Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Oitava Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

11 de Setembro de 2023

Estrutura gradiente e invariantes isolados

Agora vamos substituir os equilíbrios por invariantes isolados e definir semigrupos dinamicamente gradiente relativos a uma coleção disjunta de invariantes isolados.

Os resultados provados para semigrupos dinamicamente gradiente possuem análogos para o caso em que os semigrupos são dinamicamente gradiente relativos a uma coleção disjunta de invariantes isolados.

As provas desses resultados são semelhantes àquelas dos semigrupos dinamicamente gradiente.

Invariantes Isolados

Definição (Invariantes Isolados)

Diremos $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *será uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados se existir* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \varnothing$, $1 \leqslant i < j \leqslant \mathfrak{p}$, *e* Ξ_i *for o subconjunto invariante maximal de* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) := \{z \in X : \mathrm{dist}(z, \Xi_i) < \delta\}$.

Recorrência por cadeias

Definição ($\epsilon-$cadeias e recorrência por cadeias)

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo com um atrator global* $\mathcal{A}$ *que contém uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}\}$.

Seja δ *como antes e* $\epsilon_0 \in (0, \delta)$. *Para* $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ *e* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, *uma* $\epsilon-$**cadeia** *de* Ξ *a* Ξ *é uma família* $\{\Xi_{\ell_i}, \cdots, \Xi_{\ell_k}\} \subset \mathbf{\Xi}$, *juntamente com tempos* $t_1, \sigma_1, \cdots, t_k, \sigma_k$, $t_i > \sigma_i$, *e pontos* $u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_i})$, *tais que* $T(\sigma_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\cup_{i=1}^k(\Xi_{\ell_i}))$ *e* $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_{i+1}})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \leqslant \mathfrak{p}$, *com* $\Xi = \Xi_{\ell_{k+1}} = \Xi_{\ell_1}$.

Diremos que $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ *é* **recorrente por cadeias** *se existe um* $\epsilon_0 \in (0, \delta)$ *e* $\epsilon-$*cadeias de* Ξ *a* Ξ *para cada* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo que possui um atrator global* $\mathcal{A}$. *Diremos que* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo a uma coleção disjunta de invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *se,*

(*GG*1) *Para cada solução global* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *em* $\mathcal{A}$ *existem* $1 \leqslant i, j \leqslant \mathfrak{p}$ *tais que*

$$\lim_{t \to -\infty} \operatorname{dist}(\xi(t), \Xi_i) = 0 \text{ e } \lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\xi(t), \Xi_j) = 0.$$

(*GG*2) *Nenhum elemento de* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *é recorrente por cadeias.*

Como anteriormente introduzimos a definição de conjunto instável.

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo. O conjunto instável de um conjunto invariante isolado* Ξ *é dada por*

$$W^{\mathrm{u}}(\Xi) = \{\zeta \in X : \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{T} \to X \text{ tal que } \xi(0) = \zeta \text{ e } \lim_{t \to -\infty} \mathrm{dist}(\xi(t), \Xi) = 0\}.$$

Estrutura gradiente sob perturbação e Invariantes isolados

Teorema

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *tal que*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$, $\forall\ \eta \in [0,1]$. *Então existe* $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $\cup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitado.*

b) $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}} [\mathrm{dist}_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) + \mathrm{dist}_H(\Xi_{i,0}, \Xi_{i,\eta})] \xrightarrow{\eta\to 0} 0$ *e, além disso, existem* $\delta > 0$ *e* $\eta_0 > 0$ *tais que as soluções globais contidas em* $B_\delta(\Xi_{i,\eta})$ *estão em* $\Xi_{i,\eta}$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dinamicamente gradiente relativo a* $\mathbf{\Xi}_0$.

Então, $\exists\ \eta_0 > 0$ *tal que,* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dinamicamente gradiente relativo a* $\mathbf{\Xi}_\eta$, $\forall \eta \in [0, \eta_0]$. *Consequentemente,*

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(\Xi_{i,\eta}),\ \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Par atrator-repulsor

Definição (Par atrator-repulsor)

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$. *Diremos que um subconjunto não vazio* Ξ *de* $\mathcal{A}$ *é um atrator local se existir* $\epsilon > 0$ *tal que* $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)) = \Xi$. *O repulsor* Ξ^* *associado ao atrator local* Ξ *é o conjunto definido por*

$$\Xi^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap \Xi = \varnothing\}.$$

O par (Ξ, Ξ^*) *é chamado par atrator repulsor para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$.

Exercício

Mostre que, se Ξ é um atrator local, então Ξ^* é fechado, invariante e $\Xi \cap \Xi^* = \varnothing$.

Observe que Ξ é um atrator local se, e somente se, é compacto invariante e atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)$ para algum $\epsilon > 0$.

Lema (1)

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* X *com atrator global* $\mathcal{A}$. *Se* Ξ *é um conjunto invariante compacto para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *e existe um* $\epsilon > 0$ *tal que* Ξ *atrai* $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ *então, dado* $\delta > 0$ *existe um* $\delta' > 0$ *tal que* $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$.

Prova: Dado $\delta \in (0, \epsilon)$, se $\nexists\ \delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, existem $x \in \Xi$, $X \ni x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\mathbb{T} \ni t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \Xi) \geq \delta$ e $T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, $t \in [0, t_n)$.

Segue de um resultado anterior que existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\xi_n : [-t_n, \infty) \to X$ dada por $\xi_n(t) = T(t_n + t)x_n$ satisfaz $\xi_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Claramente $\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi)} \bigcap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \bigcap \mathcal{A}$ para todo $t \leqslant 0$, $d(\xi(0), \Xi) \geq \delta$, e consequentemente Ξ não pode atrair $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$. $\square$

Lema (2)

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo em* X *com um atrator global* $\mathcal{A}$. *Se* Ξ *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *restrito a* $\mathcal{A}$ *e* K *é um subconjunto compacto de* $\mathcal{A}$ *tal que* $K \cap \Xi^* = \varnothing$, *então* Ξ *atrai* K. *Além disso* Ξ *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* X.

Prova: Se $\Xi = \omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A})$ não atrai K e $0 < \delta < \epsilon$, existe $\delta' \in (0, \delta)$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $x \in K$ e $K \ni x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ tais que $d(T(t)x_n, \Xi) \geqslant \delta'$, $0 \leqslant t \leqslant t_n$. Isto implica que $d(T(t)x, \Xi) \geqslant \delta'$ para todo $t \geqslant 0$ e, consequentemente, $\omega(x) \cap \Xi = \varnothing$ e portanto $x \in \Xi^*$ o que é uma contradição.

Para a parte restante do resultado note que, do Lema 1, existe $\delta' \in (0, \epsilon)$ tal que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ e portanto $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \cap \Xi^* = \varnothing$. Da invariância de $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ e da propriedade que Ξ atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$, devemos ter que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \Xi$. Como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$ o resultado segue. $\square$

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* X *com um atrator global* $\mathcal{A}$ *e um par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*). *Se* $\xi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ *for uma solução global de* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$,

1) *se* $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, *então* $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*) \cap \Xi = \varnothing$ *e* $\xi((-\infty, 0]) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$, *então* $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prova: 1) Faremos a prova por redução ao absurdo. Se a conclusão é falsa, existe $\delta' > 0$ e seqüência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $d(\xi(-t_n), \Xi^*) \geqslant \delta'$.

Isto nos leva a uma contradição com o fato que Ξ deve atrair o subconjunto compacto $K = \{z \in \mathcal{A} : d(z, \Xi^*) \geqslant \delta'\}$ de $\mathcal{A}$.

Para provar 2) observamos que se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* = \varnothing$, do Lema 2 temos que $\overline{\xi(\mathbb{T})} \subset \Xi$ o que nos dá uma contradição.

Por outro lado, se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, segue de 1) que $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Isto completa a demonstração.$\square$

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* X *com atrator global* $\mathcal{A}$ *e um par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*). *Se* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *é uma solução global limitada para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *por* $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, *então* $\xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$ *e* $\xi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$. *Além disso, se* $y \in X \backslash \mathcal{A}$ *então,* $T(t)y \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$.

Prova: Como $x \notin \Xi^*$ temos que $\omega(x) \cap \Xi$ é não vazio e, do fato que Ξ é um atrator local, temos que $\xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$.

Se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* = \varnothing$, então $\xi(\mathbb{T})$ é invariante e, do Lema 2, é atraído por Ξ o que é uma contradição.

Logo, $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^*$ é não vazio e, do Lema 3, $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Para $x \in X \backslash \mathcal{A}$ provemos que $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$.

Se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \varnothing$ temos que $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$. Por outro lado, se existe $\delta > 0$ com $\gamma^+(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \varnothing$, afirmamos que $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$.

De fato, $\omega(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \varnothing$ e da invariância de $\omega(x)$ concluímos que $\omega(x) \subset \Xi^*$. Como $\omega(x)$ atrai x o resultado segue. $\square$

Corolário

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *for um semigrupo em* X *com um atrator global* $\mathcal{A}$ *e par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*)*, então* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *será um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à coleção disjunta de invariantes isolados* $\{\Xi, \Xi^*\}$*.*

Exercício

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\Xi \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante isolado. Mostre que* Ξ *é um atrator local se, e somente se,* $W^{\mathrm{u}}(\Xi) = \Xi$*.*

Semigrupos Dinamicamente Gradientes e Decomposição de Morse

Com isto podemos começar a estudar a decomposição de Morse do atrator de um semigrupo dinamicamente gradiente relativo a uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados. Começamos fixando a definição de decomposição de Morse que utilizaremos.

Definição (Decomposição de Morse)

Dada uma família crescente $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$, *de* $n+1$ *atratores locais, para* $j = 1, \cdots, n$, *defina* $\Xi_j := A_j \cap A^*_{j-1}$. *A* n*-upla ordenada* $\mathbf{\Xi} := (\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_n)$ *é chamada uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$.

Nosso objetivo agora é demonstrar que, se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de invariantes isolatos $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ e atrator global $\mathcal{A}$, então uma reordenação de $\mathbf{\Xi}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. O resultado a seguir tem um papel fundamental neste processo.

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Então, existe um $1 \leqslant k \leqslant n$ tal que Ξ_k é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ em X.

Prova: Do Exercício 2, se não existe um atrator local em Ξ temos que, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, existe uma solução global $\xi_i : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi_i(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_i$ e $\xi_i(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$ com $j \neq i$. Isto produz uma estrutura homoclínica e nos dá uma contradição. $\square$