# Sistemas Dinâmicos Não Lineares
# Décima Primeira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

20 de Setembro de 2023

# A dimensão de Hausdorff

Se $(X, \rho)$ é métrico, $\alpha > 0$ e $\epsilon > 0$. Se $A \subset X$, seja ($\inf \varnothing = \infty$)

$$\mu_\epsilon^{(\alpha)}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_i))^\alpha : \ A \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_i, \ \mathrm{diam}(B_i) < \epsilon \right\}.$$

Como $\mu_\epsilon^{(\alpha)}(A)$ cresce quando $\epsilon$ decresce definimos

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon^{(\alpha)}(A).$$

## Proposição

*Seja $\alpha' > \alpha > 0$. Se $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, então $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$ e, se $\mu^{(\alpha')}(A) > 0$, então $\mu^{(\alpha)}(A) = \infty$.*

**Prova:** Basta provar a primeira afirmação. Se $\mu^{(\alpha)}(A) < \infty$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\mathrm{diam}(B_j) \leqslant \delta$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^{\alpha} \leqslant \mu^{(\alpha)}(A) + 1.$$

Mas para $\alpha' > \alpha$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^{\alpha'} \leqslant \delta^{\alpha'-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^{\alpha} \leqslant \delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{(\alpha)}(A) + 1],$$

logo $\mu_{\delta}^{(\alpha')}(A) \leqslant \delta^{\alpha'-\alpha}[\mu^{(\alpha)}(A) + 1] \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ e $\mu^{(\alpha')}(A) = 0$.$\square$

**Definição (Dimensão de Hausdorff)**

*Para qualquer $A \subset X$, a dimensão de Hausdorff de $A$ é definida pelo número real não-negativo dado por*

$$\inf\{\alpha \geqslant 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = 0\} = \sup\{\alpha \geqslant 0 : \mu^{(\alpha)}(A) = \infty\}.$$

# Propriedades da Medida e Dimensão de Hausdorff

## Lema

*Sejam* $(X, \rho)$ *um espaço métrico e* $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ *uma seqüência crescente de subconjuntos de* $X$. *Se* $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, $\mu^{\alpha}(A) < \infty$ *e* $d(A_j, A \backslash A_{j+1}) > 0$ *para cada* $j \in \mathbb{N}$, *então* $\mu^{(\alpha)}(A) = \lim_{j \to \infty} \mu^{(\alpha)}(A_j)$.

**Prova:** Segue imediatamente da monotonicidade que existe o limite $\lim_{j\to\infty}\mu^{(\alpha)}(A_j)$ e que $\lim_{j\to\infty}\mu^{(\alpha)}(A_j)\leqslant\mu^{(\alpha)}(A)$. Seja $B_1=A_1$ e $B_j=A_j\backslash A_{j-1}$, $j\geqslant 2$. Claramente, cada dois conjuntos na família $\{B_{2j-1}\}_{j=1}^{\infty}$ ou na família $\{B_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$ são positivamente separados e

$$\mu^{(\alpha)}(A)\geqslant\mu^{(\alpha)}\left(\cup_{j=1}^{n}B_{2j-1}\right)=\sum_{j=1}^{n}\mu^{(\alpha)}\left(B_{2j-1}\right)$$

$$\mu^{(\alpha)}(A)\geqslant\mu^{(\alpha)}\left(\cup_{j=1}^{n}B_{2j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\mu^{(\alpha)}\left(B_{2j}\right).$$

Portanto, $2\mu^{(\alpha)}(A) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \mu^{(\alpha)}(B_j)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e a série $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(B_j)$ é convergente.
Agora,

$$\mu^{(\alpha)}(A) = \mu^{(\alpha)}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \mu^{(\alpha)}(A_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^{(\alpha)}(B_j)$$

e o resultado segue tomando o limite quando $n \to \infty$ no lado direito da expressão acima.$\square$

## Proposição

*$\mu^{(\alpha)} : 2^X \to [0, \infty]$ é invariante sob isometrias de $X$. Se $Y$ é um conjunto qualquer e $f, g : Y \to X$ são tais que*

$$\rho(f(y), f(z)) \leqslant C\rho(g(y), g(z)), \ \forall\, y, z \in Y,$$

*então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant C^\alpha \mu^{(\alpha)}(g(A))$ para todo $A \subset Y$.*

**Prova:** A primeira afirmação é óbvia da segunda. Se $\mu^{(\alpha)}(g(A)) < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, para todo $0 < \delta < \delta_\epsilon$, existe uma cobertura de $g(A)$ por conjuntos $B_j$ tal que $\operatorname{diam}(B_j) \leqslant C^{-1}\delta$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_j))^\alpha \leqslant \mu^{(\alpha)}(g(A)) + \epsilon.$$

Os conjuntos $B'_j = f(g^{-1}(B_j))$ cobrem $f(A)$ e $\operatorname{diam}(B'_j) \leqslant C \operatorname{diam}(B_j) \leqslant \delta$, e

$$\mu_\delta^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant C^\alpha \mu^{(\alpha)}(g(A)) + C^\alpha \epsilon.$$

O resultado agora segue fazendo $\delta \to 0$ e $\epsilon \to 0$.$\square$

## Corolário

*Sejam $X, Y$ espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $C \geqslant 0$ e $A \subset X$. Então $\mu^{(\alpha)}(f(A)) \leqslant C^\alpha \mu^{(\alpha)}(A)$.*

## Proposição

*Sejam $X, Y$ espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função Lipschitz contínua e $A \subset X$. Então $\dim_H(f(A)) \leqslant \dim_H(A)$.*

**Prova:** Pelo Corolário 1, temos que se $\mu^\alpha(A) = 0$ então $\mu^\alpha(f(A)) = 0$. Assim $\dim_H(f(A)) \leqslant \dim_H(A)$. $\square$

## Corolário

*Seja $f : X \to X$ uma função Lipschitz contínua, $A \subset X$ e $G(f, A) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ o gráfico de $f$ restrito à $A$. Então $\dim_H(G(f, A)) = \dim_H(A)$.*

**Prova:** Sabemos que as aplicações $A \ni x \mapsto (x, f(x)) \in G(f, A)$ e $G(f, A) \ni (x, f(x)) \mapsto x \in A$ são Lipschitz contínuas, e da proposição acima segue que

$$\dim_H(G(f, A)) \leqslant \dim_H(A) \leqslant \dim_H(G(f, A)). \square$$

## Proposição

*Seja* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos em* $X$ *e seja* $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. *Então*

$$\dim_H(A) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j).$$

**Prova:** Segue diretamente da monotonicidade que $\dim_H(A) \geqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j)$. Seja $\alpha > \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j)$, assim

$$\mu^\alpha(A) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^\alpha(A_j) = 0.$$

Portanto $\dim_H(A) \leqslant \alpha$. Como $\alpha > \sup_{j\in\mathbb{N}} \dim_H(A_j)$ é arbitrário, temos o resultado. $\square$

# Semigrupos gradientes e a Dimensão de Hausdorff

Vamos agora nos voltar para os atratores de tipo gradiente em espaços de Banach. Seja $\mathcal{E} = \{e_1^*, \ldots, e_p^*\}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio do semigrupo gradiente $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, e suponha que $T = T(1) \in \mathcal{C}(X)$ seja uma aplicação Lipschitz contínua. Sabemos que o atrator global $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{p} W^u(e_j^*).$$

Se $X$ for um espaço de Banach. Suponha que o conjunto instável $W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)$ de cada ponto de equilíbrio seja o gráfico de uma função Lipschitz contínua com domínio contendo uma bola em $Q_iX$, onde $Q_i$ é uma projeção de posto finito, $1 \leqslant i \leqslant p$. Vimos que

$$\dim_H(W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)) = \dim_H(Q_iX) < \infty, \text{ para cada } i = 1, \ldots, p,$$
$$\dim_H(T^n W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)) \leqslant \dim(W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)).$$

Facilmente, vemos que $W^u(e_i^*) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)$ e, utilizando uma proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}\dim(Q_iX) =& \dim_H(W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)) \leqslant \dim_H(W^u(e_i^*)) = \\ =& \dim_H\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)\right) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_H(T^n W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)) \\ \leqslant& \dim_H(W^u_{\mathrm{loc}}(e_i^*)) = \dim(Q_iX),\end{aligned}$$

e portanto $\dim_H(W^u(e_i^*)) = \dim(Q_iX)$, para todo $i = 1, \ldots, p$. E como $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} W^u(e_i^*)$, temos que $\dim_H(\mathcal{A}) = \max_{1\leqslant j\leqslant p} \dim(Q_iX)$.

# Dimensão Fractal

Agora vamos apresentar a definição de dimensão fractal. Seja $K$ um espaço métrico compacto. Defina $N(r, K)$ como o número mínimo de bolas de raio $r$ necessário para cobrir $K$. A *dimensão fractal* $c(K)$ de $K$ é definida por:

$$c(K) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K)}{\log(1/r)}.$$

Alternativamente, $c(K)$ é o menor número para o qual, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$N(r, K) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\epsilon}, \quad 0 < r < \delta.$$

Multiplicando a expressão acima por $2^\alpha r^\alpha$ obtemos

$$\mu_{2r}^{(\alpha)}(K) \leqslant 2^\alpha N(r,K) r^\alpha \leqslant 2^\alpha \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\epsilon-\alpha}, \quad 0 < r < \delta.$$

Assim, $\mu_{2r}^{(c(K)+\eta)}(K) \leqslant 2^\alpha \left(\frac{1}{r}\right)^{\epsilon-\eta}$ para $0 < r < \delta$ e para todo $\eta > 0$. Para $0 < \epsilon < \eta$, fazendo $r \to 0$ temos $\mu^{(c(K)+\eta)}(K) = 0$. Da definição de dimensão de Hausdorff, segue facilmente que

$$\dim_H(K) \leqslant c(K). \tag{1}$$

Mais ainda, $c(K)$ e $\dim_H(K)$ podem ser diferentes.

## Exercício

*Encontre exemplos de seqüências que convergem para zero e têm dimensão fractal positiva.*

## Exercício

*Seja $K$ um subconjunto compacto de um espaço métrico $X$. Mostre que, se $\alpha > 0$ e $\eta \in (0,1)$, então*

$$c(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\alpha\eta^n, K)}{-\log(\alpha\eta^n)}.$$

*Mais geralmente, se $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente em $(0,\infty)$ com $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\log\frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, então $c(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(a_n,K)}{-\log(a_n)}$.*

**Lema**

*Seja $X$ um espaço vetorial normado e $K_1$, $K_2$ subconjuntos compactos de $X$. Então $c(K_1 + K_2) \leqslant c(K_1) + c(K_2)$.*

**Prova:** Note que, se $N_i = N(r, K_i)$ existem $x_1^i, \cdots, x_N^i$ em $K$ tais que $K_i \subset \cup_{j=1}^{N_i} B_r(x_j^i)$ e $K_1 + K_2 \subset \cup_{i=1}^{N_2} \cup_{j=1}^{N_1} \Big( B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2) \Big)$. Como $B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2) = B_{2r}(x_j^1 + x_i^2)$ temos que $N(2r, K_1 + K_2) \leqslant N(r, K_1) N(r, K_2)$ e consequentemente

$$\begin{aligned} c(K_1 + K_2) &= \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(2r, K_1 + K_2)}{\log(1/2r)} \\ &\leqslant \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K_1) N(r, K_2)}{\log(1/2r)} \\ &\leqslant \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K_1)}{\log(1/r)} + \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K_2)}{\log(1/r)} \\ &= c(K_1) + c(K_2). \square \end{aligned}$$

Como consequência imediata do Lema 2 temos que

**Corolário**

*Seja $X$ um espaço vetorial normado e $K$ um subconjunto compacto de $X$. Se $c(K) < \infty$, então $c(K - K) \leqslant 2c(K)$.*

# Projeções de compactos com dimensão fractal finita

Como já mencionamos anteriormente, gostaríamos de determinar se os atratores para semigrupos em espaço de Banach de dimensão infinita são objetos de dimensão finita.

Para isso vamos mostrar que conjuntos compactos que têm dimensão fractal finita podem ser projetados, de maneira injetiva, num espaço vetorial de dimensão finita. Posteriormente mostraremos, para uma classe ampla de semigrupos, que atratores globais tem dimensão fractal finita.

**Teorema (Mañé)**

*Se* $\dim_H(K-K) < \infty$ *e* $Y$ *é um subespaço de* $X$ *com* $\dim_H(K-K)+1 < \dim Y < \infty$, *então o conjunto* $\{P \in \mathcal{P}(X,Y) : P|_K$ *é injetora* $\}$ *é residual em* $\mathcal{P}(X,Y)$.