados de X.

A recíproca é provada da seguinte forma: Primeiramente note que, como conseqüência da caracterização de conjuntos $\omega-$limite temos que $\omega(B,t)\subset K(t)$, para todo $B\subset X$ limitado e para todo $t\in\mathbb{T}$.

Mostremos que $\omega(B,t)$ atrai pullback B. Se não, existe $\varepsilon > 0$ e seqüências $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $s_n \to -\infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em B com $\mathrm{dist}(S(t,s_n)x_n, \omega(B,t)) > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $K(t)$ atrai pullback B no instante t, temos que $\mathrm{dist}(S(t,s_n)x_n, K(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Consequentemente, $\{S(t,s_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem subseqüência convergente para algum $x_0 \in K(t)$. Segue que $x_0 \in \omega(B,t)$ e isto nos dá uma contradição. De um lema anterior, a invariância de $\omega(B,t)$ segue.

Definindo $\mathcal{A}(t)$ por (2), segue que $\mathcal{A}(t)$ é compacto e atrai pullback limitados de X.

Para a invariância procedemos da seguinte forma.

Dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Então, $S(t,s)x_n = y_n \in \omega(B_n, t)$, e da continuidade de $S(t,s)$ temos que $S(t,s)x_n = y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(t,s)x_0$, o que implica que $S(t,s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$.

Dado $y_0 \in \mathcal{A}(t)$, existe $y_n \in \omega(B_n, t)$ com $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0$. Da invariância da família $\omega(B_n, t)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ com $S(t,s)x_n = y_n$. Como $y_n = S(t,s)x_n \in S(t,s)\omega(B_n, s) \subset S(t,s)\mathcal{A}(s)$ e este último conjunto é compacto, obtemos que $\lim_{n\to+\infty} S(t,s)x_n = y_0 \in S(t,s)\mathcal{A}(s)$.

Por fim, se $\hat{\mathcal{A}}(t)$ é fechado e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t temos que $\omega(B,t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$, para todo subconjunto limitado B de X.

Consequentemente, $\mathcal{A}(t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$.$\square$

O conceito a seguir é útil, nas aplicações, para que possamos provar a existência de atratores pullback, sem ter que exibir uma família de conjuntos compactos que atrai pullback limitados.

Definição (Processos pullback assintoticamente compactos)

Um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, *em um espaço métrico* X, *será* **pullback assintoticamente compacto** *se,*

para cada $t \in \mathbb{T}$,

seqüência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{T}_t^-$ *com* $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *e*

seqüência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *limitada com* $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *limitada*

a seqüência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tiver uma subseqüência convergente.*

Observação

Se $\{S(t):t\geqslant 0\}$ for um semigrupo, o processo $\{S(t-s):(t,s)\in\mathcal{P}\}$ será pullback assintoticamente compacto se, e somente se, para cada $\{x_k\}$ limitada, $\{t_k\}$ com $t_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$ com $\{S(t_k)x_k\}$ limitada, a seqüência $\{S(t_k)x_k\}$ tiver subseqüência convergente.

Ou seja $\{S(t-s):(t,s)\in\mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, o $\{S(t):t\in\mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Lema

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *for um processo de evolução pullback assintoticamente compacto,* $B \subset X$ *for não vazio, limitado e tal que, para cada* $t \in \mathbb{T}$ *existir* $\sigma_t \in \mathbb{T}_t^-$ *tal que* $\bigcup_{\tau \leqslant \sigma_t} S(t,\tau)B$ *seja limitado, então* $\omega(B,t)$ *será não vazio, compacto, atrairá pullback* B *no instante* t *e* $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ *será invariante.*

Prova: Primeiramente note que, dadas seqüências $\{x_k\}$ em B e $\{s_k\}$ in $\mathbb{T}_t^-$, $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, então $\{S(t,s_k)x_k\}$ é limitada. Segue do fato que $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto que existe $y \in X$ e subseqüência de $\{S(t,s_k)x_k\}$ (que denotaremos da mesma forma) tal que $y = \lim_{k\to\infty} S(t,s_k)x_k$. Disto segue que $y \in \omega(B,t)$ e que $\omega(B,t)$ é não vazio.

Agora, dada uma seqüência $\{y_k\}$ em $\omega(B,t)$ existem $x_k \in B$ e $s_k \in \mathbb{T}_t^-$, $s_k \leqslant -k$, tal que $\mathrm{d}(S(t,s_k)x_k, y_k) \leqslant \frac{1}{k}$. Como $\{S(t,s_k)x_k\}$ tem uma subseqüência convergente para um elemento de $\omega(B,t)$, segue que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente e $\omega(B,t)$ é compacto.

Agora mostraremos que $\omega(B,t)$ atrai pullback B no instante t. Se não, existe $\epsilon > 0$ e seqüências $x_k \in B$ e $\{s_k\}$ in $\mathbb{T}_t^-$ com $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, tal que $\mathrm{dist}(S(t,s_k)x_k, \omega(B,t)) > \epsilon$.

Como $\{S(t,s):(t,s)\in\mathcal{P}\}$ é pullback assintoticamente compacto e $\bigcup_{s\leqslant\sigma_t}S(t,s)B$ é limitado, existe subseqüência de $\{S(t,s_k)x_k\}$ (que denotaremos da mesma forma) e $y\in X$ tal que $S(t,s_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$.

Claramente $y\in\omega(B,t)$ e isto nos leva a uma contradição. Segue que $\omega(B,t)$ atrai pullback B.

A invariancia de $\omega(B,t)$ agora segue de um lema anterior e o resultado está provado. $\square$

Teorema

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *for pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então* $\mathcal{A}(t)$ *dado por*

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup \{\omega(B,t) : \ B \subset X, \ B \ \ \textit{limitado}\} \tag{3}$$

será limitado, atrairá pullback limitados de X *no instante* t*, a família* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *será invariante e, se* $\{C(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *atrair pullback limitados de* X*, então* $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$*.*

Teorema

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ for pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $\mathcal{A}(t)$ dado por

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup \{\omega(B,t) : \ B \subset X, \ B \ \ \textit{limitado}\} \tag{3}$$

será limitado, atrairá pullback limitados de X no instante t, a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ será invariante e, se $\{C(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrair pullback limitados de X, então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Note que, falta a compacidade de $\mathcal{A}(t)$.

Prova: Se B é limitado temos que, $\omega(B,t)$ não vazio, compacto, atrai pullback B no instante t e $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante.

Portanto, $\mathcal{A}(t)$ definido por (3) atrai pullback limitados de X no instante t para cada $t \in \mathbb{T}$ e $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ é invariante. Como o processo é pullback limitado dissipativo segue que $\mathcal{A}(t)$ é limitado.

Se $C(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t. É claro que, para B limitado, $\omega(B,t) \subset \overline{C(t)}$ e $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ e a prova está completa.$\square$

Observe que o resultado anterior não conclue a compacidade da seção $\mathcal{A}(t)$ (nem mesmo se o espaço é de dimensão finita).

Isto mostra uma primeira diferença entre os processos de evolução não autônomos e os autônomos. Para obtermos a compacidade de cada seção teremos que fazer hipóteses adicionais sobre os processos.

Definição

Diremos que um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *será pullback fortemente limitado dissipativo se, para cada* $t \in \mathbb{T}$, *existir um limitado* $B(t)$ *de* X *que absorva pullback limitados de* X *no instante* τ *para cada* $\tau \leqslant t$; *isto é, dado* $D \subset X$ *limitado e* $\tau \leqslant t$, *existirá* $s_0(\tau,D)$ *tal que* $S(\tau,s)D \subset B(t)$, *para todo* $s \leqslant s_0(\tau,D)$.

Note que, a família $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ da definição acima não precisará ter união limitada. Contudo, poderemos escolhê-la de modo que, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\bigcup_{s \leqslant t} B(s)$ seja limitado.

O teorema a seguir dá condições suficientes para a existência de um atrator pullback.

Teorema

Se um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *for pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *terá um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *que satisfaz* $\bigcup_{s \leqslant t} \mathcal{A}(s)$ *limitado, para cada* $t \in \mathbb{T}$.

Prova: Se $\mathcal{A}(t)$ é dado por (3), segue que, para cada $t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t e se $\{C(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Do fato que $\{S(t,s) : t \geqslant s \in \mathbb{T}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe um limitado $B(t)$ de X que absorve pullback limitados de X no instante τ, para cada $\tau \leqslant t$.

Como $\omega(B(t),t)$ atrai pullback $B(t)$ no instante t (considerado como um subconjunto limitado fixo de X), ele atrai pullback todo subconjunto limitado de X no instante t.

De fato, é suficiente provar que, dado um limitado D de X, $\omega(D,t) \subset \omega(B(t),t)$. Se $x_0 \in \omega(D,t)$, existem seqüências $\{s_k\}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $\{x_k\}$ in D tal que $S(t,s_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.

Como $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, dada $\{\tau_n\}$ em $\mathbb{T}_t^-$ com $\tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, existe $\{\sigma_n\}$ com $\sigma_n \leqslant \tau_n$ tal que $S(\tau_n,s)D \subset B(t)$, para todo $s \leqslant \sigma_n$.

Dado que $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, para cada τ_n existe $k_n \geqslant n$ tal que $s_{k_n} \leqslant \sigma_n$ e $S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in B(t)$. Portanto,

$$S(t, s_{k_n})x_{k_n} = S(t, \tau_n)S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in S(t, \tau_n)B(t).$$

Logo $x_0 \in \omega(B(t), t)$ e $\mathcal{A}(t) \subset \omega(B(t), t)$. Como $\omega(B(t), t) \subset \mathcal{A}(t)$ temos que $\mathcal{A}(t) = \omega(B(t), t)$, provando que $\mathcal{A}(t)$ é compacto. $\square$