Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Sétima Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

26 de agosto de 2019

Semigrupos dinamicamente gradiente Sob Perturbação

No que se segue consideramos uma família $\{T_\eta(t): t\in\mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ de semigrupos. Começamos com resultados que estendem os lemas fundamentais da seção anterior à esta família.

Denotaremos por $\mathcal{E}_\eta$ o conjunto dos pontos de equilíbrios de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, para cada $\eta \in [0,1]$.

Lema

Se $\{T_\eta(t): t\in\mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta=0$, $y^{*,\eta}\in\mathcal{E}_\eta$, $\eta\in[0,1]$, *e* $y^{*,\eta}\overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} y^{*,0}$, *dado* $\tau\in\mathbb{T}^+$ *e* $\epsilon>0$, *existe* $\delta>0$ *e* $\eta_0>0$ *tais que,* $\{T_\eta(t)y: 0\leqslant t\leqslant\tau,\ y\in B_\delta(y^{*,\eta})\}\subset B_\epsilon(y^{*,\eta})$, *para todo* $\eta\leqslant\eta_0$.

Prova: Se este não é o caso, existem $t_0 \in \mathbb{T}$, $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{\eta_k\}$ em $[0,1]$, $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $y_k \in B_{\frac{1}{k}}(y^{*,\eta_k})$ e $\{s_k\}$ em $[0,t_0]$ tais que $d(T_{\eta_k}(s_k)y_k, y^{*,\eta_k}) \geqslant \epsilon_0$.

Podemos assumir que $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} s_0$ para algum $s_0 \in [0,t_0]$. Portanto $d(T_0(s_0)y^{*,0}, y^{*,0}) \geqslant \epsilon_0$, o que é uma contradição. $\square$

Definição

Diremos que a família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *é coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *se, dadas sequências* $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *limitada em* X *e* $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *então* $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k\}$ *é relativamente compacto.*

Lema

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$. *Seja* $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\mathbb{J}_k := \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -s_k\}$. *Se, para cada* $k \in \mathbb{N}$, *existe uma solução* $\xi_{\eta_k} : \mathbb{J}_k \to X$ *de* $\{T_{\eta_k}(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *e* $B_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(-s_k)$ *é limitado, existe uma subsequência (que também denotaremos por* ξ_{η_k}*) e uma solução global* $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ *de* $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{\eta_k}(s) \to \xi_0(s)$$

para todo $s \in \mathbb{T}$. *Se* $B_1 := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \xi_{\eta_k}([-s_k, 0])$ *é limitado então e* $\xi_0(s) \in \bar{B}_1$ *para todo* $s \leq 0$.

Prova: Como B_0 é limitado e $\{T_\eta(t): t\in\mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta, existe uma subsequência (que também denotamos por η_k) e $x_0\in X$ tal que $\xi_{\eta_k}(0)=T_{\eta_k}(s_k)\xi_{\eta_k}(-s_k)\to x_0$.

Seja $\xi_0(\cdot):\mathbb{T}^+\to X$ definida por $\xi_0(t):=T_0(t)x_0$, $t\in\mathbb{T}^+$. Segue que

$$\xi_{\eta_k}(s) = T_{\eta_k}(s)\xi_{\eta_k}(0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T_0(s)x_0 = \xi_0(s), \quad \forall s\in\mathbb{T}^+.$$

Procedendo de maneira análoga, $\{\xi_{\eta_k}(-1)\}$ tem uma subsequência convergente $\xi_{\eta_k^1}(-1)$ com limite x_{-1}. Definindo $\xi_0(s) := T_0(s+1)x_{-1}$, $s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -1\}$, temos

$$T_0(1)x_{-1} = \lim_{k\to\infty} T_{\eta_k^1}(1)\xi_{\eta_k^1}(-1) = \lim_{k\to\infty} \xi_{\eta_k^1}(0) = x_0$$

e $\xi_0 : \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -1\} \to X$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-1) = x_{-1}$, $\xi_0(0) = x_0$ e

$$\xi_{\eta_k^1}(s) = T_{\eta_k^1}(s+1)\xi_{\eta_k^1}(-1) \to T_0(s+1)x_{-1} = \xi_0(s),$$

$s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -1\}$.

Suponha que tenhamos obtido subsequências $\{\xi_{\eta_k^i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, tais que $\{\eta_k^i\}$ é uma subsequência de $\{\eta_k^{i-1}\}$ e $\xi_{\eta_k^i}(-i) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_{-i}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$ e $T_0(1)x_{-i} = x_{-i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$. É claro que $\xi_{\eta_k^i} = T_{\eta_k^i}(s+i)x_{-1}$ converge para uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ definida em $\{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -i\}$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Agora construímos uma subsequência $\{\eta_k^m\}$ de $\{\eta_k^{m-1}\}$ tal que $\xi_{\eta_k^m}(-m)$ converge (para x_{-m}). É claro que $T_0(1)x_{-m} = x_{-m+1}$ e, se definirmos $\xi_0(s) = T(s+m)x_{-m}$ para $s \geqslant -m$, $\xi_0 : \mathbb{T}^+_{-m} \to X$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-i) = x_{-i}$, $0 \leqslant i \leqslant m$ e $\xi_{\eta_k^m}(s)$ converge para $\xi_0(s)$ para todo $s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -m\}$.

Com isto construímos uma sequência $\{\xi_{\eta_k^k}\}_{k=1}^{\infty}$ e uma solução $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-i) = x_{-i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e tal que $\xi_{\eta_k^k}(s) \to \xi_0(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. Isto conclui a demonstração.□

Corolário (1)

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$, *uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$.

Seja $\{\eta_k\}$ *uma sequência em* $(0, 1]$ *tal que* $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e para cada* $k \in \mathbb{N}$ *seja* $\xi_{\eta_k} : \mathbb{T} \to X$ *uma solução global de* $\{T_{\eta_k}(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Se $\cup_{k\in\mathbb{N}}\xi_{\eta_k}(\mathbb{T})$ *é limitado, para qualquer sequência* $\mathbf{s} = \{s_k\}$ *em* $\mathbb{T}^+$, $\{\xi_{\eta_k}\}$ *tem uma subsequência que denotaremos por* $\{\xi_{\eta_k^{\mathbf{s}}}\}$ *e uma solução global* $\xi_0^{\mathbf{s}} : \mathbb{T} \to X$ *de* $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{\eta_k^{\mathbf{s}}}(t + s_k) \to \xi_0^{\mathbf{s}}(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Lema

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, $\eta \in [0,1]$, *uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$.

Se $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dinamicamente gradiente,* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_p^*\}$ *é o conjunto de seus pontos de equilíbrio,* $\delta < \delta_0$ *e* $B \subset X$ *é limitado, existem* $\eta_0 = \eta_0(B) \in (0,1]$ *e* $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$, *independente de* $\eta \in [0, \eta_0]$, *tal que* $\{T_\eta(t)u_0 : 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) \neq \varnothing$ *para todo* $u_0 \in B$ *e* $\eta \in [0, \eta_0]$.

Se, além das hipóteses acima, supomos que o conjunto dos equilíbrios de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é* $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$ *e* $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^*) \overset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0$, *podemos substituir* y_i^* *na conclusão acima por* $y_i^{*,\eta}$.

Prova: Vamos fazer uma argumentação por contradição. Suponha que existam uma sequência $\{x_k\}$ em B, uma sequência $\{\eta_k\}$ em $[0,1]$, com $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, e uma sequência $\{t_k\}$ em $\mathbb{T}^+$, com $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, de modo que $\{T_{\eta_k}(s)x_k : 0 \leqslant s \leqslant 2t_k\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) = \varnothing$.

Como $\{T_\eta(t): t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$, passando a uma subseqüência se necessário, existe $y \in X$ tal que $T_{\eta_k}(t_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$.

Como $\{T_\eta(\cdot)\}_{\eta\in[0,1]}$ é contínua em $\eta = 0$, $T_{\eta_k}(t+t_k)x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T_0(t)y$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. De um lema anterior, existe um $t_\delta \in \mathbb{T}^+$ e $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que $d(T_0(t)y, y_j^*) < \delta$ para todo $t \geqslant t_\delta$ a assim chegamos a uma contradição. □

Lema

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *de semigrupos.*

Denote por $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$ *o conjunto dos equilíbrios de* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *e suponha que* $\max_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Se $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dinamicamente gradiente, dado* $0 < \delta < \delta_0$, *existe* $\eta_0 > 0$ *e* $\delta' > 0$ (*independente de* $\eta \in [0, \eta_0]$) *de maneira que, se* $\eta \in [0, \eta_0]$, $d(u_0, y_i^{*,\eta}) < \delta'$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, *e para algum* $t_1 \in \mathbb{T}^+$ $d(T_\eta(t_1)u_0, y_i^{*,\eta}) \geqslant \delta$, *então* $d(T_\eta(t)u_0, y_i^{*,\eta}) > \delta'$, *para todo* $t \geqslant t_1$.

Prova: Suponha que, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, existe sequência $\{u_k\}$ em X, $\{\eta_k\}$ com $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $d(u_k, y_i^{*,\eta_k}) < \frac{1}{k}$ e sequências $\sigma_k < \tau_k$ em $\mathbb{T}^+$ tais que $d(T_{\eta_k}(\sigma_k)u_k, y_i^{*,\eta_k}) \geqslant \delta$ e $d(T_{\eta_k}(\tau_k)u_k, y_i^{*,\eta_k}) < \frac{1}{k}$.

Mostremos que isto contradiz a propriedade $(G2)$ de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Note que σ_k pode ser escolhido de forma que $T_{\eta_k}(s)u_k \in B_\delta(y_i^{*,\eta_k})$ para todo $s < \sigma_k$ e, de um lema anterior, $\sigma_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Tomando subseqüências construímos uma solução global $\xi_0 : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi_0(\tau) \overset{\tau\to-\infty}{\longrightarrow} y_i^*$, $d(\xi_0(0), y_i^*) \geq \delta$. Como $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente, existe $j \neq i$ tal que $\xi_0(\tau) \overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*$.

Do fato de que $\xi_0(\tau) \overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*$ e da construção de ξ_0, existe subseqüência $\{\eta_{k_m}\}$ de $\{\eta_k\}$ e seqüências $\{\sigma_{k_m}\}$, $\{t_{k_m}\}$ em $\mathbb{T}^+$, $\sigma_{k_m} < t_{k_m} < \tau_{k_m}$, tais que $d(T_{\eta_{k_m}}(\sigma_{k_m})u_{k_m}, y_j^{*,\eta_{k_m}}) < \frac{1}{m}$ e $d(T_{\eta_{k_m}}(t_{k_m})u_k, y_j^{*,\eta_{k_m}}) \geqslant \delta$.

Procedendo exatamente como no passo anterior obtemos uma solução $\xi_1 : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi_1(s) \overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} y_j^*$.

Do fato de que $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente temos que existe $y_\ell^* \in \mathcal{E}$, $y_\ell^* \notin \{y_i^*, y_j^*\}$, tal que $\xi_1(s) \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} y_\ell^*$.

Continuando com este procedimento chegamos em uma contradição em um número finito de passos.□

Agora estamos prontos para provar que $(G1)$ e $(G2)$ são estáveis por perturbações; isto é, o conceito de semigrupos dinamicamente gradiente é robusto sob perturbações.

Teorema

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *tal que*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$, $\forall\ \eta \in [0,1]$ *e existe* $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $\cup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitado.*

b) $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, $\forall\ \eta \in [0,1]$, *e* $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$. *Além disso, existem* $\delta > 0$ *e* $\eta_0 > 0$ *tais que a única solução global de* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *contida em* $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ *é* $y_i^{*,\eta}$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo dinamicamente gradiente.*

Então, $\exists\, \eta_0 > 0$ *tal que,* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dinamicamente gradiente* $\forall \eta \in [0, \eta_0]$.

Primeira Parte da Prova da Estabilidade de G1: Provaremos, por redução ao absurdo que, para todo η suficientemente pequeno, toda global $\xi^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ em $\mathcal{A}_\eta$ satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0, \text{ para algum } 1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}.$$

Note que $y_i^{*,\eta} \to y_i^{*,0} =: y_i^*$ e que existe um $\delta > 0$ tal que, para todo η suficientemente pequeno, se uma solução $\xi^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ satisfaz $d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^*) \leqslant \delta$ para todo $t \geqslant t_0$ e para algum $t_0 \in \mathbb{T}$, então $\xi^{(\eta)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^{*,\eta}$.

Suponha que existe uma sequência $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e soluções globais correspondentes $\xi^{(k)}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{s\geqslant t} \operatorname{dist}(\xi^{(k)}(s), \mathcal{E}) > \delta, \ \forall t \in \mathbb{T}^+. \tag{1}$$

Pelo Corolário 1, tomando subsequências, $\xi^{(k)}(t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi^{(0)}(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$ onde $\xi^{(0)}$ é uma solução global em $\mathcal{A}_0$.

Como $\xi^{(0)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_i^*$, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, temos que, dado $r \in \mathbb{N}^*$ existem $t_r \in \mathbb{T}$ e $k_r \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi^{(k)}(t_r), y_i^*) < \frac{1}{r}$, para cada $k \geqslant k_r$.

De (1), existe $t_r' > t_r$ tal que $d(\xi^{(k_r)}(t), y_i^*) < \delta$ para todo $t \in [t_r, t_r')$ e $d(\xi^{(k_r)}(t_r'), y_i^*) \geqslant \delta$.

Tomando subseqüências se necessário, seja $\xi^{(1)}(t) = \lim_{r\to\infty} \xi^{(k_r)}(t+t'_r)$.

Então, como $t'_r - t_r \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $d(\xi^{(1)}(t), y_i^*) \leqslant \delta$ para todo $t < 0$ e consequentemente $\xi^{(1)}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_i^*$.

Além disso $\xi^{(1)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*$ com $i \neq j$ por $(G1)$ e $(G2)$ para $\eta = 0$.

Do fato de que $\xi^{(k_r)}(t + t'_r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \xi^{(1)}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$ temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um instante $t_m > 0$ e índices $k_m \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi^{(k_r)}(t_m), y_j^*) < \frac{1}{m}$ para todo $k_r \geqslant k_m$.

Novamente, de (1), existem $t'_m > t_m$ tais que $d(\xi^{k_m}(t), y_j^*) < \delta$ para todo $t \in [t_m, t'_m)$ e $d(\xi^{k_m}(t'_m), y_j^*) \geqslant \delta$.

Procedendo exatamente como antes obtemos uma solução global $\xi^{(2)} : \mathbb{T} \to X$ tal que $\xi^{(2)}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_j^*$ e $\xi_n^{(2)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_\ell^*$ com $\ell \notin \{i, j\}$.

Em um número finito de passos chegamos a uma contradição.

Isto prova que existe um $\eta_0 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$ com $\eta \leqslant \eta_0$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0.$$

Conclusão da Prova da Estabilidade de G1: Para provar que existe um $\eta_1 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$, com $\eta \leqslant \eta_1$, temos que

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_j^{*,\eta}) = 0,$$

procedemos exatamente da mesma maneira.

Isto completa a prova de que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz $(G1)$.

Prova da Estabilidade de G2: Vamos provar que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ também satisfaz $(G2)$. Novamente argumentaremos por contradição.

Suponha que exista uma seqüência $\eta_k \to 0$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, pontos de equilíbrio $y_1^{*,\eta_k}, \cdots, y_q^{*,\eta_k}$ em $\mathcal{E}_{\eta_k}$ e solução global $\xi^{k,i}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ com

$$\lim_{t\to-\infty} \xi^{k,i}(t) = y_i^{*,\eta} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} \xi^{k,i}(t) = y_{i+1}^{*,\eta}$$

where $y_1^{*,\eta} = y_{q+1}^{*,\eta}$.

Procedendo como na prova de $(G1)$ construímos uma estrutura homoclínica para $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ e chegamos a uma contradição. □

Corolário

Nas hipóteses do Teorema 1, existe um $\eta_0 > 0$ *tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_i^{*,\eta}), \ \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Agora vamos substituir os equilíbrios por invariantes isolados e definir semigrupos dinamicamente gradiente relativos a uma família disjunta de invariantes isolados.

Os resultados provados para semigrupos dinamicamente gradiente possuem análogos para o caso em que os semigrupos são dinamicamente gradiente relativos a uma família disjunta de invariantes isolados.

As provas desses resultados são semelhantes àquelas dos semigrupos dinamicamente gradiente.

Definição (Invariantes Isolados)

Dizemos $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *é uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados se existe* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \varnothing$, $1 \leqslant i < j \leqslant \mathfrak{p}$, *e* Ξ_i *é o subconjunto invariante maximal de* $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) := \{z \in X : \mathrm{dist}(z, \Xi_i) < \delta\}$.

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots \Xi_{\mathfrak{p}}\}$. Definimos

Definição (Recorrência por cadeias)

*Seja δ como na definição anterior e fixe $\epsilon_0 \in (0, \delta)$. Para $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, uma $\epsilon-$***cadeia** *e Ξ a Ξ é uma sequência $\{\Xi_{\ell_i}, \cdots, \Xi_{\ell_k}\} \subset \mathbf{\Xi}$, uma seqüência $t_1, \sigma_1, \cdots, t_k, \sigma_k$, com $t_i > \sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \leqslant \mathfrak{p}$, e uma sequência de vetores u_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, tais que $u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_i})$, $T(\sigma_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\cup_{i=1}^k(\Xi_{\ell_i}))$ e $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_{\ell_{i+1}})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, com $\Xi = \Xi_{\ell_{k+1}} = \Xi_{\ell_1}$.*

Diremos que $\Xi \in \mathbf{\Xi}$ é **recorrente por cadeias** *se existe um $\epsilon_0 \in (0, \delta)$ e $\epsilon-$cadeias de Ξ a Ξ para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo que possui um atrator global* $\mathcal{A}$. *Diremos que* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo a uma família disjunta de invariantes isolados* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *se,*

(*GG*1) *Para cada solução global* $\xi : \mathbb{T} \to X$ *em* $\mathcal{A}$ *existem* $1 \leqslant i, j \leqslant \mathfrak{p}$ *tais que*

$$\lim_{t \to -\infty} \operatorname{dist}(\xi(t), \Xi_i) = 0 \text{ e } \lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\xi(t), \Xi_j) = 0.$$

(*GG*2) *Nenhum elemento de* $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p}}\}$ *é recorrente por cadeias.*

Como anteriormente introduzimos a definição de conjunto instável.

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo. O conjunto instável de um conjunto invariante isolado* Ξ *é dada por*

$$W^{\mathrm{u}}(\Xi) = \{\zeta \in X : \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{T} \to X$$
$$\text{tal que } \xi_0 = \zeta \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(\xi(t), \Xi) = 0\}.$$

Teorema

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *tal que*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$, $\forall\ \eta \in [0,1]$. *Então existe* $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $\cup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitado.*

b) *A família de invariantes isolados* $\mathbf{\Xi}_\eta = \{\Xi_{1,\eta}, \cdots, \Xi_{\mathfrak{p},\eta}\}$ *satisfaz* $\sup_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}}[\mathrm{dist}_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) + \mathrm{dist}_H(\Xi_{i,0}, \Xi_{i,\eta})] \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$. *Além disso, existem* $\delta > 0$ *e* $\eta_0 > 0$ *tais que as soluções globais contidas em* $B_\delta(\Xi_{i,\eta})$ *estão em* $\Xi_{i,\eta}$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo a* $\mathbf{\Xi}_0$.

Então, $\exists\ \eta_0 > 0$ *tal que,* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dinamicamente gradiente relativo a* $\mathbf{\Xi}_\eta$, $\forall \eta \in [0, \eta_0]$. *Consequentemente, existe* $\eta_0 > 0$ *tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(\Xi_{i,\eta}),\ \forall \eta \in [0, \eta_0].$$