Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Nona Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

13 de Setembro de 2023

Par atrator-repulsor

Definição (Par atrator-repulsor)

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$*. Diremos que um subconjunto não vazio* Ξ *de* $\mathcal{A}$ *é um atrator local se existir um* $\epsilon > 0$ *tal que* $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)) = \Xi$*. O repulsor* Ξ^* *associado ao atrator local* Ξ *será o conjunto definido por*

$$\Xi^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap \Xi = \varnothing\}.$$

O par (Ξ, Ξ^*) *será chamado par atrator repulsor para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$*.*

Observação

Note que, se Ξ for um atrator local, então

(1) *Ξ é fechado, invariante e $\Xi \cap \Xi^* = \varnothing$ (exercício),*

(2) *Ξ é compacto invariante e atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)$ para algum $\epsilon > 0$ e reciprocamente,*

(3) *Se Ξ^* for o repulsor associado a Ξ, $\mathrm{dist}(\Xi, \Xi^*) > 0$.*

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* X *com atrator global* $\mathcal{A}$. *Se* Ξ *é um conjunto invariante compacto para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *e existe um* $\epsilon > 0$ *tal que* Ξ *atrai* $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ *então, dado* $\delta > 0$ *existe um* $\delta' > 0$ *tal que* $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$.

Lema (2)

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo em* X *com um atrator global* $\mathcal{A}$. *Se* Ξ *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *restrito a* $\mathcal{A}$ *e* K *é um subconjunto compacto de* $\mathcal{A}$ *tal que* $K \cap \Xi^* = \varnothing$, *então* Ξ *atrai* K. *Além disso* Ξ *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* X.

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* X *com um atrator global* $\mathcal{A}$ *e um par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*). *Se* $\xi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ *for uma solução global de* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$,

1) *se* $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, *então* $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*) \cap \Xi = \varnothing$ *e* $\xi((-\infty, 0]) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$, *então* $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* X *com atrator global* $\mathcal{A}$ *e um par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*). *Se* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *é uma solução global limitada para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *por* $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, *então* $\xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$ *e* $\xi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$. *Além disso, se* $x \in X \backslash \mathcal{A}$ *então,* $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$.

Corolário

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *for um semigrupo em* X *com um atrator global* $\mathcal{A}$ *e par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*), *então* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *será um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à coleção disjunta de invariantes isolados* $\{\Xi, \Xi^*\}$.

Exercício

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\Xi \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante isolado. Mostre que* Ξ *é um atrator local se, e somente se,* $W^{\mathrm{u}}(\Xi) = \Xi$.

Com isto podemos começar a estudar a decomposição de Morse do atrator de um semigrupo dinamicamente gradiente relativo a a família disjunta de conjuntos invariantes isolados. Começamos fixando a definição de decomposição de Morse que utilizaremos.

Decomposição de Morse

Definição (Decomposição de Morse)

Dada uma família crescente $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$, *de* $n+1$ *atratores locais, para* $j = 1, \cdots, n$, *defina* $\Xi_j := A_j \cap A^*_{j-1}$. *A* n*-upla ordenada* $\boldsymbol{\Xi} := (\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_n)$ *é chamada uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$.

Nosso objetivo agora é demonstrar que, se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de invariantes isolatos $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ e atrator global $\mathcal{A}$, então uma reordenação de $\boldsymbol{\Xi}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. O resultado a seguir tem um papel fundamental neste processo.

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. *Então, existe um* $1 \leqslant k \leqslant n$ *tal que* Ξ_k *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* X.

Seja $\{T(t): t \geqslant 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$.

Se (após uma possível reordenação) Ξ_1 é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ e

$$\Xi_1^* = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a) \cap \Xi_1 = \varnothing\}$$

cada Ξ_i, $i > 1$ está contido em Ξ_1^* e para qualquer $a \in \mathcal{A} \setminus \{\Xi_1 \cup \Xi_1^*\}$ e solução global $\phi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ com $\phi(0) = a$ temos que

$$\Xi_1^* \overset{t \to -\infty}{\longleftarrow} \phi_j(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \Xi_1.$$

A restrição $T_1(t)$ de $T(t)$ a Ξ_1^* é um semigrupo dinamicamente gradiente em Ξ_1^* relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\{\Xi_2, \cdots, \Xi_n\}$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que Ξ_2 é um atrator local para esta restrição.

Se $\Xi_{2,1}^*$ é o repulsor de Ξ_2 para $\{T_1(t) : t \geqslant 0\}$, podemos prosseguir e considerar a restrição de $\{T_2(t) : t \geqslant 0\}$ a $\Xi_{2,1}^*$. Esta restrição é um semigrupo dinamicamente gradiente em $\Xi_{2,1}^*$ relativo à coleção disjunta de invariantes isolados $\{\Xi_3, \cdots, \Xi_n\}$.

Com este procedimento, em um número finito de passos, obtemos uma reordenação de $\{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ onde Ξ_j é um atrator local para $\{T_j(t) : t \geqslant 0\}$, a restrição de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ a $\Xi^*_{j,j-1}$ ($\Xi^*_{0,-1} := \mathcal{A}$).

Com esta construção, se uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ satisfaz

$$\Xi_\ell \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_k \tag{1}$$

então $\ell \geqslant k$.

Provaremos que esta reordenação (denotada da mesma forma) de $\{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ é uma Decomposição de Morse para $\mathcal{A}$ com atratores locais $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$ definidos da seguinte forma

$A_0 = \varnothing$, $A_1 = \Xi_1$ e para $j = 2, 3, \cdots, n$

$$A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\Xi_j) = \cup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(\Xi_j). \tag{2}$$

É claro que $A_n = \mathcal{A}$.

Exercício

Mostre que A_j é compacto.

Estrutura Gradiente da Decomposição de Morse

Teorema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à coleção disjunta de invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ *reordenada de maneira que* Ξ_j *é um atrator para a restrição de* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *a* $\Xi^*_{j-1,j-2}$ $(\Xi^*_{0,-1} = \mathcal{A})$.

Então A_j *definido em* (2) *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* X,

$$\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}.$$

e $\mathbf{\Xi}$ *é uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$.

Prova: Do Lema 2, é suficiente provar que $A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\Xi_j)$ é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ restrito ao atrator global $\mathcal{A}$.

Escolha $d > 0$ tal que $\mathcal{O}_d(\bigcup_{i=1}^{j} W^u(\Xi_i)) \cap (\bigcup_{i=j+1}^{n} \Xi_i) = \varnothing$.

Se existem $\delta < d$ e $\delta' < \delta$ tais que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j) \cap \mathcal{A}$, então $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}$ e ($\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ é invariante) está contido em A_j provando que A_j é um atrator local em $\mathcal{A}$.

Se este não é o caso, existe uma seqüência $\{x_k\}$ em $\mathcal{A}\backslash A_j$ com $d(x_k, A_j) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para cada x_k uma solução global $\xi_k : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ por x_k e uma seqüência $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tal que $d(\xi_k(t), A_j) \leqslant \delta$ para todo $t \in [0, t_k)$ e $d(\xi_k(t_k), A_j) \geq \delta$.

Desta maneira, construímos uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ tal que $d(\xi(t), A_j) \leqslant \delta$ para todo $t \leqslant 0$ e $d(\xi(0), A_j) \geqslant \delta$. Isto nos dá uma contradição.

Para provar que $\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ note que $A_j \supset \bigcup_{i=1}^{j} \Xi_i$ (veja (2)) e $A^*_{j-1} = \{z \in \mathcal{A} : \omega(z) \cap A_{j-1} = \varnothing\} \supset \bigcup_{i=j}^{n} \Xi_i$ e $A_j \cap A^*_{j-1} \supset \Xi_j$.

Portanto, dado $z \in A_j \cap A^*_{j-1}$ temos que uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ por z deve satisfazer

$$\Xi_\ell \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_k.$$

com $k \leqslant \ell \leqslant j$ (do fato que $z \in A_j$) e $j \leqslant k \leqslant \ell$ (do fato que $z \in A^*_{j-1}$) e $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é dinamicamente gradiente relativamente à coleção disjunta de invariantes isolados $\{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$, obtemos que $z \in \Xi_j$.

Logo $A_j \cap A^*_{j-1} \subset \Xi_j$ e a igualdade segue. $\square$

Proposição

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ *reordenados de maneira que constituam uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$. *Então,*

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j.$$

Prova: Claramente $\bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j \subset \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$.

Agora, seja $z \in \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$, $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $z \in A_j$, $k \leqslant j \leqslant n$, e $z \in A_j^*$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Segue do Teorema 2 que $z \in A_k \cap A_{k-1}^* = \Xi_k$. Isto completa a prova. $\square$

Teorema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à coleção disjunta de invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ *reordenada de maneira que* Ξ_j *é um atrator para a restrição de* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *a* $\Xi^*_{j-1,j-2}$. *Então* A_j *definido por*

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(E_i)$$

é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* X,

$$\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}.$$

e $\mathbf{\Xi}$ *é uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$.

Funções de Lyapunov para semigrupos DG

Definição (Semigrupos Gradientes relativos à Ξ)

Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *com atrator global* $\mathcal{A}$ *e uma coleção disjunta de invariantes isolados* $\Xi = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ *é* **um semigrupo gradiente relativamente a Ξ** *se existir função contínua* $V : X \to \mathbb{R}$ *com* $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ *decrescente para cada* $x \in X$*, constante em cada* Ξ_i*,* $1 \leqslant i \leqslant n$*, e* $V(T(t)x) = V(x)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$ *se, e somente se,* $x \in \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$*.*

Uma função V *com tais propriedades será chamada uma função de Lyapunov para* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$*.*

Lema

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$, *a função* $h : X \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$h(x) := \sup_{t \in \mathbb{T}^+} d(T(t)x, \mathcal{A}), \quad x \in X,$$

está bem definida, é contínua, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ *é decrescente para cada* $x \in X$ *e* $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$.

Prova: De um lema anterior, dado $\varepsilon > 0$ seja $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$. Isto mostra a continuidade de h em $\mathcal{A}$.

Se $x_0 \in X \backslash \mathcal{A}$ seja $\mu \in (0, d(x_0, \mathcal{A}))$, V vizinhança limitada de x_0 satisfazendo $d(x, \mathcal{A}) > \mu$ para todo $x \in V$ e $\tau > 0$ tal que $\gamma^+(T(\tau)V) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$, então $h(x) = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant \tau} d(T(s)x, \mathcal{A})$, $x \in V$ e a continuidade de h em x_0 segue da continuidade de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Para ver que dado $x \in X$, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente note que, se $t_1 \geqslant t_2$, então

$$h(T(t_1)x) = \sup_{t \in \mathbb{T}^+} d(T(t)T(t_1)x, \mathcal{A}) = \sup_{t \geqslant t_1} d(T(t)x, \mathcal{A})$$
$$\leqslant \sup_{t \geqslant t_2} d(T(t)x, \mathcal{A}) = \sup_{t \in \mathbb{T}^+} d(T(t)T(t_2)x, \mathcal{A}) = h(T(t_2)x). \square$$

Proposição

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$ *e* (Ξ, Ξ^*) *um par atrator-repulsor em* $\mathcal{A}$*. Então, existe uma função contínua* $f : X \to \mathbb{R}$ *satisfazendo:*

(*i*) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto f(T(t)x) \in \mathbb{R}$ *é decrescente para cada* $x \in X$*.*

(*ii*) $f^{-1}(0) = \Xi$ *e* $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$*.*

(*iii*) *Dado* $x \in X$*, se* $f(T(t)x) = f(x)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$*, então* $x \in (\Xi \cup \Xi^*)$*.*

Prova: Primeiramente note que Ξ e Ξ^* são fechados e disjuntos em $\mathcal{A}$. Para cada $x \in X$, definimos a função de Urysohn $I : X \to [0,1]$ associada a (Ξ, Ξ^*) por

$$I(x) := \frac{d(x,\Xi)}{d(x,\Xi) + d(x,\Xi^*)}, \ x \in X.$$

Claramente I está bem definida, é uniformemente contínua em X (pois, para $d_0 := d(\Xi, \Xi^*) > 0$, vale que $|I(x) - I(y)| \leqslant \frac{1}{d_0} d(x,y)$, para todo $x, y \in X$). Além disso, $I^{-1}(0) = \Xi$ e $I^{-1}(1) = \Xi^*$.

Definamos $k : X \to \mathbb{R}$ por

$$k(x) := \sup_{t \in \mathbb{T}^+} \; l(T(t)x),$$

mostremos que $k : X \to \mathbb{R}$ é contínua, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x$ é decrescente para cada $x \in X$, $k^{-1}(0) = \Xi$ e $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Para provar que $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x) \in [0,1]$ é decrescente para cada $x \in X$ note que, se $0 \leqslant t_2 \leqslant t_1$ temos

$$\begin{aligned} k(T(t_1)x) &= \sup_{t\in\mathbb{T}^+} l(T(t)T(t_1)x) = \sup_{t\geqslant t_1} l(T(t)x) \\ &\leqslant \sup_{t\geqslant t_2} l(T(t)x) = \sup_{t\geqslant 0} l(T(t+t_2)x) = k(T(t_2)x). \end{aligned}$$

É claro da definição de k e da invariância de Ξ e Ξ^* que $k(\Xi) = \{0\}$ e $k(\Xi^*) = \{1\}$. Agora, se $x \in X$ é tal que $k(x) = 0$, então $l(T(t)x) = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Em particular, $0 = l(T(0)x) = l(x)$, e assim, $x \in \Xi$, mostrando que $k^{-1}(0) = \Xi$.

Por outro lado, se $x \in \mathcal{A}$ é tal que $k(x) = 1$ e $x \notin \Xi^*$, então $\omega(x) \subset \Xi$. Da continuidade de l e do fato que $\omega(x)$ atrai x, obtemos que $\lim\limits_{t\to\infty} l(T(t)x) = 0$. Logo, existe um $t_0 > 0$ tal que $1 = k(x) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0} l(T(t)x)$.

Isto implica a existência de um $t' \in [0, t_0]$ tal que $l(T(t')x) = 1$; isto é, $T(t')x \in \Xi^*$. Consequentemente $\omega(x) = \omega(T(t')x) \subset \Xi^*$, o que contradiz o fato que $\omega(x) \subset \Xi$ e assim, se $k(x) = 1$ para algum $x \in \mathcal{A}$ devemos ter que $x \in \Xi^*$. Disto concluímos que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} \subset \Xi^*$ e portanto $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Observação: Se $x \notin \mathcal{A}$ and $k(x) = 1$ é possível que $x \notin \Xi^*$. Basta que $x \notin \mathcal{A}$ e que $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$

Agora provamos que, se $x \in \mathcal{A}$ e $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ então $x \in \Xi \cup \Xi^*$. Se $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, $\omega(x) \subset \Xi$ (note que $x \in \mathcal{A}$) e da definição de k e do fato que $\omega(x)$ atrai x temos que $k(x) = \lim_{t\to\infty} k(T(t)x) = 0$ e $x \in \Xi$ o que é uma contradição.

A seguir provamos a continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$. Separamos a prova em três casos:

Caso 1) Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em Ξ^*.

Como $l(x) \leqslant k(x) \leqslant 1$, para todo $x \in X$, dado $x_0 \in \Xi^*$ e $x \in X$ temos que

$$|k(x) - k(x_0)| = 1 - k(x) \leqslant 1 - l(x).$$

Isto e a continuidade de $l : X \to \mathbb{R}$ em x_0 implicam a continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em x_0.

Caso 2) Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em Ξ.

Da definição de $I : X \to \mathbb{R}$ é fácil ver que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $I(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \varepsilon)$. De um lema anterior, existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, do que concluímos que $k(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset [0, \varepsilon]$.

Caso 3) Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$.

Dado $x_0 \in X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$, de um lema anterior temos que, ou $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi) = 0$, ou $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi^*) = 0$.

* Se $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi^*) = 0$ provemos a continuidade de k em x_0.

Primeiramente note que $k(x_0) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de $l : X \to \mathbb{R}$ em Ξ^* existe uma vizinhança aberta V de Ξ^* em X tal que $l(V) \subset (1 - \varepsilon, 1]$. Se $t_0 > 0$ é tal que $T(t_0)x_0 \in V$, da continuidade de $T(t_0) : X \to X$, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $T(t_0)U \subset V$. Disto segue que $k(x) > 1 - \varepsilon$ para todo $x \in U$ (pois $T(t_0)x \in V$ e portanto $1 - \varepsilon < l(T(t_0)x) \leqslant k(x)$). Isto prova a continuidade de k em pontos x_0 of $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ para os quais $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi^*) = 0$.

*Se $x_0 \in X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ e $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi) = 0$, então $l(x_0) > 0$.

Escolha $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \frac{l(x_0)}{2})$ e, de um lema anterior, existe um $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Seja $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)x_0 \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Da continuidade de $T(t_0) : X \to X$, existe uma vizinhança U_1 de x_0 in X tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Então, para todo $x \in U_1$ e $t \geqslant t_0$ temos que $T(t)x \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Finalmente, da continuidade de l, seja U_2 uma vizinhança de x_0 em X tal que $l(x) > \frac{l(x_0)}{2}$ para todo $x \in U_2$ e escreva $U := U_1 \cap U_2$. Desta forma, para todo $x \in U$ vale que $k(x) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} l(T(t)x)$.

Argumentando como antes, obtemos a continuidade de k em pontos x_0 de $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ para os quais $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi) = 0$.

Seja $h : X \to \mathbb{R}$ a função definida no Lema 6, isto é, $h(x) = \sup_{t \in \mathbb{T}^+} d(T(t)x, \mathcal{A})$, $x \in X$, e defina $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) := k(x) + h(x), \ x \in X.$$

A continuidade de $f : X \to \mathbb{R}$ segue da continuidade de k (provada acima) e de h (lema anterior). Como $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x)$ e $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x)$ são decrescentes para cada $x \in X$ (do que foi feito acima e do lema anterior, f também possui esta propriedade.

Claramente $f(\Xi) = \{0\}$. Por outro lado, se $f(x) = 0$ para algum $x \in X$, então $h(x) = k(x) = 0$ e devemos ter que $x \in \Xi$. Isto mostra que $f^{-1}(0) = \Xi$.

Além disso, como $f|_{\mathcal{A}} = k|_{\mathcal{A}}$ temos que $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Finalmente, (iii) é provado da seguinte maneira. Se $x \in X$ tal que $f(T(t)x) = f(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $h(T(t)x) = h(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e portanto $h(x) = 0$. Segue que $x \in \mathcal{A}$ e neste caso, temos que $k(T(t)x) = k(x)$. Assim $x \in \Xi \cup \Xi^*$ completando a prova.$\square$