Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Décima Quarta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

02 de Outubro de 2023

Atratores para processos de evolução

Seja X um espaço métrico, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ e $\mathcal{P} = \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 : t \geqslant s\}$. Um processo de evolução em X é uma família de transformações $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{C}(X)$ com as seguinte propriedades

1) $S(t,t) = I$, para todo $t \in \mathbb{T}$,
2) $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, para todo $t \geqslant \tau \geqslant s$,
3) $\mathcal{P} \times X \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

Se X é um espaço vetorial normado e $S(t,s)$ é linear para cada $(t,s) \in \mathcal{P}$ diremos que $\{S(t,s) : \ t \geqslant s \in \mathbb{T}\}$ é um *processo de evolução linear*.

$S(t,s)$ toma cada estado x do sistema no instante inicial s e evoluciona para o estado $S(t,s)x$ do sistema no tempo final t.

Para um $\sigma \in \mathbb{T}^+$ fixo, $S(\sigma+\tau,\tau)$ pode ser distinto para cada $\tau \in \mathbb{T}$; ou seja, além do tempo decorrido σ, o instante inicial τ também pode desempenhar um papel importante na evolução.

Os processos onde o tempo decorrido determina a evolução; isto é, aqueles para os quais $S(t,s) = S(t-s,0)$ para todo $t \geqslant s$, são chamados processos de evolução autônomos. Todos os demais são chamados não-autônomos.

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ for um processo de evolução autônomo, a família $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, definida por $T(t) := S(t,0)$, $t \geqslant 0$, satisfaz

1) $T(0) = I$,
2) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geqslant 0$,
3) $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Logo, $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ será um semigrupo.

Reciprocamente, dado um semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, a família $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ definida por $S(t,s) = T(t-s)$, $(t,s) \in \mathcal{P}$, é um processo de evolução.

Quando X for um espaço vetorial normado e $T(t)$ for linear para cada $t \in \mathbb{R}^+$, diremos que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo linear.

Para um processo de evolução autônomo $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$, conhecido como *dinâmica forwards*, é o mesmo que o comportamento das soluções quando $s \to -\infty$, chamado *dinâmica pullback*.

Estes dois limites assintóticos ou 'limites dinâmicos' não estão relacionados para processos gerais e podem produzir propriedades qualitativas completamente distintas.

Um dos nossos propósitos é revelar algumas dessas propriedades dinâmicas novas que a *dinâmica pullback* pode conter e utilizá-las para a compreensão da dinâmica forwards.

Recorde que, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \{y \in X : &\text{ existe uma solução global} \\ &\text{limitada } x : \mathbb{T} \to X \text{ com } x(0) = y\}. \end{aligned} \tag{1}$$

A noção de atrator para um processo de evolução requer que outros aspectos sejam levados em consideração.

Para começar, um subconjunto A de X não será, em geral, fixado por um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ e a noção de invariância precisa ser 'enfraquecida' para uma noção que ainda nos permita construir soluções globais.

Assim, é definimos *invariância* da seguinte forma:

Definição (Invariância)

Seja $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos de X. Diremos que esta família é invariante por $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ se

$$S(t,s)B(s) = B(t), \text{ para todo } (t,s) \in \mathcal{P}.$$

Como vimos em (1), se um semigrupo tem um atrator global, ele é o conjuntos dos estados iniciais pelos quais passa uma solução global limitada.

Veremos mais tarde que, no caso não-autônomo e quando $\cup_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{A}(t)$ é limitado, a noção de atrator pullback preserva esta propriedade; isto é, para todo $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \ \xi : \mathbb{T} \to X \text{ é solução} \\ \text{global limitada de } \{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Attratores Pullback

Seja X é um espaço métrico e $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ um processo de evolução em X. Definimos:

Para cada $(t,s) \in \mathcal{P}$, a imagem de B sob $S(t,s)$,

$$S(t,s)B := \{S(t,s)b : b \in B\}.$$

A *órbita pullback* de B no instante $t \in \mathbb{T}$,

$$\gamma(B,t) := \bigcup_{s \leqslant t} S(t,s)B.$$

Definição (Atração/Absorção Pullback)

Dado $t \in \mathbb{T}$, um conjunto $B(t) \subset X$ atrai (absorve)-pullback limitados de X, no instante t, sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ se

$$\mathrm{dist}_H(S(t,s)D, B(t)) \overset{s \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$(\exists\ T = T(t,D) \leqslant t \text{ tal que } S(t,s)D \subset B(t),\ \forall s \leqslant T),$$

para cada limitado D de X.

Uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{T}\}$ atrai (absorve)-pullback limitados de X sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ se $B(t)$ atrai (absorve)-pullback limitados de X, no instante t, sob a ação de $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$, para cada $t \in \mathbb{T}$.

Se existir uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de limitados que atraia (absorva)-pullback limitados diremos que $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ será pullback-limitado dissipativo.

Definição (Atrator Pullback)

Diremos que uma família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *de subconjuntos compactos de* X *será um atrator-pullback para* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *se for invariante, atrair-pullback subconjuntos limitados de* X *e for a família minimal de fechados com a propriedade de atrair pullback subconjuntos limitados.*

Observação

A minimalidade na Definição 3 é adicional relativamente à teoria de atratores para semigrupos e é essencial para assegurar a unicidade dos atratores pullback.

Sua inclusão está relacionada ao enfraquecimento da propriedade de invariância imposta pela natureza não autônoma dos processos de evolução juntamente com a possibilidade dos atratores pullback serem ilimitados em $-\infty$; isto é, abre-se a possibilidade de que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\cup_{s \leqslant t} \mathcal{A}(s)$ seja ilimitado.

Observação (Minimalidade/Unicidade)

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *e* $\{T(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *é o processo de evolução autônomo associado, pode existir uma família* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *de conjuntos compactos e invariantes que atraem-pullback subconjuntos limitados e não é minimal.*

De fato, se $T(t-s) = e^{-(t-s)}x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $(t,s) \in \mathcal{P}$, *a família* $\{[-e^{-t}, e^{-t}] : t \in \mathbb{R}\}$ *é invariante,* $[-e^{-t}, e^{-t}]$ *é compacto e atrai-pullback limitados de* $\mathbb{R}$ *no instante* t *para cada* $t \in \mathbb{T}$.

Neste caso, a família de conjuntos fechados que minimal com a propriedade de atrair-pullback limitados que é $\mathcal{A}(t) = \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício

Mostre que a exigência da minimalidade na Definição 3 pode ser eliminada se pedirmos que $\cup_{s\leqslant t}\mathcal{A}(s)$ *seja limitado para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Recorde que, uma solução global para um processo de evolução $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ é uma função contínua $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $S(t,s)\xi(s) = \xi(t)$ para todo $(t,s) \in \mathcal{P}$.

Definição (Solução Global/Backwards-limitada)

Diremos que uma solução $\xi : \mathbb{T} \to X$ *de um processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *será backwards-limitada se existir um* $\tau \in \mathbb{T}$ *tal que o conjunto* $\{\xi(t) : t \leqslant \tau\}$ *seja limitado.*

Exercício

Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tem um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *e* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *é uma solução backwards-limitada, então* $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$, *para todo* $t \in \mathbb{T}$.

Exercício

Mostre que se $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *for um atrator pullback para o processo de evolução* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *e* $\bigcup_{s \leqslant t} \mathcal{A}(s)$ *for limitado, para todo* $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(t)$ *será dado por*

$$\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \xi : \mathbb{T} \to X \text{ é uma solução backwards-limitada para } \{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}\}, \ \forall t \in \mathbb{T}. \tag{3}$$

Semigrupos: Atratores Pullback × Atratores Globais

A seguir relacionamos os atratores pullback de processos de evolução autônomos e os atratores globais de semigrupos.

Mostramos que o conceito de atratores pullback estende aos processos de evolução, de maneira natural, o conceito de atratores globais para semigrupos.

Theorem

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *for um semigrupo e* $S(t,s) = T(t-s), (t,s) \in \mathcal{P}$ *o processo de evolução autônomo associado então,* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *terá um atrator global* $\mathcal{A}$ *se, e somente se,* $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ *tiver um atrator pullback* $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$*. Em qualquer dos casos* $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$*.*

Prova: Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ é claro que a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ com $\mathcal{A}(t) := \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{T}$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X para $\{T(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$.

Do fato que $\mathcal{A}$ é limitado e de $S(t,s)\mathcal{A} = T(t-s)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $(t,s) \in \mathcal{P}$, segue a minimalidade.

Por outro lado, suponha que $\{T(t-s) : (t,s) \in \mathcal{P}\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{T}\}$.

É claro que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ e que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Além diso, $\{\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A} : t \in \mathbb{T}\}$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X.

Segue da minimalidade de $\mathcal{A}(t)$ que $\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A} \supset \mathcal{A}(t)$ e a prova está completa.$\square$