Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Quinta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

23 de agosto de 2023

Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e A um conjunto invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, já vimos que existe uma solução global por a, para cada $a \in A$.

As soluções globais mais simples são as constantes; isto é, soluções estacionárias ou pontos de equilíbrio.

Lembremos que $y^* \in X$ é um ponto de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se o conjunto $\{y^*\}$ é a órbita de uma solução global constante; isto é, $T(t)y^* = y^*$, para todo $t \geqslant 0$.

Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

As soluções globais que tendem a um equilíbrio y^* quando t tende a $-\infty$ formam um conjunto invariante que chamamos de *conjunto instável* $W^u(y^*)$ de y^*; isto é,

Definição (Conjunto Instável)

Seja $y^* \in \mathcal{E}$. O conjunto

$$W^u(y^*) = \{y \in X : \text{existe solução global } \phi_y : \mathbb{T} \to X \text{ tal que, } \phi_y(0) = y \text{ e } \phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*\}.$$

é chamado conjunto instável de y^*.

Dado $\delta > 0$ e $y^* \in \mathcal{E}$. O conjunto

$$W^u_\delta(y^*) = \{y \in \mathcal{O}_\delta(y^*) : \text{ existe solução global } \phi_y : \mathbb{T} \to X \text{ tal que } \phi_y(0) = y, \phi_y(t) \in \mathcal{O}_\delta(y^*), \forall t \in \mathbb{T}^- \text{ e } \phi_y(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*\}$$

é chamado uma conjunto instável local de y^*.

A órbita γ_ϕ de uma solução global não constante $\phi : \mathbb{T} \to X$ que tende a um ponto de equilíbrio y^* quando t tende a $\pm\infty$ é chamada uma **órbita homoclinica** em y^*.

Observamos que sempre que existe uma órbita homoclinica em y^*, $W^u_\delta(y^*)$ não coincide com a interseção de $W^u(y^*)$ com $\mathcal{O}_\delta(y^*)$ para nenhum $\delta > 0$.

Teorema (Semicontinuidade Inferior)

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua em* $\eta = 0$ *de semigrupos com atratores globais* $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *e seja* $\mathcal{E}_\eta$ *o conjunto dos pontos de equilíbrio de* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. *Suponha que*

a) *Existe* $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, *para todo* $\eta \in [0,1]$, *e* $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta\to 0} 0$.

b) *Existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\{W_\delta^u(y_j^{*,\eta})(y_j^{*,0}) : \eta \in [0,1]\}$$

é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

c) $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$.

Então, $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$.

Prova: De $c)$ temos que $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$. Segue que, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, existe uma solução global $\phi^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ por u_0 ($\phi^{(0)}(0) = u_0$), $1 \leqslant \ell \leqslant \mathfrak{p}$ e $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $\phi^{(0)}(-\tau) \in W_\delta^u(y_\ell^{*,0})$.

De $b)$, existe $u_\eta^{-\tau} \in W_\delta^u(y_j^{*,\eta})$ tal que $u_\eta^{-\tau} \xrightarrow{\eta \to 0} \phi^0(-\tau)$ e solução global $\psi^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\psi^{(\eta)}(0) = u_\eta^{-\tau}$ tal que $\psi^{(\eta)}(0) \xrightarrow{\eta \to 0} \phi^{(0)}(-\tau)$.

Segue da continuidade de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\eta = 0$ que

$$\mathcal{A}_\eta \ni T_\eta(\tau)\psi^{(\eta)}(0) \xrightarrow{\eta \to 0} u_0.$$

O resultado agora segue do lema.$\square$

Semigrupos gradientes

Vamos considerar agora os semigrupos gradientes. Esta classe de semigrupos aparece naturalmente em diversas aplicações e suas características permitem descrever com bastante precisão a estrutura dos seus atratores.

Definição

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *será dito gradiente se tiver uma função de Lyapunov; isto é, se existir uma função contínua* $V : X \to \mathbb{R}$ *tal que:*

(*i*) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ *seja decrescente, para cada* $x \in X$*;*

(*ii*) *Se* x *for tal que* $V(T(t)x) = V(x)$ $\forall$, $t \in \mathbb{T}^+$, *então* $x \in \mathcal{E}$.

Para semigrupos gradientes temos o seguinte resultado de caracterização:

Lema

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ for um semigrupo gradiente, então $\omega(x)$ será um subconjunto de $\mathcal{E}$, para cada $x \in X$. Se existir uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x, então $\alpha_\phi(x)$ será um subconjunto de $\mathcal{E}$.

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ for gradiente, tiver um atrator global $\mathcal{A}$ e $\mathcal{E}$ só tiver pontos isolados, então $\mathcal{E}$ será finito e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ será unitário. Neste caso, se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ for uma solução global por x, então $\alpha_\phi(x)$ e $\omega(x)$ serão conjuntos unitários.

Prova: Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é decrescente e possui uma subseqüência convergente.

Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{T}^+$, e da propriedade (ii) na Definição 2 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x.

Se $\alpha_\phi(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Por outro lado, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$, pois é crescente e tem uma subseqüência convergente.

Como $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que para cada $y \in \alpha_\phi(x)$, $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{T}^+$, e $y \in \mathcal{E}$.

Agora suponhamos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tenha um atrator global $\mathcal{A}$ e que $\mathcal{E}$ só tenha pontos isolados.

Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ segue que $\mathcal{E}$ é finito.

Mostremos que, se $\mathcal{E}$ é finito, $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários.

Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ isto segue do fato que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos.

Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e $\omega(x) = \{y_1^*, \cdots, y_\ell^*\} \subset \mathcal{E}$ com $\ell \geqslant 2$, então existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_i : 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ de $\mathbb{N}$ com a propriedade que cada $\mathbb{N}_i$ é infinito e $\lim\limits_{\substack{n \in N_i \\ n \to \infty}} T(n)x = y_i^*$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

Escolha $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $k_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \in \mathbb{N}_j$, para algum $2 \leqslant j \leqslant \ell$. Então, $y_1^* = T(1)y_1^* = \lim_{k \to \infty} T(k_{2n})x = y_j^*$, o que é uma contradição.

Isto mostra que se o conjunto das soluções estacionárias for finito, então $\omega(x)$ será um conjunto unitário.

A prova que $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ é inteiramente análoga e isto conclui a demonstração. $\square$

Theorem

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *for um semigrupo gradiente, eventualmente limitado, assintoticamente compacto e que o seu conjunto de pontos equilíbrios* $\mathcal{E}$ *for limitado, então* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *terá um atrator global* $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$*, onde*

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in X : \text{existe uma solução global } \phi(\cdot) : \mathbb{T} \to X \text{ por } y \ (\phi(0) = y) \text{ tal que } d(\phi(t), \mathcal{E}) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

será chamado de conjunto instável de $\mathcal{E}$*. Se* $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ *for finito* $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$*. Finalmente, se existir um conjunto conexo e limitado* B *que contém* $\mathcal{A}$*, então* $\mathcal{A}$ *será conexo.*

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x.

Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é limitado, temos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo.

Disto obtemos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x. Como $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x)$ é compacto, não vazio e $d(\phi(t), \alpha_\phi(x)) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

Do lema anterior, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$.

Se $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x e $\phi(t) \overset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$.

Do fato de que $\phi(\mathbb{T})$ é invariante e limitado concluímos que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $x \in \mathcal{A}$.

Isto mostra que $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$ e completa a prova de que $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots e_n^*\}$, a igualdade $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ segue imediatamente do lema anterior e, se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo e limitado de X, um resultado anterior implica que $\mathcal{A}$ é conexo. $\square$

Lemma

Assuma que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo gradiente que tem um atrator global* $\mathcal{A}$ *e que* $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}^*$. *Se* $V : X \to \mathbb{R}$ *é função de Lyapunov de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, $V(\mathcal{E}) = \{\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_p\}$, $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{n}_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$ *e* $\mathfrak{n}_j \leqslant r < \mathfrak{n}_{j+1}$, *então* $X_r = \{z \in X : V(z) \leqslant r\}$ *é positivamente invariante e a restrição* $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *a* X_r, *tem atrator global* $\mathcal{A}^{(j)}$ *dado por*

$$\mathcal{A}^{(j)} = \cup\{W^{\mathrm{u}}(y_\ell^*) : V(y_\ell^*) \leqslant \mathfrak{n}_j\}.$$

Em particular, $V(z) \leqslant \mathfrak{n}_j$ *para* $z \in \mathcal{A}^{(j)}$, $\mathfrak{n}_1 = \min\{V(x) : x \in X\}$ *e* $\mathcal{A}^{(1)} = \{y^* \in \mathcal{E} : V(y^*) = \mathfrak{n}_1\}$ *consiste dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; isto é para cada* $y^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ *existe uma vizinhança* $\mathcal{O}_{y^*}$ *de* $y*$ *tal que* $T(t)x \to y*$ *para cada* $x \in \mathcal{O}_{y*}$.

Prova: É claro da definição da função de Lyapunov que X_r é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Para provar a existência de um atrator para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ notemos que as propriedades requeridas para obtermos um atrator global são herdadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$; a saber, órbitas de subconjuntos limitados de X_r são limitadas, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo e assintoticamente compacto.

Logo, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$. A restrição V_r de V a X_r é uma função de Lyapunov para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$ segue.

Seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{d(x^*, y^*), x^*, y^* \in \mathcal{A}_1, x^* \neq y^*\}$ e provemos a última afirmação.

Se existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e seqüências $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em X e $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{T}^+$ tais que $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ e $d(T(t_k)x_k, x^*) \geqslant \delta$ $(d(T(t)x_k, x^*) < \delta$ para $0 \leqslant t < t_k)$ concluímos que $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente.

De fato, é claro que $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e o resultado segue da compacidade assintótica do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Denote esta subseqüência convergente por $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ e seja y seu limite. É imediato do fato de que $V(x_k) \to \mathfrak{n}_1$ que $V(y) = V(T(t)y) = \mathfrak{n}_1$. Portanto $y \in \mathcal{A}_1$ e $\mathrm{dist}(y, x^*) \geqslant \delta$.

Por outro lato $\{T(t_k - 1)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ também tem uma subseqüência convergente e o limite z desta subseqüência pertence a $\mathcal{A}_1 \cap \overline{B_\delta(x^*)}$. Segue que $z = x^*$ e que $x^* = T(1)x^* = T(1)z = y$. Isto é um absurdo.

Isto prova que, para cada $x^* \in \mathcal{A}_1$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta > \delta' > 0$ tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}_1$ consiste somente dos equilíbrios estáveis.

Para concluir precisamos somente notar que, para cada $x \in X$, $T(t)x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ para algum $x^* \in \mathcal{E}$.$\square$