Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Décima Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

25 de Setembro de 2023

Dimensão Fractal

Seja K um espaço métrico compacto. Defina $N(r, K)$ como o número mínimo de bolas de raio r necessário para cobrir K.

A *dimensão fractal* $c(K)$ de K é definida por:

$$c(K) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K)}{\log(1/r)}.$$

Vimos que

$$\dim_H(K) \leqslant c(K). \tag{1}$$

Lema

Seja X um espaço vetorial normado e K_1, K_2 subconjuntos compactos de X. Então $c(K_1 + K_2) \leqslant c(K_1) + c(K_2)$.

Como consequência imediata do Lema 1 temos que

Corolário

Seja X um espaço vetorial normado e K um subconjunto compacto de X. Se $c(K) < \infty$, então $c(K - K) \leqslant 2c(K)$.

Projeções de compactos com dimensão fractal finita

Como já mencionamos anteriormente, gostaríamos de determinar se os atratores para semigrupos em espaço de Banach de dimensão infinita são objetos de dimensão finita.

Para isso vamos mostrar que conjuntos compactos que têm dimensão fractal finita podem ser projetados, de maneira injetiva, num espaço vetorial de dimensão finita.

Posteriormente mostraremos, para uma classe ampla de semigrupos, que atratores globais tem dimensão fractal finita.

Se X é um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X seja

$$\mathcal{P}(X,Y) := \{P \in \mathcal{L}(X) : P^2 = P \text{ e } P(X) = Y\}$$

com a topologia uniforme de operadores.

Teorema (Mañé)

Se $\dim_H(K-K) < \infty$ e Y é um subespaço de X com $\dim_H(K-K)+1 < \dim Y < \infty$, então o conjunto $\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K$ é injetora $\}$ é residual em $\mathcal{P}(X,Y)$.

Antes mostraremos alguns resultados básicos de análise funcional.

Lema

Seja X um espaço de Banach, Y subespaço fechado de X tal que $\mathcal{P}(X,Y) \neq \varnothing$ e J um subconjunto compacto de X. Defina

$$\mathcal{P}_J = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : N(P) \cap J = \varnothing\}.$$

Então, $\mathcal{P}_J$ é aberto em $\mathcal{P}(X,Y)$.

Prova: Dada $P \in P_J$, note que $\epsilon = \mathrm{dist}(N(P), J) > 0$. Escolha $s > 2t > 2\epsilon$ onde t é tal que $B_t(0) \supset J$ e seja $\bar{P} \in \mathcal{P}(X, Y)$ tal que $\|P - \bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\epsilon}{s}$.

Então

$$\begin{aligned}\inf_{x \in N(\bar{P})} \mathrm{dist}(x, J) =: \mathrm{dist}(N(\bar{P}), J) &= \mathrm{dist}((I - \bar{P})B_s(0), J) \\ &\geqslant \mathrm{dist}((I - P)B_s(0), J) - \sup_{x \in B_s(0)} \|\bar{P}x - Px\|_X \\ &= \mathrm{dist}(N(P), J) - s\|\bar{P} - P\|_{\mathcal{L}(X)} > 0.\end{aligned}$$

Segue que $N(\bar{P}) \cap J = \varnothing$ e $\bar{P} \in P_J$, provando que P_J é aberto.$\square$

Suponha que $\dim Y < \infty$, que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de subconjuntos compactos de X e que $K = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Lema

Existe uma sequência $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em X^* tal que, se $x \in \mathrm{span}(K)$ e $\phi_i(x) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $x = 0$.

Prova: Seja W o fecho do subespaço de X gerado por K. Como K é uma união enumerável de conjuntos compactos, K é separável e consequentemente W é um espaço de Banach separável.

Do fato de que $B_1^{W^*}(0)$ com a topologia fraca-estrela $\sigma(W^*, W)$ é compacto e metrizável. Sendo assim, existe uma sequência densa $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $(B_1^{W^*}(0), \sigma(W^*, W))$.

Agora se $x \in W$ e $\phi_i(x) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que $\phi(x) = 0$ para todo $\phi \in B_1^{W^*}(0)$ e temos que $x = 0$. A sequência desejada é obtida estendendo ϕ_i a X, via Teorema de Hahn-Banach, para cada $i \in \mathbb{N}$.$_\square$

Lema

Dado $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *se*

$$A_{n,r} = \{z \in K_n - K_n : \|z\|_X \geqslant r\} = (K_n - K_n) \cap \{x \in X : \|x\|_X \geqslant r\},$$

então $A_{n,r}$ *é um subconjunto compacto de* X.

Prova: Como $X \times X \ni (x, y) \mapsto x - y \in X$ é contínua, segue que $K_n - K_n$ é compacto e consequentemente $A_{n,r}$ é compacto em X. $\square$

Lema

Se

$$\mathcal{P}_{n,r} = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : \ \mathrm{diam}(P^{-1}(y) \cap K_n) < r, \ \forall\, y \in Y\}, \quad (2)$$

então $P \in P_{n,r}$ *se, e somente se,* $P \in \mathcal{P}(X,Y)$ *e* $N(P) \cap A_{n,r} = \varnothing$.

Prova: Suponha que existe um $y \in N(P) \cap A_{n,r}$, então $Py = 0$ e existem $v, w \in K_n$ tais que $y = v - w$, $\|v - w\|_X \geqslant r$. Se $z = Pv = Pw$ então $\operatorname{diam}\left(P^{-1}(z) \cap K_n\right) \geqslant r$ e $P \notin P_{n,r}$.

Por outro lado, se $N(P) \cap A_{n,r} = \varnothing$, $y \in Y$ e $v, w \in P^{-1}(y) \cap K_n$, temos que $v - w \in N(P)$ e portanto devemos ter $\|v - w\|_X < r$.

Como $P^{-1}(y) \cap K_n$ é compacto, segue que $\operatorname{diam}(P^{-1}(y) \cap K_n) < r$.

Isto completa a demonstração.$\square$

O resultado a seguir é conseqüência imediata da caracterização de $P_{n,r}$ dado no Lema 5 e do Lema 2.

Corolário

Se $P_{n,r}$ definida por (2), então $P_{n,r}$ é aberto em $\mathcal{P}(X, Y)$ com a topologia uniforme de operadores.

Com isto, estamos preparados para demonstrar o importante resultado que se segue

Teorema (Mañé)

Se $\dim_H(K-K) < \infty$ *e* Y *é um subespaço de* X *com* $\dim_H(K-K)+1 < \dim Y < \infty$, *então o conjunto* $\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K$ *é injetora* $\}$ *é residual em* $\mathcal{P}(X,Y)$.

Mostraremos nas próximas aulas que, em geral, os atratores globais $\mathcal{A}$ de semigrupos em espaços de Banach têm dimensão fractal finita e portando dimensão de Hausdorff de $\mathcal{A}-\mathcal{A}$ finita.

Prova: Usando a definição de $P_{n,r}$ dada em (2), É fácil ver que

$$\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K \text{ é injetora } \} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} P_{n,\frac{1}{m}}$$

Seja Q a aplicação quociente de X sobre $Z = X/Y$. Então,

$$Q(A_{n,r})\setminus\{0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ Q(v) : v \in A_{n,r},\ \|Q(v)\|_Z \geqslant \frac{1}{m} \right\}$$

onde, cada $\left\{ Q(v) : v \in A_{n,r},\ \|Q(v)\|_Z \geqslant \frac{1}{m} \right\}$ é compacto.

Segue do Lema 3 que existe uma sequência $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em Z^*, tal que, se $z \in \mathrm{span}(Q(A_{n,r}))$ e $\phi_i(z) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $z = 0$. Seja

$$A_{n,r,i,j} = \{ v \in A_{n,r} : |\phi_i(Q(v))| \geqslant 1/j \}.$$

Então

$$A_{n,r} = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{n,r,i,j} \right) \cup (A_{n,r} \cap Y),$$

$$N(P) \cap A_{n,r} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (N(P) \cap A_{n,r,i,j}),$$

$$P_{n,r,i,j} = \{P \in \mathcal{P}(X,Y) : N(P) \cap A_{n,r,i,j} = \varnothing\} \quad \text{e}$$

$$P_{n,r} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} P_{n,r,i,j}.$$

Como $A_{n,r}$ é compacto (vide Lema 4) segue facilmente que $A_{n,r,i,j}$ é compacto.

Do Lema 2 obtemos que $P_{n,r,i,j}$ é aberto.

Portanto, a prova fica reduzida a mostrar que para cada $n, i, j \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$.

Dado $P_0 \in \mathcal{P}(X, Y)$, vamos constriur aproximações de P_0 por elementos P_ϵ de $P_{n,r,i,j}$.

Defina $\psi : Y \backslash \{0\} \to S = \{y \in Y : \|y\|_X = 1\}$ por $\psi(y) = y/\|y\|_X$.

Então

$$\psi\left(P_0(A_{n,r}) \backslash \{0\}\right) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}^*} \psi\left(P_0(A_{n,r}) \cap [Y \backslash B^Y_{1/\ell}(0)]\right).$$

De uma proposição anterior,

$$\dim_H(\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})) \leqslant \sup_{\ell\in\mathbb{N}^*} \dim_H(\psi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y\backslash B^Y_{1/\ell}(0)])).$$

Note que, ψ restrito à $P_0(A_{n,r}) \cap [Y\backslash B^Y_{1/\ell}(0)]$ é Lipschitz contínua.

Consequentemente, de uma proposição anterior,

$$\dim_H(\psi(P_0(A_{n,r}) \cap [Y\backslash B^Y_{1/\ell}(0)])) \leqslant \dim_H(P_0(A_{n,r})).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\dim_H(\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})) &\leqslant \dim_H(P_0(A_{n,r}))) \leqslant \dim_H(A_{n,r}) \\ &\leqslant \dim_H(K_n - K_n) \leqslant \dim_H(K - K) \\ &< \dim(Y) - 1.\end{aligned}$$

Disto obtemos que existe $u \in S\backslash[\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})]$.

De fato, se este não é o caso, então $S = \psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})$ e $\dim(Y)-1 = \dim_H(S) = \dim_H(\psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})) \leqslant \dim_H(K-K)$ o que contradiz a nossa hipótese.

Dado $\epsilon > 0$, $i, j \in \mathbb{N}$ definimos

$$P_\epsilon(x) = P_0(x) + \epsilon\phi_i(Q(x))u.$$

Como $P_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$ com imagem em Y e relembrando que se $y \in Y$, então $Qy = 0$ é fácil ver que $P_\epsilon \in \mathcal{P}(X, Y)$.

Mostremos que $P_\epsilon \in P_{n,r,i,j}$.

Se $P_\epsilon(x) = 0$ temos que

$$P_0(x) = -\epsilon\phi_i(Q(x))u.$$

Além disso, se $x \in A_{n,r,i,j}$, então $\phi_i(Q(x)) \neq 0$. Portanto

$$u = -(\epsilon\phi_i(Q(x)))^{-1}P_0(x) \quad \text{e} \quad \psi(P_0(x)) = \pm\psi(u).$$

Como $u \in S$, $u = \psi(u)$ e assim (aqui usamos que X é real) $\pm u = \psi(P_0(x)) \in \psi(P_0(A_{n,r,i,j})\backslash\{0\})$.

Consequentemente $u \in \psi(P_0(A_{n,r})\backslash\{0\})$ contradizendo a escolha de u e mostrando que $P_\epsilon \in P_{n,r,i,j}$.

Finalmente, como $\|P_\epsilon - P_0\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$, segue que $P_{n,r,i,j}$ é denso em $\mathcal{P}(X, Y)$.$\square$

Segue da relação entre dimensão de Hausdorff fractal e das propriedades desta última que

Corolário

Se $c(K) < \infty$ *e* Y *é um subespaço de* X *com* $2c(K) + 1 < \dim Y < \infty$, *então o conjunto* $\{P \in \mathcal{P}(X, Y) : P|_K$ *é injetora* $\}$ *é residual em* $\mathcal{P}(X, Y)$.